Théorèmes limites et applications – MdA Paris-Saclay – Examen
Mardi 16 janvier 2024 – 9h-12h

Les documents ne sont pas autorisés.

La précision et la clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.

Toute question peut être admise et utilisée ultérieurement, à condition de l'indiquer clairement.

Le sujet comporte 2 pages.

Questions de cours.

(1) Énoncer le théorème de représentation de Skorokhod.

(2) Énoncer le critère de tension de Kolmogorov.

(3) Soit $(B_t)_{0\leq t\leq 1}$ un mouvement brownien réel standard issu de 0. Démontrer que lorsque $\varepsilon \to 0$, la loi de $(B_s)_{0\leq s\leq 1}$ sachant que $\{|B_1| \leq \varepsilon\}$ converge vers la loi de $(B_s - sB_1)_{0\leq s\leq 1}$.

* * *

Exercice 1. Soit $\lambda > 0$ et soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par $\mathbb{P}(X \geq a) = a^{-\lambda}$ pour tout $a \geq 1$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de même loi que X et on pose

$$T_n = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{1/n}.$$

Lorsque $n \to \infty$, est-ce que T_n converge dans L^1 ? Justifier votre réponse.

Corrigé :
La réponse est oui. En calculant par exemple sa fonction de répartition, on vérifie que $\ln(X)$ suit une loi exponentielle de paramètre λ, de sorte que T_n converge presque sûrement vers $e^{1/\lambda}$ par la loi forte des grands nombres.

Par ailleurs, $(T_n)_{n\geq 1}$ est borné dans L^2 car pour n assez grand

$$\mathbb{E}[T_n^2] = \mathbb{E}\left[X^{2/n}\right]^n = \left(\int_1^\infty x^{2/n}\cdot\frac{\lambda}{x^{\lambda+1}}\mathrm{d}x\right)^n = \left(\frac{\lambda n}{\lambda n - 2}\right)^n = \left(1 + \frac{2}{\lambda n - 2}\right)^n$$

qui converge vers $e^{2/\lambda}$.

Donc T_n est uniformément intégrable, et convergeant p.s. (et donc en probabilité), elle converge dans L^1.

Autres solutions. Alternativement, on peut passer par le lemme de Scheffé, ou montrer que $\mathbb{E}[T_n] \to e^{1/\lambda}$ et $\mathbb{E}[T_n^2] \to e^{2/\lambda}$ et conclure par Cauchy-Schwarz. □

Exercice 2. Soit (E,d) un espace métrique séparable et X_n, Y_n des variables aléatoires à valeurs dans E. On suppose que X_n converge presque sûrement et que $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(d(X_n, Y_n) \geq \varepsilon) \to 0$.

(1) Montrer que Y_n converge en probabilité.

(2) Est-il vrai que Y_n converge presque sûrement ? Justifiez votre réponse (si la réponse est oui, donnez une preuve ; si la réponse est non, donnez un contre-exemple avec l'espace E de votre choix).

Corrigé :

(1) Notons X la limite presque sûre de X_n. On écrit pour $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(d(Y_n, X) \geq 2\varepsilon) \leq \mathbb{P}(d(Y_n, X_n) \geq \varepsilon) + \mathbb{P}(d(X_n, X) \geq \varepsilon).$$

Le premier terme de la somme converge vers 0 par hypothèse, et le second tend vers 0 également car la convergence presque sûr entraine la convergence en probabilité.

(2) Non : en prenant $X_n = X$ il suffit de prendre un cas où une convergence en probabilité a lieu sans convergence presque sûre. On peut par exemple prendre $E = \mathbb{R}$, $X_n = X = 0$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{P}(Y_n = 1) = 1/n$ et $\mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - 1/n$.

□

Exercice 3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathbb{P}_x$ la loi d'un mouvement brownien réel standard partant de x. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels.

(1) Lorsque $(x_n)_{n\geq 1}$ est bornée, montrer que la suite $(\mathbb{P}_{x_n})_{n\geq 1}$ est tendue dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

(2) Le résultat reste-t-il vrai si la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ n'est plus supposée bornée ? Justifiez votre réponse.

