

## Feuille d'exercices (cours 4 et 5) :

### Espace des fonctions continues

## 1 Exercice à chercher pour le mardi 7 novembre

*Cet exercice sera corrigé au début de la séance du mardi 7 novembre*

**Exercice 1.** Pour tout  $n \geq 0$ , on se donne deux processus  $X^n, Y^n$  dans l'espace  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ , définis sur un même espace de probabilités (qui peut éventuellement dépendre de  $n$ ). On suppose que  $X^n \rightarrow X$  et  $Y^n \rightarrow Y$  en loi.

(1) Alix dit : la suite  $((X^n, Y^n))_{n \geq 0}$  est une suite tendue dans  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})^2$ . A-t-elle raison ?

(2) On voit maintenant le couple  $(X^n, Y^n)$  comme un unique processus

$$t \mapsto (X_t^n, Y_t^n), \quad t \in [0, 1]$$

dans  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^2)$ . Billie dit : la suite  $(X^n, Y^n)_{n \geq 0}$  est tendue dans  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^2)$ ? A-t-il raison ?

(3) On voit maintenant le couple  $(X^n, Y^n)$  comme une fonction  $(X_s^n, Y_s^n)_{s, t \in [0, 1]}$  de  $\mathcal{C}([0, 1]^2, \mathbb{R}^2)$ . Camille dit : la suite  $(X^n, Y^n)_{n \geq 0}$  est tendue dans  $\mathcal{C}([0, 1]^2, \mathbb{R}^2)$ . A-t-elle raison ?

### Corrigé :

(1) Oui ! Soit  $\varepsilon > 0$ . D'après le théorème de Prokhorov, il existe deux compacts  $K_1, K_2$  de  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})^2$  tels que  $\mathbb{P}(X^n \in K_1) \geq 1 - \varepsilon$  et  $\mathbb{P}(Y^n \in K_2) \geq 1 - \varepsilon$  pour tout entier  $n \geq 1$ . Alors  $K_1 \times K_2$  est un compact de  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^2)$ , et  $\mathbb{P}((X^n, Y^n) \notin K_1 \times K_2) \leq 2\varepsilon$ , ce qui montre que  $((X^n, Y^n))_{n \geq 0}$  est une suite tendue dans  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^2)$ .

(2) Oui ! Tout d'abord, il est clair que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $(X_t^n, Y_t^n)_{n \geq 1}$  est tendue. Pour contrôler le module de continuité, munissons  $\mathbb{R}^2$  de la norme  $\|\cdot\|_1$ . Pour une fonction  $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^2)$ ,

$$\omega(f, \delta) = \sup\{|f_1(s) - f_1(t)| + |f_2(s) - f_2(t)| : |s - t| \leq \delta\} \leq \omega(f_1, \delta) + \omega(f_2, \delta).$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(\omega((X^n, Y^n), \delta) \geq \eta) \leq \mathbb{P}(\omega(X^n, \delta) \geq \eta) + \mathbb{P}(\omega(Y^n, \delta) \geq \eta),$$

ce qui implique la tension.

*Remarque.* Alternativement, on peut utiliser le fait que la fonction

$$\begin{aligned} \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})^2 &\rightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^2) \\ (f, g) &\mapsto (f(t), g(t))_{0 \leq t \leq 1} \end{aligned}$$

est continue et la stabilité de la tension par composition par une fonction continue.

(3) Oui! Il suffit de vérifier que la fonction

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})^2 &\rightarrow \mathcal{C}([0, 1]^2, \mathbb{R}^2) \\ (f, g) &\mapsto (f(s), g(t))_{0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1} \end{aligned}$$

et le résultat en découlera par stabilité de la tension par composition par une fonction continue. À cet effet, en munissant  $\mathbb{R}^2$  de la norme  $\|\cdot\|_1$ , et en notant  $d(F, G) = \sup_{(s,t) \in [0,1]^2} \|F(s, t) - G(s, t)\|_1$  pour  $F, G \in \mathcal{C}([0, 1]^2, \mathbb{R}^2)$ , on remarque que

$$d(\Phi(f, g), \Phi(f', g')) = \|f - f'\|_\infty + \|g - g'\|_\infty.$$

Il en découle que si  $f_n \rightarrow f$  et  $g_n \rightarrow g$ , alors  $\Phi(f_n, g_n) \rightarrow \Phi(f, g)$ , d'où le résultat. □

## 2 Exercices à chercher

**Exercice 2.** Soit  $(X^n)_{n \geq 1}$  une suite de processus dans  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^k)$ . On suppose que  $X^n \Rightarrow X$  dans  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^k)$ . Soit  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On pose

$$Y_n = \int_0^1 f(X_s^n) ds, \quad Y = \int_0^1 f(X_s) ds.$$

Montrer que  $(X^n, Y_n) \Rightarrow (X, Y)$ .

