

Feuille d'exercices (cours 2) :

modes de convergence, uniforme intégrabilité, porte-manteau, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

1 Exercice à chercher pour le mardi 3 octobre

Cet exercice sera corrigé au début de la séance du mardi 3 octobre

Exercice 1. – (*Méthode des moments*) – Soit X une variable aléatoire réelle admettant des moments de tout ordre. On suppose que la loi de X est caractérisée par ses moments, c'est-à-dire que si Y est une variable aléatoire admettant des moments de tout ordre vérifie $\mathbb{E}[X^k] = \mathbb{E}[Y^k]$ pour tout entier $k \geq 1$, alors X et Y ont même loi.

- (1) Soit $(Z_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles uniformément intégrables qui converge en loi vers Z . Montrer que $\mathbb{E}[Z_n] \rightarrow \mathbb{E}[Z]$.
- (2) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles admettant des moments de tout ordre. On suppose que pour tout entier $k \geq 1$, $\mathbb{E}[X_n^k] \rightarrow \mathbb{E}[X^k]$. Montrer que $X_n \Rightarrow X$.

Remarque. Voir l'exercice 10 pour des conditions suffisantes pour qu'une variable aléatoire soit caractérisée par ses moments.

Corrigé :

- (1) *Première façon.* D'après le théorème de représentation de Skorokhod (exercice 9), puisque le caractère uniformément intégrable ne dépend que des lois individuelles, on peut supposer que la convergence $Z_n \rightarrow Z$ a lieu presque sûrement (et a fortiori en probabilité). D'après un résultat du deuxième cours, cette convergence a aussi lieu dans L^1 , ce qui donne le résultat.

Deuxième façon. On applique un argument de troncature. Soit $K \geq 0$. On définit $h_K(x) = x$ si $|x| \leq K$, $h_K(x) = K$ si $x > K$ et $h_K(x) = -K$ si $x < -K$, de sorte que h_K est continue et bornée par K . La convergence en loi $Z_n \Rightarrow Z$ implique

$$\mathbb{E}[h_K(Z_n)] \rightarrow \mathbb{E}[h_K(Z)].$$

Par ailleurs, comme $|x - h_K(x)| \leq |x| \mathbf{1}_{\{|x| > K\}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[Z_n - Z]| &\leq \mathbb{E}[|Z_n - h_K(Z_n)|] + |\mathbb{E}[h_K(Z_n) - h_K(Z)]| + \mathbb{E}[|h_K(Z) - Z|] \\ &\leq \mathbb{E}[|Z_n| \mathbf{1}_{\{|Z_n| > K\}}] + o(1) + \mathbb{E}[|Z| \mathbf{1}_{\{|Z| > K\}}]. \end{aligned}$$

Combiné avec l'uniforme intégrabilité de $(Z_n^k)_{n \geq 1}$, ceci entraîne que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{E}[Z_n - Z]| \leq \limsup_{K \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|Z| \mathbf{1}_{\{|Z| > K\}}].$$

Vérifions que Z est intégrable.

Première façon. On a

$$E[|Z|] = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(|Z| \geq u) du.$$

Or, par convergence en loi, pour presque tout u par rapport à la mesure de Lebesgue on a $\mathbb{P}(|Z_n| \geq u) \rightarrow \mathbb{P}(|Z| \geq u)$. Ainsi, d'après le lemme de Fatou :

$$\int_0^{\infty} \mathbb{P}(|Z| \geq u) du \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \mathbb{P}(|Z_n| \geq u) du = \liminf_{n \rightarrow \infty} E[|Z_n|] < \infty,$$

ce qui montre que Z est intégrable.

Deuxième façon. On écrit

$$\mathbb{E}[h_K(|Z|)] \leq \mathbb{E}[h_K(|Z|) - h_K(|Z_n|)] + \mathbb{E}[h_K(|Z_n|)] \leq \mathbb{E}[h_K(|Z|) - h_K(|Z_n|)] + \mathbb{E}[|Z_n|] + E[|Z_n| \mathbf{1}_{\{|Z_n| > K\}}].$$

En prenant la lim inf lorsque $n \rightarrow \infty$ puis en faisant $K \rightarrow \infty$, on conclut par uniforme intégrabilité et convergence monotone que $\mathbb{E}[|Z|] < \infty$.