Corrigé :

(1) Notons $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0,1), \mathbb{R})$. Puisque $\mathcal{C}$ est polonais, d'après le théorème de Prokhorov il suffit de montrer que de toute sous-suite de $(\mathbb{P}_{x_n})_{n\geq 1}$ on peut extraire une sous-suite qui converge étroitement. Sans perte de généralité, il suffit de monter qu'on peut trouver une sous-suite de $(\mathbb{P}_{x_n})_{n\geq 1}$ qui converge étroitement. Puisque $(x_n)_{n\geq 1}$ est bornée, on peut trouver une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ convergente vers x. Vérifions que $\mathbb{P}_{x_{\phi(n)}} \to \mathbb{P}_x$.

Notons $(B_t)_{0\leq t\leq 1}$ un mouvement brownien réel partant de 0, de sorte que $\mathbb{P}_x$ est la loi de $(x + B_t)_{0\leq t\leq 1}$. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ continue bornée. Alors par convergence dominée

$$\mathbb{P}_{x_{\phi(n)}}(F) = \mathbb{E}\Big[F(x_{\phi(n)} + B_t : 0 \leq t \leq 1)\Big] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[F(x + B_t : 0 \leq t \leq 1)] = \mathbb{P}_x(F).$$

Ceci conclut.

Autres solutions. On peut vérifier le critère de tension via module de continuité ou bien le critère de tension de Kolmogorov.

(2) Non. En raisonnant par l'absurde, si $(\mathbb{P}_{x_n})_{n\geq 1}$ est tendu, par image continue en évaluant à l'instant 0, la suite de mesures $(\delta_{x_n})_{n\geq 1}$ serait tendue dans $\mathbb{R}$, ce qui n'est pas le cas en prenant une sous-suite non bornée.

□

Exercice 4. On note $\mathbb{D} = \mathbb{D}([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions càdlàg sur $[0,1]$ à valeurs réelles muni de la topologie J_1 de Skorokhod définie en cours. Pour une variable aléatoire Z, on note F_Z sa fonction de répartition définie par $F_Z(t) = \mathbb{P}(Z \leq t)$ pour $t \in \mathbb{R}$, vue comme élément de $\mathbb{D}$ par restriction à $[0,1]$.

Soient $(X_n)_{n\geq 1}, X$ des variables aléatoires réelles à valeurs dans $[\frac{1}{2}, 1]$.

(1) Alix dit : "si X_n converge en loi, alors F_{X_n} converge dans $\mathbb{D}$." A-t-il raison ? Justifiez votre réponse.

(2) Billie dit : "si F_{X_n} converge dans $\mathbb{D}$, alors X_n converge en loi." A-t-elle raison ? Justifiez votre réponse.

Corrigé :

(1) Non. Par exemple, si la loi de X_n est $\frac{1}{2}\delta_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}\delta_{\frac{1}{2}+\frac{2}{n}}$, alors F_{X_n} ne converge pas vers $\mathbb{D}$. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que F_{X_n} converge vers F dans $\mathbb{D}$. Alors F_{X_n} converge simplement vers F en tout point de continuité de F. Puisque F_{X_n} converge simplement vers $\mathbb{1}_{[1/2,1]}$ et que F est càdlàg, on en déduit que $F = 0$ sur $[0, 1/2[$ et $F = 1$ sur $[1/2, 1]$. Mais pour tout changement de temps $\lambda : [0, 1] \to [0, 1]$, on peut trouver $t_n \in [0, 1]$ tel que $\lambda_n(t_n) = 1/2 + 1/n$, de sorte que

$$|F_{X_n}(\lambda_n(t_n)) - F(t_n)| = 1/2 \quad \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} \quad 0.$$

(2) Oui. Soit F la limite de F_{X_n}. Puisque (X_n) est bornée, elle est tendue. Il suffit de montrer l'unicité en loi de la limite de toute sous suite. Supposons que $X_{\phi(n)}$ converge en loi vers X. Notons D l'ensemble des points de discontinuité de F et de F_X. Alors $F_{X_n}(t)$ converge vers $F(t)$ et vers $F_X(t)$ pour tout $t \in [0, 1]\backslash D$. Ainsi F et F_X sont deux fonctions càdlàg qui coincident sur un ensemble dénombrable dense. Elles sont donc égales, ce qui conclut.

