 Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Feuille d'exercices (cours 2) : modes de convergence, uniforme intégrabilité, porte-manteau, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

1 Exercice à chercher pour le mardi 3 octobre

Cet exercice sera corrigé au début de la séance du mardi 3 octobre

Exercice 1. – *(Méthode des moments)* – Soit X une variable aléatoire réelle admettant des moments de tout ordre. On suppose que la loi de X est *caractérisée par ses moments*, c'est-à-dire que si Y est une variable aléatoire admettant des moments de tout ordre vérifie $\mathbb{E}[X^k] = \mathbb{E}[Y^k]$ pour tout entier $k \geq 1$, alors X et Y ont même loi.

(1) Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles uniformément intégrables qui converge en loi vers Z. Montrer que $\mathbb{E}[Z_n] \to \mathbb{E}[Z]$.

(2) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles admettant des moments de tout ordre. On suppose que pour tout entier $k \geq 1$, $\mathbb{E}\left[X_n^k\right] \to \mathbb{E}\left[X^k\right]$. Montrer que $X_n \Rightarrow X$.

Remarque. Voir l'exercice 10 pour des conditions suffisantes pour qu'une variable aléatoire soit caractérisée par ses moments.

2 Exercices à chercher

Exercice 2. Soit (E,d) un espace métrique et $X, X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires à valeurs dans E. Montrer que si $X_n \to X$ presque sûrement ou en probabilité, alors $X_n \Rightarrow X$.

Exercice 3. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombre réels et $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ tels que $\delta_{x_n} \Rightarrow \mu$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mu = \delta_x$.

3 Exercices additionnels (facultatif)

Exercice 4. Soit (E,d) un espace métrique, $x \in E$ un élément fixe et $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires à valeurs dans E. Montrer que $X_n \Rightarrow x$ si et seulement si $X_n \to x$ en probabilité.

Exercice 5. – *(Lemme de Slutsky)* – Soient E et F deux espaces métriques séparables, $y \in F$ un élement fixé, $X, X_1, X_2, \ldots$ et $(Y_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires à valeurs dans respectivement E et F telles que $X_n \Rightarrow X$ et $Y_n \Rightarrow y$. Montrer que $(X_n, Y_n) \Rightarrow (X, y)$.

Exercice 6. – *(Produits dénombrables d'espaces métriques)* – Soit $((E_i, d_i))_{i\geq 1}$ une suite d'espaces métriques séparables. On pose $E = E_1 \times E_2 \times \cdots$ et

$$\forall x = (x_i)_{i\geq 1}, y = (y_i)_{i\geq 1} \in E, \qquad d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}.$$

(1) Montrer que (E,d) est séparable.

(2) Montrer qu'une suite $(x^n)_{n\geq 1} \in E$ converge vers $x \in E$ si et seulement si pour tout $k \geq 1$, $x_k^n \to x_k$ lorsque $n \to \infty$.

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

(3) Montrer que (E,d) est complet si tous les E_i le sont.

(4) Montrer que (E,d) est compact si tous les E_i le sont.

Exercice 7. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi.

(1) Montrer que si $\mathbb{E}[|X_1|]<\infty$, la suite $(\max(X_1,\ldots,X_n)/n)_{n\geq 2}$ est uniformément intégrable.

(2) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 8. – (Un exemple d'espace métrique non séparable) – Montrer que $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme n'est pas séparable.

Exercice 9. – (Théorème de représentation de Skorokhod pour $\mathbb{R}$) – Soit X une variable aléatoire réelle. On note F sa fonction de répartition et on pose, pour $0\leq u\leq 1$, $F^{-1}(u)=\inf\{x\in\mathbb{R} : F(x)\geq u\}$. On rappelle (cf feuille d'exercices 1) que $F^{-1}(u)\leq x \iff u\leq F(x)$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge en loi vers X.

(1) Vérifier que F^{-1} est une fonction croissante continue à gauche de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que pour tout $u\in]0,1[$, on a

$$F^{-1}(u)\leq \liminf_{n\to\infty} F_n^{-1}(u)\leq \limsup_{n\to\infty} F_n^{-1}(u)\leq F^{-1}(u+),$$

où $F^{-1}(u+)$ est la limite à droite de F^{-1} en u.

(3) En déduire que si $X,X_1,X_2,\ldots$ sont des variables aléatoires réelles telles que $X_n\Rightarrow X$, il existe un espace de probabilité et des variables aléatoires $X',X_1',X_2',\ldots$ définies dessus telles que $X \overset{\text{loi}}{=} X'$, $X_i \overset{\text{loi}}{=} X_i'$ pour tout $i\geq 1$ et X_n' converge presque sûrement vers X' lorsque $n\to\infty$.

Exercice 10. Soit X une variable aléatoire réelle admettant des moments de tout ordre. On pose $m_k=\mathbb{E}\left[X^k\right]$, $M_k=\mathbb{E}\left[|X|^k\right]$ pour $k\geq 1$ et $\phi(t)=\mathbb{E}\left[e^{itX}\right]$ pour $t\in\mathbb{R}$.

(1) Montrer que le rayon de convergence de $\mathbb{E}\left[e^{zX}\right]=\sum_{k=0}^\infty \frac{m_k z^k}{k!}$ est non nul si et seulement si le rayon de convergence de $\sum_{k=0}^\infty \frac{M_k z^k}{k!}$ est non nul.

On suppose dans la suite que ces rayons de convergence sont non nuls et on note R le rayon de convergence de $\sum_{k=0}^\infty \frac{M_k z^k}{k!}$.

(2) Montrer que pour tout $h\in\mathbb{R}$,

$$\left| e^{ih}-\sum_{k=0}^{K}\frac{(ih)^k}{k!}\right| \leq \frac{|h|^{K+1}}{(K+1)!}.$$

(3) Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}$ et $|h|<R$ on a le développement en série entière $\phi(t+h)=\sum_{k=0}^\infty \frac{\phi^{(k)}(t)}{k!}h^k$.

(4) En déduire que la loi de X est caractérisée par ses moments.

Exercice 11. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de variables aléatoires uniformément intégrables. En reprenant la construction de la fonction croissante $\phi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{x\to\infty}\frac{\phi(x)}{x}=\infty$ et $\sup_{i\in I}\mathbb{E}[\phi(|X_i|)]<\infty$ (preuve du critère de de la Vallée Poussin), vérifier que ϕ peut être choisie de sorte que pour tout $x\geq 1$, $\phi'(2x)\leq 2\phi'(x)$, puis que ϕ peut être choisie de sorte que $\phi(x)\leq x^2$ pour $x\geq 1$.