(2) On montre la tension puis l'unicité de la limite.

Première étape : tension. Puisque $(\mathbb{E}[X_n^2])_{n \geq 2}$ converge, la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est tendue.

Seconde étape : unicité de la limite. Soit ϕ une extraction et Y une variable aléatoire telle que $X_{\phi(n)} \Rightarrow Y$. Soit $k \geq 1$ un entier. Puisque $(\mathbb{E}[(X_{\phi(n)})^{2k}])_{n \geq 1}$ converge, $(X_{\phi(n)}^k)_{n \geq 1}$ est uniformément intégrable. Vérifions que

$$\mathbb{E}[|Y|^k] < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[X_{\phi(n)}^k] \rightarrow \mathbb{E}[Y^k]. \quad (1)$$

Le lemme implique (1), et on obtient $\mathbb{E}[X^k] = \mathbb{E}[Y^k]$. Puisque X est caractérisée par ses moments, on en déduit que X et Y ont la même loi, ce qui conclut. □

2 Exercices à chercher

Exercice 2. Soit (E, d) un espace métrique et X, X_1, X_2, \dots des variables aléatoires à valeurs dans E . Montrer que si $X_n \rightarrow X$ presque sûrement ou en probabilité, alors $X_n \Rightarrow X$.

Corrigé :

Si $X_n \rightarrow X$ presque sûrement, et si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue bornée, alors $f(X_n) \rightarrow f(X)$ presque sûrement et puisque $|f(X_n)| \leq \|f\|_{\infty} < \infty$, le théorème de convergence dominée implique $\mathbb{E}[f(X_n)] \rightarrow \mathbb{E}[f(X)]$.

Si $X_n \rightarrow X$ en probabilité, soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\mathbb{E}[f(X_n)] \not\rightarrow \mathbb{E}[f(X)]$. Il existe alors $\epsilon > 0$ et une extraction ϕ telle que $|\mathbb{E}[f(X_{\phi(n)})] - \mathbb{E}[f(X)]| \geq \epsilon$ pour tout $n \geq 1$. Or $X_{\phi(n)}$ converge en probabilité vers X , il existe donc une extraction ψ telle que $X_{\phi(\psi(n))} \rightarrow X$ presque sûrement. Alors $f(X_{\phi(\psi(n))}) \rightarrow f(X)$ en loi et donc $\mathbb{E}[f(X_{\phi(\psi(n))})] \rightarrow \mathbb{E}[f(X)]$, absurde. □

Exercice 3. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombre réels et $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ tels que $\delta_{x_n} \Rightarrow \mu$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mu = \delta_x$.

Corrigé :

Tout d'abord, la suite (x_n) est bornée. En effet, sinon, il existe une extraction ϕ telle que $|x_{\phi(n)}| \rightarrow \infty$. Par portemanteau, pour tout $A > 0$, on a alors $0 = \liminf_{n \rightarrow \infty} \delta_{x_{\phi(n)}}(]-A, A[) \geq \mu(]-A, A[)$ et donc $\mu(]-A, A[) = 0$ pour tout $A > 0$, absurde.

Vérifions que (x_n) a une seule valeur d'adhérence. Si $x_{\phi(n)} \rightarrow x$, alors par portemanteau pour tout $\epsilon > 0$, $1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \delta_{x_{\phi(n)}}([x - \epsilon, x + \epsilon[) \leq \mu([x - \epsilon, x + \epsilon[)$. Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit que $\mu(\{x\}) = 1$. Puisqu'il ne peut pas y avoir $x \neq y$ tels que $\mu(\{x\}) = \mu(\{y\}) = 1$, ceci montre que $\mu = \delta_x$ où x est l'unique valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \geq 1}$. \square

3 Exercices additionnels (facultatif)

Exercice 4. Soit (E, d) un espace métrique, $x \in E$ un élément fixe et $(X_n)_{n \geq 1}$ des variables aléatoires à valeurs dans E . Montrer que $X_n \Rightarrow x$ si et seulement si $X_n \rightarrow x$ en probabilité.

Corrigé :

\Leftarrow C'est une conséquence de l'exercice 2.

