

## Feuille d'exercices (cours 1) : convergence étroite dans $\mathbb{R}^k$

On note  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^k)$  l'ensemble des mesures de probabilités sur  $\mathbb{R}^k$ , avec  $k \geq 1$  un entier fixé, et  $\Rightarrow$  désigne la convergence étroite dans cet espace.

### 1 Exercices à chercher pour le mardi 26 septembre

Ces exercices seront corrigés au début de la séance du mardi 26 septembre

**Exercice 1.** Soit  $(\mu_n)_{n \geq 1}$  une suite de mesures de  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  et  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ . On suppose que  $\mu_n \Rightarrow \mu$ . Y a-t-il des implications entre les assertions suivantes ?

- |  |   |
|--|---|
| (a) $\mu_n$ est à densité pour $n$ assez grand | (c) $\mu_n$ est atomique pour $n$ assez grand |
| (b) $\mu$ est à densité                        | (d) $\mu$ est atomique.                       |

Rappelons qu'une mesure atomique est une mesure qui s'écrit  $\sum a_i \delta_{b_i}$  pour des suites  $a_i \in \mathbb{R}_+$  et  $b_i \in \mathbb{R}$  et que dans  $\mathbb{R}^n$  par mesure à densité on entend par rapport à la mesure de Lebesgue (l'usage est juste de dire à densité).

**Exercice 2.** Montrer qu'une famille  $(\mu_i)_{i \in I}$  de mesures de  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  est tendue si et seulement si il existe une fonction mesurable  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  telle que  $f(x) \rightarrow \infty$  pour  $|x| \rightarrow \infty$  et  $\sup_{i \in I} \int_{\mathbb{R}} f d\mu_i < \infty$ .

### 2 Exercices additionnels (facultatif)

**Exercice 3.** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  des variables aléatoires réelles. Montrer que la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  est tendue si et seulement si pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour toute suite  $(c_n)_{n \geq 1}$  de réels strictement positifs telle que  $c_n \rightarrow 0$  on a  $\mathbb{P}(c_n |X_n| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ .

**Exercice 4.** – (Théorème de Riesz et lemme de Scheffé) – Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré, avec  $\mu$  une mesure positive (pas forcément finie). Soit  $(f_n)_{n \geq 1}$  une suite de fonctions mesurables de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  telles que :

$$f_n \rightarrow f \quad \mu - \text{presque partout.} \tag{1}$$

- (1) On suppose que la convergence (1) a lieu, que pour tout  $n \geq 1$ ,  $f_n \in L^p(\mu)$ ,  $f \in L^p(\mu)$  et  $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Démontrer que  $f_n \rightarrow f$  dans  $L^p(\mu)$  (théorème de Riesz).

On pourra introduire la fonction  $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$ .

- (2) Montrer le lemme de Scheffé :

$$\text{si (1), } f_n \text{ et } f \text{ sont } \mu \text{ intégrables, } f_n \geq 0 \text{ et } \int_E f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_E f d\mu$$

$$\text{alors } \int_E |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- (3) Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires positives qui converge presque sûrement vers  $X$ . On suppose que  $\mathbb{E}[X_n] \rightarrow \mathbb{E}[X]$ . Montrer que  $X_n$  converge vers  $X$  dans  $L^1$ .
- (4) Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  des variables aléatoires réelles telles que pour tout  $n \geq 1$ ,  $X_n$  a pour loi  $f_n d\mu$  (i.e. sa loi a une densité  $f_n$  par rapport à  $\mu$ ). Montrer que si  $f_n$  converge  $\mu$ -presque partout vers une densité de probabilité  $f$ , alors  $X_n \Rightarrow X$ , où  $X$  est une variable aléatoire de loi  $f d\mu$ .

**Exercice 5.** – (*Transformée de Laplace*) – Soit  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$ . Sa transformée de Laplace est définie par l'intégrale  $L_\mu(t) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tx} \mu(dx)$  pour  $t \geq 0$ .

- (1) Vérifier que  $L_\mu$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]0, \infty[$ .
- (2) Montrer que pour tout  $x > 0$  on a

$$\mu([0, x[) + \frac{1}{2}\mu(\{x\}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\lfloor tx \rfloor} \frac{(-t)^k}{k!} L_\mu^{(k)}(t),$$

où  $L_\mu^{(k)}$  désigne la dérivée  $k$ -ième de  $L_\mu$ . En déduire que si  $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$  ont même transformée de Laplace, alors  $\mu = \nu$ .

- (3) Soit  $(\mu_n)_{n \geq 1}$  une suite de mesures de  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$ . On suppose que  $L_{\mu_n}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$  vers une fonction  $L$  continue à droite en 0. Montrer qu'il existe  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$  telle que  $L = L_\mu$  et  $\mu_n \Rightarrow \mu$ .

*On pourra s'inspirer de la preuve du théorème de Lévy.*

**Exercice 6.** Soit  $(\mu_n)_{n \geq 1}$  une suite de mesures de  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  et  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ .

- (1) On suppose que  $(\mu_n)_{n \geq 1}$  est tendue. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall n \geq 1, \quad |x - y| \leq \delta \implies |\phi_{\mu_n}(x) - \phi_{\mu_n}(y)| \leq \varepsilon.$$

(en d'autres termes, la suite  $(\phi_{\mu_n})_{n \geq 1}$  est uniformément équicontinue).

- (2) On suppose que  $\mu_n \Rightarrow \mu$ . Montrer que  $\phi_{\mu_n}$  converge vers  $\phi_\mu$  uniformément sur tout compact. Donner un exemple où la convergence n'est pas uniforme.
- (3) La réciproque de l'énoncé de la première question est-elle vraie, autrement dit est-ce que si la suite  $(\phi_{\mu_n})_{n \geq 1}$  est uniformément équicontinue alors la suite  $(\mu_n)_{n \geq 1}$  est tendue ?

**Exercice 7.** Soit  $(\mu_n)_{n \geq 1}$  une suite de mesures de  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  et  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  sans atomes. Montrer que  $\mu_n \Rightarrow \mu$  si et seulement si  $\sup_{s \in \mathbb{R}} |F_{\mu_n}(s) - F_\mu(s)| \rightarrow 0$ .

**Exercice 8.** – (*Théorème de Glivenko-Cantelli*) – Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi  $\mu$ . On considère  $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{X_i}$  la mesure empirique de ces variables aléatoires. On note  $F_n$  la fonction de répartition de  $\mu_n$  et  $F$  celle de  $\mu$ . Le but de cet exercice est de le théorème de Glivenko-Cantelli :

$$\text{presque sûrement,} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in \mathbb{R}} |F_n(s) - F(s)| = 0. \quad (\star)$$

(1) Montrer (★) lorsque  $\mu$  est la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

Pour  $0 \leq x \leq 1$ , on pose  $G(x) = \inf\{s \in \mathbb{R} : F(s) \geq x\}$  (appelé inverse généralisé de  $F$ ). Il est possible de vérifier que  $G$  est croissante, continue à gauche en tout point. Soit  $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$  des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

(2) (a) Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et  $x \in [0, 1]$  on a

$$F(t) \geq x \iff t \geq G(x). \quad (2)$$

(b) Montrer que  $(G(Y_i))_{1 \leq i \leq n}$  sont des variables indépendantes de même loi  $\mu$ .

(c) Montrer que  $F_n$  et  $A_n \circ F$  ont même loi, où  $A_n$  est la fonction de répartition empirique des  $Y_1, \dots, Y_n$ .

(3) En déduire (★).

**Exercice 9.** – (*Caractérisation des fonctions de répartition dans  $\mathbb{R}^k$* ) – Pour  $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$  et  $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$  on note  $x \leq y$  si  $x_i \leq y_i$  pour tout  $1 \leq i \leq k$ . Soit  $F : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, 1]$  une fonction. On dit qu'elle est *continue à droite* si  $F(x^n) \rightarrow F(x)$  lorsque  $x^n \downarrow x$ . On dit qu'elle est *propre* si  $F(x) \rightarrow 1$  lorsque  $\min_i x_i \rightarrow \infty$  et  $F(x) \rightarrow 0$  lorsque  $\min_i x_i \rightarrow 0$ . On dit qu'elle est une *fonction de répartition* s'il existe une mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^k)$  telle que  $F(x) = \mu(\{y \in \mathbb{R}^k : y \leq x\})$ .

(1) Donner un exemple de fonction  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$  continue à droite, propre, croissante en chacune de ses variables et qui n'est pas une fonction de répartition.

On dit que  $F$  est à *accroissements positifs* si pour tout pavé  $]x, y[ = ]x_1, y_1[ \times \dots \times ]x_k, y_k[$  on a  $F(]x, y[) := \sum_u s(u)F(u) \geq 0$ , où la somme est prise sur tous les coins  $u$  de  $]x, y[$  et  $s(u) = (-1)^p$  avec  $p = \sum_{i=1}^k \mathbb{1}_{u_i=y_i}$ .

(2) Montrer que  $F : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, 1]$  est une fonction de répartition si et seulement si elle est continue à droite, propre, et est à accroissements positifs.

*Pour une preuve probabiliste de la réciproque, on pourra justifier l'existence pour tout  $n \geq 1$  de mesures de probabilité  $\mu_n$  à support dans  $(2^{-n}\mathbb{Z})^k$  telles que  $\mu_n(x/2^n) = F(]2^{-n}(x-1), 2^{-n}x])$  pour  $x \in \mathbb{Z}^k$ , et de variables aléatoires  $(X^n)_{n \geq 1}$  telles que  $X^n$  soit de loi  $\mu_n$  et  $X^m - 2^{-m} < X^n \leq X^m$  pour tout  $m < n$ , et enfin considérer  $X = \lim_{n \rightarrow \infty} X^n$ .*

**Exercice 10.** Soit  $(E, d)$  un espace métrique muni de sa tribu borélienne et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de  $f$  est mesurable.

*Indication.* Pour  $\varepsilon, \delta > 0$ , on pourra vérifier que  $U_{\varepsilon, \delta} := \{x \in E : \exists y, z \in B(x, \varepsilon), |f(y) - f(z)| > \delta\}$  est ouvert.