EA d'initiation à la recherche du PA de Mathématiques Appliquées

APM_51111_EP – APM_52112_EP – APM_50113_EP

1er juin 2026

Table des matières

Introduction - EA d'initiation à la recherche **3**
Choix et attribution des projets 3
Déroulement du projet, encadrement 5
Objectifs, rapport et soutenance, notation 5

1 Science des données et intelligence artificielle **7**
1.1 Traitement des données 7
1.2 Machine learning : Théorie et applications 7

2 Recherche Opérationnelle **8**
2.1 Applications de la recherche opérationnelle 9
2.2 Fondements mathématiques de la recherche opérationnelle 9

3 Modèles aléatoires en action **11**
3.1 Modèles aléatoires pour la biologie 12
3.2 Modèles aléatoires pour la physique ou l'informatique 12

4 Modélisation et ingénierie financière **13**
4.1 Valorisation de produits dérivés 13
4.2 Contrôle des risques et investissement 13
4.3 Liquidité et microstructure des marchés 14
4.4 Machine learning et sciences des données en finance 14

5 Simulation Aléatoire **15**
5.1 Processus aléatoires 15
5.2 Quantification d'incertitude 16

6 EDP, analyse numérique et applications en physique, mécanique et biologie **17**
6.1 Modélisation déterministe et analyse des EDP/EDO 17
6.2 Méthodes numériques, analyse numérique et calcul scientifique . . . 17
6.3 Optimisation et contrôle déterministe 18

Introduction - EA d'initiation à la recherche

Objectifs

Le but de ces enseignements est de fournir une initiation à la recherche et développement en mathématiques appliquées, à travers la réalisation d'un projet. Le projet consiste en l'étude d'un problème, motivé par les applications ou des questions de nature mathématique, allant de la modélisation à l'implémentation numérique et à l'analyse critique des résultats.

Ce projet est effectué en binôme ou en trinôme, et constitue un véritable travail d'équipe.

Choix et attribution des projets

Une fois que votre inscription dans l'une des EA d'initiation à la recherche aura été validée, il vous sera demandé de constituer des groupes (binômes ou trinômes) et de faire des voeux, afin de déterminer le domaine dans lequel s'effectuera votre projet. Les thématiques disponibles sont listées ci-dessous (en *italique* le référent pour chaque thématique). Elles sont divisées en sous-thématiques, décrites plus en détail à la fin de ce document.

1. **Science des données et intelligence artificielle** *(El Mahdi El Mhamdi)*
   - 1.1 Traitement des données
   - 1.2 Machine learning : Théorie et application
2. **Recherche opérationnelle** *(Xavier Allamigeon, Stéphane Gaubert)*
   - 2.1 Applications de la recherche opérationnelle
   - 2.2 Fondements mathématiques de la recherche opérationnelle
3. **Modèles aléatoires en action** *(Igor Kortchemski)*
   - 3.1 Modèles aléatoires pour la biologie
   - 3.2 Modèles aléatoires pour la physique ou l'informatique
4. **Modélisation et ingénierie financière** *(Stefano De Marco)*
   - 4.1 Valorisation de produits dérivés
   - 4.2 Contrôle des risques et investissement
   - 4.3 Liquidité et microstructure des marchés
   - 4.4 Machine learning et sciences des données en finance
5. **Simulation Aléatoire** *(Clément Rey)*
   - 5.1 Processus aléatoires
   - 5.2 Quantification d'incertitude
6. **Équations aux dérivées partielles, analyse numérique et applications en physique, mécanique et biologie** *(Maxime Breden)*
   - 6.1 Modélisation déterministe et analyse des EDP/EDO
   - 6.2 Méthodes numériques, analyse numérique et calcul scientifique
   - 6.3 Optimisation et contrôle déterministe

▷ Enseignants référents

Pour chacune des thématiques, les enseignants référents sont disponibles pour répondre à vos questions. Leurs coordonnées sont indiquées dans la suite de ce document. N'hésitez pas à prendre contact avec eux pour tout souci pendant la durée du projet (problème d'organisation, problème scientifique...).

▷ Procédure de voeux

Chaque groupe devra effectuer des voeux, en remplissant un formulaire en ligne. Dans ce formulaire, vous devrez indiquer **5 choix de sous-thématiques, classés par ordre de préférence, en indiquant le numéro des sous-thématiques (1.3, 6.1, 2.2...). Il est obligatoire que vos voeux portent sur au moins 3 thématiques différentes.** Ce formulaire devra être rempli au plus tard le

14 juin 2026.

Tous les choix envoyés à temps et respectant les règles ci-dessus seront traités de façon égalitaire.

▷ Formation des groupes

Vous êtes libres de former des groupes (binômes ou trinômes) comme vous l'entendez. Ces groupes devront être renseignés dans le formulaire en ligne, et **une seule soumission par groupe suffit.** Si vous ne parvenez pas à former un groupe, vous pourrez remplir le formulaire seul, et vous serez alors automatiquement associé à une autre personne seule ou à un groupe existant.

▷ Articulation entre projets

Si vous êtes inscrits à APM_51111_EP et APM_52112_EP, il ne sera pas possible d'effectuer deux projets dans la même thématique. Si vous souhaitez faire un seul projet plus long sur le même sujet, il convient de s'inscrire plutôt à APM_50113_EP.

▷ Attribution des encadrants

Après la période des voeux, un encadrant sera attribué à chaque groupe, en essayant de respecter au mieux les choix des sous-thématiques envoyés à temps.