Autre solution. En notant F la limite de F_{X_n}, on vérifie que F est croissante, càdlàg, $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$, de sorte que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X. Par propriétés de convergence dans $\mathbb{D}$, F_{X_n} converge simplement vers F en tout point de continuité de F.

□

Exercice 5. Soit $n \geq 1$ un entier. On considère une urne avec $2n$ boules. Parmi celles-ci, n sont étiquetées $+1$ et n sont étiquetées -1. On tire successivement indépendamment au hasard $2n$ boules, on pose $S_0 = 0$ et pour $1 \leq k \leq 2n$ on note S_k la somme des k premières boules tirées. On définit S_t pour $0 \leq t \leq 2n$ par interpolation linéaire. Étudier la convergence en loi de la suite

$$\left(\frac{S_{2nt}}{\sqrt{n}} : 0 \leq t \leq 1\right)$$

dans l'espace $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ dans les deux cas suivants :

(1) les tirages se font **avec** remise,

(2) les tirages se font **sans** remise.

Corrigé :

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathbb{P}(X_1=1)=\mathbb{P}(X_1=-1)=1/2$ et notons $S'_n=X_1+\cdots+X_n$ pour $n\geq 0$. On a $\mathbb{E}[X_1]=0$ et $\mathbb{E}[X_1^2]=1$.

(1) On a convergence en loi vers $\sqrt{2}$ fois le mouvement brownien sur $[0,1]$. On remarque que $(S_i)_{0\leq i\leq 2n}$ a la même loi que $(S'_i)_{0\leq i\leq 2n}$, et le résultat découle du théorème de Donsker.

(2) On montre que la suite converge en loi vers $\sqrt{2}$ fois le pont brownien. On remarque maintenant que $(S_i)_{0\leq i\leq 2n}$ a la même loi que $(S'_i)_{0\leq i\leq 2n}$ sous le conditionnement $S'_{2n}=0$. Le résultat désiré est alors une conséquence du théorème de Donsker conditionné de convergence vers le pont brownien. Il faut toutefois faire attention car nous avons ici une loi périodique (en cours le théorème a été formulé dans un cadre apériodique). Pour se ramener au cas apériodique, posons $Y_1=(1+X_1)/2$ et $T_n=Y_1+\cdots+Y_n$. Alors puisque $\mathsf{Var}(Y_1)=1/4$, d'après le théorème de Donsker conditionné (avec extension immédiate au cas non centré)

$$\left(\frac{T_{2nt}-nt}{\sqrt{n/2}}:0\leq t\leq 1\right) \qquad \text{sous } \mathbb{P}(\,\cdot \mid T_{2n}-n=0) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{\text{(loi)}} \quad b,$$

où b est le mouvement brownien. Comme $T_{2nt}=nt+S'_{2nt}/2$, le résultat désiré en découle.

□

Petit problème 6.

Première partie. On considère des variables aléatoires réelles $I_n, I_n(\delta), I, I(\delta)$ pour $\delta>0$ et $n\geq 1$ telles que :

(i) presque sûrement $I(\delta)\to I$ lorsque $\delta\to 0$,

(ii) pour tout $\delta>0$, $I_n(\delta)$ converge en loi vers $I(\delta)$ lorsque $n\to\infty$,

(iii) pour tout $n\geq 1$ et $\delta>0$, $\mathbb{E}[|I_n(\delta)-I_n|]\leq\delta$.

(1) Montrer que $I_n\to I$ en loi lorsque $n\to\infty$.

On considère dans la suite des variables aléatoires $(X_i)_{i\geq 1}$ i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{Z}$ apériodiques avec $\mathbb{E}[X_1]=0$, $\mathbb{E}[X_1^2]=1$. On pose $S_n=X_1+\cdots+X_n$ pour tout $n\geq 1$. On note $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel standard issu de 0. On fixe également $0<\gamma<1$.

