Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Feuille d'exercices (cours 4 et 5) : Espace des fonctions continues

1 Exercice à chercher pour le mardi 7 novembre

Cet exercice sera corrigé au début de la séance du mardi 7 novembre

Exercice 1. Pour tout $n \geq 0$, on se donne deux processus X^n, Y^n dans l'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, définis sur un même espace de probabilités (qui peut éventuellement dépendre de n). On suppose que $X^n \to X$ et $Y^n \to Y$ en loi.

(1) Alix dit : la suite $((X^n, Y^n))_{n\geq 0}$ est une suite tendue dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})^2$. A-t-elle raison ?

(2) On voit maintenant le couple (X^n, Y^n) comme un unique processus

$$t \mapsto (X^n_t, Y^n_t), \qquad t \in [0,1]$$

dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^2)$. Billie dit : la suite $(X^n, Y^n)_{n\geq 0}$ est tendue dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^2)$? A-t-il raison ?

(3) On voit maintenant le couple (X^n, Y^n) comme une fonction $(X^n_s, Y^n_t)_{s,t\in[0,1]}$ de $\mathcal{C}([0,1]^2,\mathbb{R}^2)$. Camille dit : la suite $(X^n, Y^n)_{n\geq 0}$ est tendue dans $\mathcal{C}([0,1]^2,\mathbb{R}^2)$. A-t-elle raison ?

2 Exercices à chercher

Exercice 2. Soit $(X^n)_{n\geq 1}$ une suite de processus dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^k)$. On suppose que $X^n \Rightarrow X$ dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^k)$. Soit $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose

$$Y_n = \int_0^1 f(X^n_s)ds, \qquad Y = \int_0^1 f(X_s)ds.$$

Montrer que $(X^n, Y_n) \Rightarrow (X, Y)$.

Exercice 3. Soit X^n, X des processus croissants, continus de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $X^n \Rightarrow X$ si et seulement si X^n converge vers X au sens des marginales fini-dimensionnelles.

Exercice 4.

(1) Pour $a \geq 0$, l'application $f \mapsto t_a(f) = \inf\{t \geq 0 : f(t) \geq a\}$ définie sur $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ est-elle continue ? Sinon a-t-elle des points de continuité, et si oui, lesquels ?

(2) Soit $(X^n, n \geq 0)$ une suite de processus dans $\mathcal{C}$. On suppose que X^n converge en loi vers X pour la topologie uniforme sur les compacts. On suppose également que $X^n_0 = 0$ pour tout $n \geq 1$. On note, pour $a \geq 0$,

$$T^n_a = t_a(X^n), \qquad T_a = t_a(X).$$

Discuter la convergence (ou non) de T^n_a vers T_a. Discuter le cas particulier où X est le mouvement brownien standard (cette dernière question se traite mieux avec la notion de propriété de Markov forte pour le mouvement brownien, voir le cours de calcul stochastique).

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

3 Exercices additionnels

Exercice 5. Montrer que $\{f \in \mathbb{R}^{[0,1]} : f$ est continue$\}$ n'est pas un élément de la tribu produit $\mathbb{R}^{\otimes[0,1]}$.

Indication. On pourra considérer une variable aléatoire U uniforme sur $[0,1]$ et considérer la fonction $X(t) = \mathbb{1}_{t \neq U}$ pour $0 \leq t \leq 1$.

Exercice 6. Soit K un espace métrique compact et E un espace métrique. On note $C(K,E)$ l'espace des fonctions continues de K dans E muni de la distance $d(f,g) = \sup_{x\in K} d_E(f(x),g(x))$. Montrer que $\{B \cap C(K,E) : B \in \mathcal{B}(E)^{\otimes K}\}$ est la plus petite tribu sur $C(K,E)$ qui rend toutes les projections

$$\begin{array}{rccc} \Pi_x : & C(K,E) & \to & E \\ & f & \mapsto & f(x) \end{array}$$

pour $x \in K$ mesurables (autrement dit, la trace de la tribu produit $\mathcal{B}(E)^{\otimes K}$ sur $C(K,E)$ est la tribu produit sur $C(K,E)$).

Exercice 7. On considère un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration, c'est-à-dire d'une famille $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ de tribus telle que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ pour tout $s \leq t$. On rappelle qu'une martingale est une famille de variables aléatoires $(X_t, t \geq 0)$ telle que $X_t \in L_1$ pour tout $t \geq 0$ et telle que pour tout $s \leq t$ on a $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$.

Soit $(X^n, n \geq 0)$ une suite de processus de $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, intégrables et adaptés par rapport à des filtrations $(\mathcal{F}_t^n)$, c'est-à-dire que X_t^n est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t^n$ pour tout $t \geq 0$. On suppose que X^n est une $\mathcal{F}^n$-martingale, et que X^n converge en loi vers X dans $\mathcal{C}$. On suppose également que pour tout $t \in [0,1]$, $(X_t^n)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable.

Montrer que $(X_t, 0 \leq t \leq 1)$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale où $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$.

Exercice 8. Soit (E,d) un espace métrique.

(1) On suppose que E est séparable. Montrer que tout ouvert de E est union dénombrable de boules ouvertes.

(2–★) La réciproque est-elle vraie ?