\Rightarrow Pour $\epsilon > 0$, en notant $B(x, \epsilon)$ la boule ouverte centrée en x de rayon ϵ , de sorte que son complémentaire est fermé, par porte-manteau :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \notin B(x, \epsilon)) \leq \mathbb{P}(x \notin B(x, \epsilon)) = 0.$$

Donc pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}(d(X_n, x) \geq \epsilon) \rightarrow 0$, donc $X_n \rightarrow x$ en probabilité. \square

Exercice 5. – (*Lemme de Slutsky*) – Soient E et F deux espaces métriques séparables, $y \in F$ un élément fixé, X, X_1, X_2, \dots et $(Y_i)_{i \geq 1}$ des variables aléatoires à valeurs dans respectivement E et F telles que $X_n \Rightarrow X$ et $Y_n \Rightarrow y$. Montrer que $(X_n, Y_n) \Rightarrow (X, y)$.

Corrigé :

Par hypothèse, $(X_n, y) \Rightarrow (X, y)$. En notant $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_E(x_1, x_2) + d_F(y_1, y_2)$, par hypothèse $d((X_n, y), (X_n, Y_n)) = d_F(Y_n, y) \rightarrow 0$ en probabilité. Il s'ensuit que $(X_n, Y_n) \Rightarrow (X, y)$ d'après un résultat du cours. \square

Exercice 6. – (*Produits dénombrables d'espaces métriques*) – Soit $((E_i, d_i))_{i \geq 1}$ une suite d'espaces métriques séparables. On pose $E = E_1 \times E_2 \times \dots$ et

$$\forall x = (x_i)_{i \geq 1}, y = (y_i)_{i \geq 1} \in E, \quad d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}.$$

(1) Montrer que (E, d) est séparable.

- (2) Montrer qu'une suite $(x^n)_{n \geq 1} \in E$ converge vers $x \in E$ si et seulement si pour tout $k \geq 1$, $x_k^n \rightarrow x_k$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
- (3) Montrer que (E, d) est complet si tous les E_i le sont.
- (4) Montrer que (E, d) est compact si tous les E_i le sont.

Corrigé :

Tout d'abord, on vérifie sans difficultés que d est une distance et que pour tous $N \geq 1, x, y \in E$,

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x, y)}{1 + d_n(x, y)} \leq \frac{1}{2^{N-1}}.$$

- (1) Soit D_i un ensemble dénombrable dense de E_i et $a_i \in E_i$ un élément fixé de E_i . On note D l'ensemble des suites qui s'écrivent sous la forme $(x_1, \dots, x_K, a_{K+1}, \dots)$ avec $K \geq 1$ un entier, $x_1, \dots, x_K \in D_K$. Soit $\varepsilon > 0$ et $y = (y_1, y_2, \dots) \in E$. On choisit N tel que $1/2^{N-1} < \varepsilon$ et un élément $x = (x_1, \dots, x_N, a_{N+1}, \dots) \in D$ tel que $d_i(x_i, y_i) \leq \varepsilon/N$ pour tout $1 \leq i \leq N$. On a alors $d(x, y) \leq 2\varepsilon$.
- (2) \implies Cette implication provient immédiatement du fait que si $x = (x_1, x_2, \dots)$ et $y = (y_1, y_2, \dots)$, alors $d_i(x_i, y_i) \leq d(x, y)$.
- \impliedby Supposons que $x_k^n \rightarrow x_k$ pour tout $k \geq 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$. On choisit N tel que $1/2^{N-1} < \varepsilon$ et un entier n_0 tel que $n \geq n_0$ implique $d_i(x_i^n, x_i) \leq \varepsilon/N$ pour tout $1 \leq i \leq N$. Alors $d(x^n, x) \leq 2\varepsilon$ pour $n \geq n_0$.
- (3) Soit $(x^n)_{n \geq 1}$ une suite de Cauchy de (E, d) . Alors pour tout $k \geq i$, $(x_i^n)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy dans (E_i, d_i) , donc converge vers un élément noté x_i . On en déduit que $x^n \rightarrow (x_1, x_2, \dots)$ d'après la question précédente.
- (4) Soit $(x^n)_{n \geq 1}$ une suite de (E, d) . Pour $i \geq 1$, chaque suite $(x_i^n)_{n \geq 1}$ étant à valeurs dans E_i , elle admet une valeur d'adhérence. Par procédé diagonal, il existe une extraction ϕ telle que $(x_i^{\phi(n)})_{n \geq 1}$ converge pour tout $i \geq 1$ vers une valeur notée x_i . D'après la question (1), on en déduit que $x^{\phi(n)} \rightarrow (x_1, x_2, \dots)$.