### Corrigé :

D'après le théorème de représentation de Skorokhod, on peut supposer que la convergence  $X^n \rightarrow X$  a lieu presque sûrement. Par continuité de l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^k) &\rightarrow \mathbb{R} \\ g &\mapsto \int_0^1 f(g(s)) ds, \end{aligned}$$

on en déduit que  $Y_n \rightarrow Y$  presque sûrement. Ainsi,  $(X^n, Y_n) \rightarrow (X, Y)$  presque sûrement, et donc en loi.

*Remarque.* On peut aussi directement dire que l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^k) &\rightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^k) \times \mathbb{R} \\ g &\mapsto (g, \int_0^1 f(g(s)) ds) \end{aligned}$$

est continue, et donc que  $\Phi(X^n)$  converge en loi vers  $\Phi(X)$ . □

**Exercice 3.** Soit  $X^n, X$  des processus croissants, continus de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $X^n \Rightarrow X$  si et seulement si  $X^n$  converge vers  $X$  au sens des marginales fini-dimensionnelles.

**Corrigé :**

$\Rightarrow$  Cette implication est toujours vraie.

$\Leftarrow$  Puisque  $(X^n(o))_{n \geq 1}$  converge en loi, il suffit de vérifier que la suite  $(X^n)_{n \geq 1}$  est tendue. D'après le cours (prendre  $\delta = 1/k$  en haut de la page 3 dans les notes du cours 5), que pour une fonction  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  on a

$$\omega(f, 1/k) \leq 3 \max_{0 \leq i \leq k-1} \sup_{r \in [0, 1/k]} |f(r + i/k) - f(i/k)|.$$

En particulier, si  $f$  est croissante, on a

$$\omega(f, 1/k) \leq 3 \max_{0 \leq i \leq k-1} |f((i+1)/k) - f(i/k)|.$$

Par ailleurs, par convergence des marginales fini-dimensionnelles de  $X^n$  vers celles de  $X$ , on a

$$\max_{0 \leq i \leq k-1} |X^n((i+1)/k) - X^n(i/k)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(\text{loi})} \max_{0 \leq i \leq k-1} |X((i+1)/k) - X(i/k)|.$$

Par continuité de  $X$ , on pour tout  $\eta > 0$ ,

$$\mathbb{P} \left( \max_{0 \leq i \leq k-1} |X((i+1)/k) - X(i/k)| \geq \eta \right) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

On en déduit que pour tout  $\varepsilon, \eta > 0$ , on peut trouver  $k \geq 1$  tel que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\omega(X^n, 1/k) \geq \eta) \leq \varepsilon.$$

□

**Exercice 4.**

- (1) Pour  $a \geq 0$ , l'application  $f \mapsto t_a(f) = \inf\{t \geq 0 : f(t) \geq a\}$  définie sur  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$  est-elle continue? Sinon a-t-elle des points de continuité, et si oui, lesquels?
- (2) Soit  $(X^n, n \geq 0)$  une suite de processus dans  $\mathcal{C}$ . On suppose que  $X^n$  converge en loi vers  $X$  pour la topologie uniforme sur les compacts. On suppose également que  $X_0^n = 0$  pour tout  $n \geq 1$ . On note, pour  $a \geq 0$ ,

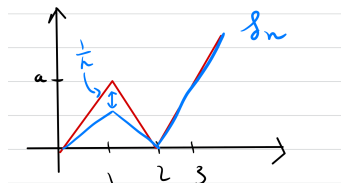
$$T_a^n = t_a(X^n), \quad T_a = t_a(X).$$

Discuter la convergence (ou non) de  $T_a^n$  vers  $T_a$ . Discuter le cas particulier où  $X$  est le mouvement brownien standard (cette dernière question se traite mieux avec la notion de propriété de Markov forte pour le mouvement brownien, voir le cours de calcul stochastique).