Deuxième partie.

(2) Montrer que pour tout $\delta>0$, presque sûrement la mesure de Lebesgue de $\{t\in[0,1]:B_t=\delta\}$ est nulle.

(3) Montrer que pour tout $\delta>0$ la convergence suivante a lieu en loi

$$\frac{1}{n^{1-\gamma/2}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|S_i|^\gamma}\mathbb{1}_{|S_i|>\delta\sqrt{n}} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{\text{(loi)}} \quad \int_0^1\frac{1}{|B_t|^\gamma}\mathbb{1}_{|B_t|>\delta}\mathrm{d}t.$$

Troisième partie.

(4) Montrer que presque sûrement $t\mapsto\frac{1}{|B_t|^\gamma}$ est intégrable sur $[0,1]$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

(5) Montrer que la convergence suivante a lieu en loi

$$\frac{1}{n^{1-\gamma/2}} \sum_{i=1, S_i \neq 0}^{n} \frac{1}{|S_i|^\gamma} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{\text{(loi)}} \quad \int_0^1 \frac{1}{|B_t|^\gamma} \mathrm{d}t.$$

(*) (Question Hors Barème) Que se passe-t-il pour $\gamma = 1$?

Corrigé :

(1) C'est une variante du principe des lois accompagnantes. On montre que pour tout fermé F

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(I_n \in F) \leq \mathbb{P}(I \in F). \tag{1}$$

D'après l'inégalité de Markov, pour $\eta > 0$ on a $\mathbb{P}(|I_n(\delta) - I_n| \geq \eta) \leq \frac{\delta}{\eta}$. Donc en notant F^η le η-voisinage fermé de F on a

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(I_n \in F) \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(I_n(\delta) \in F^\eta) + \frac{\delta}{\eta} \leq \mathbb{P}(I(\delta) \in F^\eta) + \frac{\delta}{\eta}$$

en vertu de la convergence en loi de $I_n(\delta)$ vers $I(\delta)$. En faisant $\delta \to 0$, puis $\eta \to 0$ on obtient le résultat voulu (1).

Autre solution. Alternativement, on peut utiliser la caractérisation de la convergence en loi via les fonctions lipschitziennes bornées (théorème de portemanteau).

(2) On applique le théorème de Fubini à $(\omega, t) \mapsto \mathbb{1}_{B_t = \delta}$:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^1 \mathbb{1}_{B_t=\delta} \mathrm{d}t\right] = \int_0^1 \mathbb{P}(B_t = \delta)\,\mathrm{d}t = 0,$$

donc p.s. $\int_0^1 \mathbb{1}_{B_t=\delta}\mathrm{d}t = 0$, ce qui donne le résultat.

(3) On écrit

$$\frac{1}{n^{1-\gamma/2}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|S_i|^\gamma} \mathbb{1}_{|S_i| > \delta\sqrt{n}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(|S_{\lfloor tn \rfloor}|/\sqrt{n})^\gamma} \mathbb{1}_{|S_{\lfloor tn \rfloor}|/\sqrt{n} > \delta}. \tag{2}$$

D'après le théorème de Donsker et d'après le théorème de représentation de Skorokhod on peut supposer que $(S_{nt}/\sqrt{n} : 0 \leq t \leq 1)$ converge presque sûrement vers $(B_t)_{0\leq t\leq 1}$ où S_t est défini par interpolation linéaire pour $t > 0$. Alors d'après (2) presque sûrement la mesure de Lebesgue de $\{t \in [0,1] : |B_t| = \delta\}$ est nulle. Il s'ensuit que presque sûrement, pour presque tout $t \in [0,1]$ on a

$$\frac{1}{(|S_{\lfloor tn \rfloor}|/\sqrt{n})^\gamma} \mathbb{1}_{|S_{\lfloor tn \rfloor}|/\sqrt{n} > \delta} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad \frac{1}{|B_t|^\gamma} \mathbb{1}_{|B_t| > \delta}$$

et le résultat s'ensuit par convergence dominée.