□

Exercice 7. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi.

- (1) Montrer que si $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$, la suite $(\max(X_1, \dots, X_n)/n)_{n \geq 2}$ est uniformément intégrable.
- (2) La réciproque est-elle vraie ?

Corrigé :

- (1) Si $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$, on écrit

$$\left| \frac{\max(X_1, \dots, X_n)}{n} \right| \leq \frac{\sum_{k=1}^n |X_k|}{n}.$$

D'après la loi des grands nombres, la suite $\frac{\sum_{k=1}^n |X_k|}{n}$ converge dans L^1 vers $\mathbb{E}[|X_1|]$. Elle est

donc uniformément intégrable, ce qui implique que la suite $(\frac{\max(X_1, \dots, X_n)}{n})_{n \geq 1}$ est uniformément intégrable.

- (2) Oui, si les variables aléatoires sont positives : le cas échéant, $0 \leq X_1/2 \leq \max(X_1, X_2)/2$ et donc $\mathbb{E}[X_1] < \infty$.

Non en général : par exemple, en prenant X_1 une variable aléatoire qui a pour densité $\frac{1}{|x|^2} \mathbb{1}_{x \leq -1}$, on voit que $\max(X_1, \dots, X_n)$ a pour densité $\frac{n}{|x|^{n+1}} \mathbb{1}_{x \leq -1}$, de sorte que

$$\mathbb{E} \left[\left| \frac{\max(X_1, \dots, X_n)}{n} \right|^{3/2} \right] = \frac{1}{n^{3/2}} \int_1^\infty \frac{nx^{3/2}}{x^{n+1}} dx = \frac{1}{n^{3/2}} \frac{2n}{2n-3}.$$

La suite $(\frac{\max(X_1, \dots, X_n)}{n})_{n \geq 2}$ étant bornée dans $L^{3/2}$, elle est uniformément intégrable, bien que X_1 ne soit pas intégrable. □

Exercice 8. – (*Un exemple d'espace métrique non séparable*) – Montrer que $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues bornées de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , muni de la norme uniforme n'est pas séparable.

Corrigé :

Considérons le sous-ensemble K de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ constitué des fonctions qui valent 0 ou 1 sur \mathbb{Z} . L'ensemble K est alors non dénombrable, et pour $f, g \in K$ on a $\|f - g\|_\infty \geq 1$. On en déduit que les boules ouvertes $(B(f, 1/2))_{f \in K}$ sont disjointes, et donc $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ n'est pas séparable (car si on considère une suite, il existe une telle boule ouverte ne comportant pas d'éléments de cette suite). □

Exercice 9. – (*Théorème de représentation de Skorokhod pour \mathbb{R}*) – Soit X une variable aléatoire réelle. On note F sa fonction de répartition et on pose, pour $0 \leq u \leq 1$, $F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}$. On rappelle (cf feuille d'exercices 1) que $F^{-1}(u) \leq x \iff u \leq F(x)$. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge en loi vers X .

- (1) Vérifier que F^{-1} est une fonction croissante continue à gauche de $]0, 1[$ dans \mathbb{R} .
 (2) Montrer que pour tout $u \in]0, 1[$, on a

$$F^{-1}(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n^{-1}(u) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n^{-1}(u) \leq F^{-1}(u+),$$

où $F^{-1}(u+)$ est la limite à droite de F^{-1} en u .

- (3) En déduire que si X, X_1, X_2, \dots sont des variables aléatoires réelles telles que $X_n \Rightarrow X$, il existe un espace de probabilité et des variables aléatoires X', X'_1, X'_2, \dots définies dessus telles que $X \stackrel{\text{loi}}{=} X'$, $X_i \stackrel{\text{loi}}{=} X'_i$ pour tout $i \geq 1$ et X'_n converge presque sûrement vers X' lorsque $n \rightarrow \infty$.

Corrigé :

- (1) Pour la croissance de F^{-1} , si $u < v$ et si $F(x) \geq v$, on a alors $F(x) \geq u$, de sorte que $F^{-1}(u) \leq x$, et en passant à l'inf sur x on obtient $F^{-1}(u) \leq F^{-1}(v)$.