**Corrigé :**

- (1) Non, elle n'est pas continue. Dans l'exemple ci-dessous,  $f_n \rightarrow f$  uniformément sur tous les compacts, mais  $3 = t_a(f_n) \not\rightarrow t_a(f) = 1$ . On vérifie aisément que les points de continuité de cette application sont les fonctions  $f \in \mathcal{C}$  telles que  $t_a(f) = \infty$  ou bien telles que  $t_a(f) < \infty$  et  $f$

n'admet pas de maximum local en  $t_a(f)$ .



- (2) Tout d'abord, il est clair que  $0 = T_0^n$  converge vers  $T_0 = 0$ . On suppose donc  $a > 0$ . D'après la question précédente, si presque sûrement,  $X$  n'admet pas de maximum local en  $T_a$  lorsque  $T_a < \infty$ , alors  $T_a^n$  converge en loi vers  $T_a$  (utiliser par exemple le théorème de représentation de Skorokhod). Lorsque  $X$  est le mouvement brownien standard, on sait que  $T_a < \infty$  presque sûrement, et puisque pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\mathbb{P}(\sup_{[0,\epsilon]} X > 0)$ , d'après la propriété de Markov forte appliquée au temps d'arrêt  $T_a$ , presque sûrement  $X$  n'admet pas de maximum local en  $T_a$ . Ainsi, dans ce cas,  $T_a^n$  converge en loi vers  $T_a$ .

Maintenant, si avec probabilité strictement positive  $T_a < \infty$  et  $X$  admet un maximum local en  $T_a$ , alors on peut trouver  $X^n$  tel que  $T_a^n$  ne converge pas en loi vers  $T_a$ . En effet, puisque

$$\{T_a < \infty \text{ et } X \text{ admet un maximum local en } T_a\} = \bigcup_{k \geq 1} \{T_a < k \text{ et } X_t < a \text{ pour } 0 < |t - T_a| \leq 1/k\},$$

il existe  $k \geq 1$  tel que  $A = \{T_a < k \text{ et } X_t < a \text{ pour } 0 < |t - T_a| \leq 1/k\}$  vérifie  $\mathbb{P}(A) > 0$ . Pour  $\omega \notin A$  on pose  $X^n = X$  et pour  $\omega \in A$  on peut construire  $X^n$  tel que  $X^n \rightarrow X$  et tel que  $T_a^n \geq T_a + 1/k$ . En particulier,  $\mathbb{E}[T_a^n \mathbb{1}_{T_a^{(n)} \leq k}] > \mathbb{E}[T_a \mathbb{1}_{T_a \leq k}]$ . En prenant  $M > 2k$ , on a alors

$$|\mathbb{E}[T_a^n \wedge M] - \mathbb{E}[T_a \wedge M]| \geq \mathbb{P}(A)/k > 0.$$

Donc  $T_a^n$  ne converge pas en loi vers  $T_a$  (sinon  $T_a^n \wedge M$  convergerait en loi vers  $T_a \wedge M$ ).

□

### 3 Exercices additionnels

**Exercice 5.** Montrer que  $\{f \in \mathbb{R}^{[0,1]} : f \text{ est continue}\}$  n'est pas un élément de la tribu produit  $\mathbb{R}^{\otimes [0,1]}$ .

*Indication.* On pourra considérer une variable aléatoire  $U$  uniforme sur  $[0, 1]$  et considérer la fonction  $X(t) = \mathbb{1}_{t \neq U}$  pour  $0 \leq t \leq 1$ .

#### Corrigé :

On raisonne par l'absurde en supposant que  $A = \{f \in \mathbb{R}^{[0,1]} : f \text{ est continue}\} \in \mathbb{R}^{\otimes [0,1]}$ . La variable aléatoire  $X = (X(t) : 0 \leq t \leq 1)$  a les mêmes marginales fini-dimensionales que la fonction nulle. Elle donc la même loi que la fonction nulle. Ainsi

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(0 \in A) = 1.$$

C'est absurde car  $X$  n'est pas continu. □

**Exercice 6.** Soit  $K$  un espace métrique compact et  $E$  un espace métrique. On note  $C(K, E)$  l'espace des fonctions continues de  $K$  dans  $E$  muni de la distance  $d(f, g) = \sup_{x \in K} d_E(f(x), g(x))$ . Montrer que  $\{B \cap C(K, E) : B \in \mathcal{B}(E)^{\otimes K}\}$  est la plus petite tribu sur  $C(K, E)$  qui rend toutes les projections

$$\begin{aligned} \Pi_x : C(K, E) &\rightarrow E \\ f &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

pour  $x \in K$  mesurables (autrement dit, la trace de la tribu produit  $\mathcal{B}(E)^{\otimes K}$  sur  $C(K, E)$  est la tribu produit sur  $C(K, E)$ ).

