Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Feuille d'exercices (cours 3) : théorème de Prokhorov, théorème de représentation de Skorokhod, topologie de $\mathcal{M}_1(E)$

1 Exercice à chercher pour le mardi 11 octobre

Cet exercice sera corrigé au début de la séance du mardi 11 octobre

Exercice 1. – *(Principe des lois accompagnantes)* – Sur un même espace de probabilités, on suppose donnée une famille de variables aléatoires $(Y_{n,k}, n \geq 1, k \geq 1)$ ainsi que d'une autre suite de variables aléatoires $(X_n, n \geq 1)$, toutes étant à valeurs dans le même espace métrique (E, d).

On suppose que pour tout $k \geq 1$, la suite $(Y_{n,k}, n \geq 1)$ converge en loi vers une limite Y_k. Enfin, on suppose que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(d(X_n, Y_{n,k}) \geq \varepsilon\right) = 0.$$

(1) On suppose que $Y_k \Rightarrow Y$ lorsque $k \to \infty$. Montrer que $X_n \Rightarrow Y$.

(2) On suppose que (E, d) est séparable et complet. Montrer que $(Y_k)_{k\geq 1}$ converge en loi.

On pourra utiliser avec profit la distance de Lévy–Prokhorov.

2 Exercices à chercher

Exercice 2. Soit (E, d) un espace métrique complet et $A \subset E$. Montrer que A est précompact si, et seulement si, A est relativement compact.

Exercice 3. Soit $X, X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires réelles telles que $X_n \Rightarrow X$ et $X_n \geq 0$. Montrer que $\mathbb{E}[X] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n]$.

3 Exercices additionnels

Exercice 4. Soit (E, d) un espace métrique séparable.

(1) Montrer que l'application $F : x \mapsto \delta_x$ est un homéomorphisme de E sur $E_0 := \{\delta_y : y \in E\}$, où ce dernier est vu comme sous-espace de $\mathcal{M}_1(E)$ muni de la topologie de la convergence étroite.

Soit $\mu_n = \delta_{x_n}$ une suite de E_0 qui converge étroitement vers μ. On suppose par l'absurde que $(x_n)_{n\geq 1}$ n'admet aucune sous-suite convergente.

(2) Montrer que $\{x_n, n \geq 1\}$ est un fermé, ainsi que toutes ses parties (finies ou infinies). Montrer que cela est contradictoire avec la convergence étroite de μ_n. En déduire que E_0 est un fermé de $\mathcal{M}_1(E)$.

(3) En déduire que si $\mathcal{M}_1(E)$ est compact, alors E est compact.

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Exercice 5. Soit $(E_i)_{i\geq 1}$ une suite d'espaces polonais. On pose $E = E_1 \times E_2 \times \cdots$, muni de la même distance d que dans la feuille d'exercices 2 :

$$\forall x, y \in E, \qquad d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x,y)}{1+d_n(x,y)}.$$

Montrer qu'une famille $\Gamma \subset \mathcal{M}_1(E)$ est tendue si et seulement si pour tout $i \geq 1$, $\{\pi_i \mu : \mu \in \Gamma\}$ est tendu, où $\pi_i : E \to E_i$ est la projection canonique et $\pi_i \mu$ la mesure image de μ par π_i.

Exercice 6. Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$. On voit A comme un espace métrique muni de la distance d.

(1) Montrer que les ouverts de (A,d) sont de la forme $A \cap O$ avec O ouvert de (E,d).

(2) Montrer que les éléments de $(A, \mathcal{B}(A))$ sont de la forme $A \cap B$ avec $B \in \mathcal{B}(E)$.

(3) Soit $K \subset A$ un compact de (A,d). Montrer que K est fermé dans E.

Exercice 7. Montrer qu'il n'existe pas de distance sur $\mathbb{R}^{[0,1]}$ qui métrise la convergence presque partout (on pourra montrer l'existence d'une suite de fonctions qui ne converge pas presque sûrement, mais telle que de toute sous-suite on peut ré-extraire une sous-sous-suite qui converge presque sûrement vers 0).