Pour le caractère continu à gauche, supposons que $u_n \uparrow u$ mais que $F^{-1}(u_n) \not\rightarrow F^{-1}(u)$. Il

existe alors $\varepsilon > 0$ tel que $F^{-1}(u_n) \leq F^{-1}(u) - \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$. Donc $u_n \leq F(F^{-1}(u) - \varepsilon)$. En passant à la limite, $u \leq F(F^{-1}(u) - \varepsilon)$ et donc $F^{-1}(u) \leq F^{-1}(u) - \varepsilon$, absurde.

(2) Soit $0 \leq u \leq 1$.

Pour montrer que $\limsup_{n \rightarrow \infty} F_n^{-1}(u) \leq F^{-1}(u+)$, il suffit de vérifier que

$$F(x) \geq u + \varepsilon \implies \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n^{-1}(u) \leq x.$$

On montre la contraposée : supposons qu'il existe une extraction ϕ et $\eta > 0$ tels que $x + \eta \leq F_{\phi(n)}^{-1}(u)$ pour n assez grand. On choisit un point $x_0 \in [x, x + \eta[$ en lequel F est continu. Alors $F_{\phi(n)}(x_0) < u$ pour n assez grand, et donc par convergence en loi de X_n vers X on en déduit que $F(x) \leq F(x_0) \leq u < u + \varepsilon$.

Pour montrer que $F^{-1}(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n^{-1}(u)$, considérons $x > \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n^{-1}(u)$ un point de continuité de F . Il existe alors une extraction ϕ telle que $x \geq F_{\phi(n)}^{-1}(u)$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi, $F_{\phi(n)}(x) \geq u$ et en passant à la limite on obtient $F(x) \geq u$, et donc $x \geq F^{-1}(u)$. Ceci montre que $F^{-1}(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n^{-1}(u)$.

(3) Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$. On pose $X' = F^{-1}(U)$ et $X'_n = F_n^{-1}(U)$. D'après la feuille d'exercices 1, $X \stackrel{\text{loi}}{=} X'$ et $X_i \stackrel{\text{loi}}{=} X'_i$ pour tout $i \geq 1$. D'après la question précédente, $X'_n(\omega) \rightarrow X'(\omega)$ si F^{-1} est continue en $U(\omega)$. Puisque F^{-1} a un nombre au plus dénombrable de discontinuités, il s'ensuit que F^{-1} est presque sûrement continue en U et le résultat désiré en découle.

□

Exercice 10. Soit X une variable aléatoire réelle admettant des moments de tout ordre. On pose $m_k = \mathbb{E}[X^k]$, $M_k = \mathbb{E}[|X|^k]$ pour $k \geq 1$ et $\phi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$ pour $t \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que le rayon de convergence de $\mathbb{E}[e^{zX}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k z^k}{k!}$ est non nul si et seulement si le rayon de convergence de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k z^k}{k!}$ est non nul.

On suppose dans la suite que ces rayons de convergence sont non nuls et on note R le rayon de convergence de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k z^k}{k!}$.

(2) Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\left| e^{ih} - \sum_{k=0}^K \frac{(ih)^k}{k!} \right| \leq \frac{|h|^{K+1}}{(K+1)!}.$$

(3) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $|h| < R$ on a le développement en série entière $\phi(t+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi^{(k)}(t)}{k!} h^k$.

(4) En déduire que la loi de X est caractérisée par ses moments.

Corrigé :

(1) L'implication $\boxed{\Leftarrow}$ est claire car $|m_k| \leq M_k$. Pour l'implication $\boxed{\Rightarrow}$, l'idée est de montrer que

les rayons de convergence de

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{\infty} \frac{M_k z^k}{k!} \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{\infty} \frac{M_k z^k}{k!}$$

sont non nuls. Pour le premier, ceci provient du fait que $m_k = M_k$ pour k pair, et pour le second de l'inégalité $|x|^{2j-1} \leq 1 + x^{2j}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $j \geq 1$.