**Corrigé :**

Notons  $\mathcal{F} = \{B \cap C(K, E) : B \in \mathcal{B}(E)^{\otimes K}\}$ , qui est bien une tribu sur  $C(K, E)$ .

Puisque pour tout  $x \in K$  et  $A \in \mathcal{B}(E)$ ,  $\{f \in C(K, E) : f(x) \in A\} = \{f \in E^K : f(x) \in A\} \cap C(K, E) \in \mathcal{F}$ , la tribu  $\mathcal{F}$  rend bien les projections  $\pi_x$  mesurables.

Soit maintenant  $\mathcal{G}$  une tribu sur  $C(K, E)$  qui rend toutes les projections  $\Pi_x$  mesurables et considérons

$$\{B \in \mathcal{B}(E)^{\otimes K} : B \cap C(K, E) \in \mathcal{G}\}.$$

On vérifie que c'est une tribu qui contient les cylindres de  $\mathcal{B}(E)^{\otimes K}$ , elle est donc égale à  $\mathcal{B}(E)^{\otimes K}$ , ce qui conclut. □

**Exercice 7.** On considère un espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  muni d'une filtration, c'est-à-dire d'une famille  $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$  de tribus telle que  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$  pour tout  $s \leq t$ . On rappelle qu'une martingale est une famille de variables aléatoires  $(X_t, t \geq 0)$  telle que  $X_t \in L_1$  pour tout  $t \geq 0$  et telle que pour tout  $s \leq t$  on a  $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ .

Soit  $(X^n, n \geq 0)$  une suite de processus de  $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ , intégrables et adaptés par rapport à des filtrations  $(\mathcal{F}_t^n)$ , c'est-à-dire que  $X_t^n$  est mesurable par rapport à  $\mathcal{F}_t^n$  pour tout  $t \geq 0$ . On suppose que  $X^n$  est une  $\mathcal{F}^n$ -martingale, et que  $X^n$  converge en loi vers  $X$  dans  $\mathcal{C}$ . On suppose également que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $(X_t^n)_{n \geq 1}$  est uniformément intégrable.

Montrer que  $(X_t, 0 \leq t \leq 1)$  est une  $(\mathcal{F}_t)$ -martingale où  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$ .

**Corrigé :**

Tout d'abord, on remarque que par uniforme intégrabilité, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $X_t$  est intégrable et  $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0]$ .

On fixe  $s \leq t$ . Soit  $A \in \mathcal{F}_t$ . Il s'agit de démontrer que

$$\mathbb{E}[X_s \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X_t \mathbb{1}_A].$$

Puisque l'ensemble des événements  $A$  satisfaisant à l'égalité précédente est une classe monotone, il suffit de démontrer que pour tout  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t$  et couples de réels  $(a_i, b_i)_{1 \leq i \leq n}$  avec  $a_i < b_i$  on a

$$\mathbb{E}\left[X_s \mathbb{1}_{a_i < X_{t_i} < b_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n}\right] = \mathbb{E}\left[X_t \mathbb{1}_{a_i < X_{t_i} < b_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n}\right].$$

À cet effet, on remarque que

$$\mathbb{E} \left[ X_s^n \mathbb{1}_{a_i < X_{t_i}^n < b_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n} \right] = \mathbb{E} \left[ X_t^n \mathbb{1}_{a_i < X_{t_i}^n < b_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n} \right]$$

car l'événement  $\{a_i < X_{t_i}^n < b_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n\}$  appartient à  $\sigma(X_t^n : 1 \leq i \leq n)$  est donc à  $\mathcal{F}_t^n$ .

D'après le théorème de représentation de Skorokhod, on peut supposer que  $X^n \rightarrow X$  presque sûrement. On a alors les convergences presque sûres

$$X_s^n \mathbb{1}_{a_i < X_{t_i}^n < b_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X_s \mathbb{1}_{a_i < X_{t_i} < b_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n}$$

et

$$X_t^n \mathbb{1}_{a_i < X_{t_i}^n < b_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X_t \mathbb{1}_{a_i < X_{t_i} < b_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n}.$$

Par uniforme intégrabilité, ces convergences ont également lieu en ajoutant des espérances, ce qui conclut.  $\square$

**Exercice 8.** Soit  $(E, d)$  un espace métrique.

- (1) On suppose que  $E$  est séparable. Montrer que tout ouvert de  $E$  est union dénombrable de boules ouvertes.
- (2-★) La réciproque est-elle vraie?