Remarque. Alternativement à (2), on peut montrer "à la main" que

$$\frac{1}{n^{1-\gamma/2}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|S_i|^\gamma} \mathbb{1}_{|S_i|>\delta\sqrt{n}} - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(|S_{tn}|/\sqrt{n})^\gamma} \mathbb{1}_{|S_{tn}|/\sqrt{n}>\delta} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(\mathbb{P})} \quad 0$$

(4) On montre que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^1 \frac{1}{|B_t|^\gamma} \mathrm{d}t\right] < \infty \tag{3}$$

ce qui impliquera que p.s. $\int_0^1 \frac{1}{|B_t|^\gamma} \mathrm{d}t < \infty$. D'après le théorème de Fubini et d'après la propriété de scaling du mouvement brownien,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^1 \frac{1}{|B_t|^\gamma} \mathrm{d}t\right] = \int_0^1 \mathbb{E}\left[\frac{1}{|B_t|^\gamma}\right] \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{t^{\gamma/2}} \mathrm{d}t \cdot \mathbb{E}\left[\frac{1}{|B_1|^\gamma}\right].$$

Puisque $\gamma/2 < 1$, il suffit de vérifier que $\mathbb{E}[1/|B_1|^\gamma] < \infty$. Pour cela, on écrit simplement

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{|B_1|^\gamma}\right] = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^\gamma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x < \infty$$

car $\gamma < 1$, et (3) s'ensuit.

(5) On pose

$$I_n = \frac{1}{n^{1-\gamma/2}} \sum_{i=1, S_i \neq 0}^{n} \frac{1}{|S_i|^\gamma}, \qquad I_n(\delta) = \frac{1}{n^{1-\gamma/2}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|S_i|^\gamma} \mathbb{1}_{|S_i|>\delta\sqrt{n}}$$

et

$$I = \int_0^1 \frac{1}{|B_t|^\gamma} \mathrm{d}t, \qquad I(\delta) = \int_0^1 \frac{1}{|B_t|^\gamma} \mathbb{1}_{|B_t|>\delta} \mathrm{d}t$$

et on vérifie qu'on peut appliquer (1).

Le point (i) découle par convergence monotone, le point (ii) provient de la question (3). Le point délicat est (ii). Pour cela, écrivons :

$$\mathbb{E}[|I_n(\delta) - I_n|] = \frac{1}{n^{1-\gamma/2}} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\frac{1}{|S_i|^\gamma} \mathbb{1}_{0<|S_i|\leq\delta\sqrt{n}}\right].$$

Par corollaire du théorème local limit, il existe une constante $C > 0$ telle que $\mathbb{P}(S_i = k) \leq \frac{C}{\sqrt{i}}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $i \geq 1$ (dans la suite, C est une constante universelle qui peut changer de ligne en ligne). Ainsi

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{|S_i|^\gamma} \mathbb{1}_{0<|S_i|\leq\delta\sqrt{n}}\right] = \sum_{k=1}^{\delta\sqrt{n}} \frac{1}{k^\gamma} \mathbb{P}(|S_i| = k) \leq C \sum_{k=1}^{\delta\sqrt{n}} \frac{1}{k^\gamma} \cdot \frac{1}{\sqrt{i}} \leq C \cdot \delta^{1-\gamma} \cdot n^{1/2-\gamma/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{i}}.$$

Donc

$$\frac{1}{n^{1-\gamma/2}} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\frac{1}{|S_i|^\gamma} \mathbb{1}_{0<|S_i|\leq\delta\sqrt{n}}\right] \leq C \frac{\delta^{1-\gamma} \cdot n^{1/2-\gamma/2}}{n^{1-\gamma/2}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq C \frac{\delta^{1-\gamma} \cdot n^{1/2-\gamma/2}}{n^{1-\gamma/2}} \cdot n^{1/2} \leq C\delta^{1-\gamma}.$$

Ceci démontre (c) (quitte à remplacement δ par une puissance de δ).

(∗) Dans ce cas $t \mapsto \frac{1}{B_t}$ n'est en fait pas intégrable sur $[0,1]$ (cela peut se voir en utilisant la notion de temps local).

$\square$

Fin