(2) La formule de Taylor reste intégral donne pour $h \in \mathbb{R}$ et $K \geq 1$:

$$e^{ih} = \sum_{k=0}^K \frac{(ih)^k}{k!} + \frac{(ih)^{K+1}}{K!} \int_0^1 (1-u)^K e^{iuh} du,$$

de sorte que

$$\left| e^{ih} - \sum_{k=0}^K \frac{(ih)^k}{k!} \right| \leq \frac{|h|^{K+1}}{K!} \int_0^1 (1-u)^K du = \frac{|h|^{K+1}}{(K+1)!}.$$

(3) D'après la question précédente, on peut écrire

$$e^{i(t+h)x} = \sum_{k=0}^K \frac{(ihx)^k}{k!} e^{itx} + R_K(x, h)$$

avec $|R_K(x, h)| \leq \frac{|hx|^{K+1}}{(K+1)!}$. En particulier,

$$\phi(t+h) = \sum_{k=0}^K \frac{\mathbb{E}[(iX)^k e^{itX}]}{k!} h^k + \mathbb{E}[R_K(X, h)]$$

Or $\phi^{(k)}(t) = \mathbb{E}[(iX)^k e^{itX}]$, et par définition de R , si $|h| < R$, $\frac{|h|^{K+1} M_{K+1}}{(K+1)!} \rightarrow 0$, et le résultat s'ensuit.

(4) Puisque ϕ caractérise la loi de X , il suffit de montrer que ϕ s'exprime à partir des moments de X . D'après la question précédente, en prenant $t = 0$, ϕ s'exprime en fonction des moments de X sur $] -R, R[$. Puis, en redéveloppant en série entière autour de points proches de R et de $-R$, on en déduit que ϕ s'exprime en fonction des moments de X sur $] -2R, 2R[$, et ensuite sur $] -nR, nR[$ pour tout $n \geq 1$ par récurrence, d'où le résultat.

Remarque. Il est possible de trouver des variables aléatoires X et Y , admettant des moments de tout ordre, telles que $\mathbb{E}[X^k] = \mathbb{E}[Y^k]$ pour tout $k \geq 1$ mais telles que leurs lois ne sont pas les mêmes. Un exemple explicite est donné par les densités

$$\frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln x^2}{2}\right) \mathbb{1}_{x>0} \quad \text{et} \quad (1 + \sin(2\pi \ln x)) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln x^2}{2}\right) \mathbb{1}_{x>0}.$$

□

Exercice 11. Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{I}}$ une famille de variables aléatoires uniformément intégrables. En reprenant la

construction de la fonction croissante $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\phi(x)}{x} = \infty$ et $\sup_{i \in I} \mathbb{E}[\phi(|X_i|)] < \infty$ (preuve du critère de de la Vallée Poussin), vérifier que ϕ peut être choisie de sorte que pour tout $x \geq 1$, $\phi'(2x) \leq 2\phi'(x)$, puis que ϕ peut être choisie de sorte que $\phi(x) \leq x^2$ pour $x \geq 1$.

Corrigé :

Rappelons que ϕ a été construit en posant

$$\phi(x) = \sum_{m \geq 1} (x - x_m)_+$$

avec $(x_m)_{m \geq 1}$ une suite strictement croissante telle que $\sup_{i \in I} \mathbb{E} \left[|X_i| \mathbb{1}_{|X_i| \geq x_m} \right] \leq 2^{-m}$.

Remarquons que ϕ est dérivable sauf en un nombre dénombrable de points, et alors

$$\phi'(x) = \#\{m \geq 1 : x_m \leq x\}.$$

En particulier,

$$\phi'(2x) = \phi'(x) + \#\{m \geq 1 : x < x_m \leq 2x\}$$

Ainsi, en prenant $x_1 = 1/2$ et en choisissant les (x_m) de sorte que $x_{m+1} > 2x_m$, on obtient pour $x \geq 1/2$:

$$\phi'(2x) \leq \phi'(x) + 1 \leq 2\phi'(x).$$

Ainsi, pour $x \geq 1$,

$$\phi(x) \leq \int_0^x 2\phi'(u/2) du = 4\phi(x/2).$$

En posant $k = \lceil \log_2(x) \rceil$, on obtient

$$\phi(x) \leq 4^k \phi\left(\frac{x}{2^k}\right) \leq 4^{1+\ln(x)/\ln(2)} \phi(1) \leq Cx^2$$

avec $C = 4\phi(1)$. Le résultat s'ensuit en prenant $\phi/(4\phi(1))$. □