### Corrigé :

- (1) Soit  $(x_i)_{i \geq 1}$  une suite dénombrable dense de  $E$ . Si  $U$  est un ouvert, on écrit

$$U = \bigcup_{i, m \geq 1: B(x_i, 1/m) \subset U} B(x_i, 1/m).$$

En effet, l'inclusion  $\supset$  est claire. Pour l'inclusion  $\subset$ , soit  $x \in U$  et  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(x, \varepsilon) \subset U$ . On considère alors  $x_i$  tel que  $d(x, x_i) < \varepsilon/4$ , de sorte que pour  $m = \lfloor 1/(2\varepsilon) \rfloor$ ,  $x \in B(x_i, 1/m)$  et  $B(x_i, 1/m) \subset U$ .

- (2) Oui! Supposons que tout ouvert de  $E$  est union dénombrable de boules ouvertes. On raisonne par l'absurde en supposant que  $(E, d)$  est non séparable.

Vérifions d'abord que qu'il existe  $r > 0$  et un sous-ensemble  $E_1 \subset E$  non dénombrable tel que pour tous  $x \neq y$  dans  $E_1$  on a  $d(x, y) > r$ . Pour chaque  $r = 1/n$ , considérons un sous-ensemble maximal (pour l'inclusion) de  $E$  ayant cette propriété (qui existe d'après le lemme de Zorn). S'ils sont tous dénombrables, alors clairement  $E$  est séparable.

Considérons maintenant l'ensemble  $E_2 \subset E_1$  des points  $x \in E_1$  pour lesquels il existe un point  $y_x \in E$  tel que  $0 < d(x, y_x) < r/10$ .

Cas 1.  $E_2$  est non dénombrable. On pose alors

$$U = \bigcup_{x \in E_2} B(x, d(x, y_x)),$$

qui est une union disjointe. Considérons une boule ouverte  $B(z, a) \subset U$ . Puisque  $z \in U$ , il existe  $x \in E$  tel que  $d(z, x) < d(x, y_x)$ . Mais

$$r/5 > 2d(x, y_x) \geq d(x, z) + d(z, y_x) \geq d(z, y_x) > a$$

car  $y_x \notin U$  et a fortiori  $y_x \notin B(z, a)$ . Par conséquent  $B(z, a)$  est inclus dans une unique boule  $B(x, d(x, y_x))$ , et il faut donc un nombre non dénombrable de boules ouvertes pour couvrir  $U$ , absurde.

Cas 2.  $E_3 = E_1 \setminus E_2$  est non dénombrable. Tout d'abord, remarquons que puisque tout point de  $E_3$  est isolé, tout sous-ensemble de  $E_3$  est ouvert. Pour tout  $x \in E_3$ , on définit  $R(x)$  comme le rayon maximal d'une boule ouverte centrée en  $x$  et contenant un nombre au plus dénombrable de points, de sorte que  $R(x) \geq r/10$  pour tout  $x \in E_3$ . Pour un point  $x \in E_3$ , on dit qu'une étoile centrée en  $x$  est une union  $D = \{x\} \cup C$ , où  $C = \{z_1, z_2, \dots\} \subset E_3$  est une suite dénombrable de points tels que  $d(x, z_i) \rightarrow R(x)$ . Puisque  $E_3$  est non dénombrable, il existe une collection disjointe non dénombrable d'étoiles (pour le voir, on peut raisonner par l'absurde en utilisant le lemme de Zorn). Soit  $U$  l'ensemble de leurs centres. Puisque  $U \subset E_3$ ,  $U$  est ouvert, et on peut donc l'écrire comme une union de boules ouvertes

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i)$$

avec  $x_i \in U$  et  $r_i > 0$ . Il existe  $i_0 \geq 1$  tel que  $r_{i_0} > R(x_{i_0})$ , sinon  $U$  serait dénombrable. Or, d'une part  $B(x_{i_0}, r_{i_0})$  contient une infinité de points de l'étoile  $D$  centrée en  $x_{i_0}$ , mais d'autre part par construction  $U \cap D = \{x_{i_0}\}$ , contradiction. □