Si vous vous inscrivez ou envoyez vos voeux hors délai, ou que ceux-ci ne respectent pas les contraintes décrites ci-dessus, il sera potentiellement plus compliqué, voire impossible, d'obtenir un encadrant dans une des sous-thématiques de votre choix.

Déroulement du projet, encadrement

▷ Démarrage du projet

Dès que votre encadrant vous aura été attribué, **vous devrez prendre contact avec lui**, afin de fixer la date d'un premier rendez-vous, et de définir précisément le sujet sur lequel vous allez travailler. Cet encadrant vous précisera les modalités de travail spécifiques au sujet, et supervisera votre travail tout au long du projet.

▷ Déroulement du projet

Ce projet constitue un travail personnel dont l'intérêt et la richesse dépendront principalement de votre investissement. L'enseignant qui vous encadre vous guidera dans votre démarche. Surtout n'hésitez pas à le contacter.

C'est à vous de le solliciter (et non l'inverse).

Le créneau du mardi après-midi est consacré au travail sur vos projets. Les rencontres avec votre encadrant pourront avoir lieu aussi à d'autres moments, en fonction de vos emplois du temps respectifs.

Notation, rapport et soutenance

▷ Rapport et soutenance

- Pour les projets sur une période (APM_51111_EP et APM_52112_EP), l'évaluation aura lieu à la fin de la période concernée.
- Pour les projets longs (APM_50113_EP), une première évaluation de miparcours aura lieu en fin de période 1, et une évaluation finale aura lieu en fin de période 2.

Chacune de ces évaluations sera basée sur la remise d'un rapport écrit, et sur une soutenance orale.

Les rapports sont à envoyer en format pdf à tous les membres du jury de soutenance (cc l'enseignant responsable de la thématique).

Les soutenances sont typiquement composées d'un exposé de 30 minutes environ (partagées équitablement entre les élèves) suivi de 10 minutes de questions. Les date exactes et les horaires des soutenances vous seront transmis par le département en temps voulu.

Indications. Dans le rapport comme lors de la soutenance, une bonne pratique est d'agir comme si le jury ne connaîssait pas le problème, et donc l'introduire en montrant son importance, expliquer votre approche ainsi que le cadre théorique, et montrer vos résultats ; vous donnerez enfin vos conclusions en faisant un bilan de votre travail.

Le rapport, de préférence écrit en LaTeX, devra comprendre une bibliographie des ouvrages et articles étudiés. Vous êtes encouragés à chercher de la documentation sur votre sujet.

▷ **Évaluation**

Elle tiendra compte de la qualité du contenu du rapport et de la soutenance, ainsi que des interactions avec l'enseignant. Elle prendra également en compte le sens critique sur les résultats obtenus et la précision de la bibliographie. Une seule note est généralement attribuée à l'ensemble du groupe.
Tous les sujets proposés demanderont d'effectuer des simulations/calculs numériques. Les outils informatiques seront mis en œuvre comme un moyen d'expérimentation et de compréhension, et non comme une fin en soi.

Bon travail à tous,

les équipes pédagogiques APM_51111_EP, APM_52112_EP, APM_50113_EP.

1 Science des données et intelligence artificielle

Enseignant référent : El Mahdi El Mhamdi el-mahdi.el-mhamdi@polytechnique.edu

Les sujets proposés dans la thématique science des données et intelligence artificielle visent à donner une expérience des méthodes d'apprentissage utilisées dans le traitement automatique des données et la prise de décision, que ce soit d'un point de vue théorique ou appliqué. Les sujets sont ainsi répartis dans les 2 sous-thématiques suivantes : traitement des données, théorie et applications.

La première catégorie cible, comme son nom l'indique, un travail de traitement des données. Les méthodes utilisées pour des données comprenant des images, du texte ou encore des lignes de code sont le plus souvent basées sur des réseaux de neurones, mais d'autres approches plus classiques peuvent être envisagées. La deuxième thématique s'adresse aux étudiants souhaitant aborder un problème sous l'aspect théorique/méthodologique avec éventuellement une application simple à un problème réel.

1.1 Traitement des données

Le but de cette sous-thématique est d'étudier des méthodes de traitement de données complexes (images, textes, code informatiques, audio...), incluant des méthodes modernes comme les réseaux de neurones et leurs différentes architechtures (multi-layered perceptron, ConvNet, Transformers...) ainsi que des méthodes plus classiques.

1.2 Machine learning : Théorie et applications

Tous les sujets proposés dans cette thématique sont centrés sur l'étude d'un algorithme spécifique (par exemple des algorithmes d'optimi-sation, des réseaux de neurones...) ou d'un problème générique (détection de communauté dans un graphe...) nécessitant l'utilisation d'un algorithme spécifique. La majorité du projet de recherche consiste à comprendre les différents algorithmes proposés d'un point de vue méthodologique et théorique, puis à appliquer cet algorithme sur un jeu de données réelles ou simulées. Les possibilités sont variées, le point commun de tous ces sujets étant l'aspect théorique/méthodologique.

2 Recherche Opérationnelle

Enseignants référents : Xavier Allamigeon Xavier.Allamigeon@inria.fr,
Stéphane Gaubert Stephane.Gaubert@inria.fr

Les projets de recherche opérationnelle peuvent être classés en deux grandes catégories : sujets portant sur les principales classes d'application de la recherche opérationnelle (énergie, télécom, transport, centre d'appels, tarification, ...), d'une part, et d'autre part sujets d'initiation à la recherche, d'orientation fondamentale, portant sur des questions d'optimisation, de combinatoire, de complexité, et parfois aussi sur des thèmes d'interface (géométrie discrète ou tropicale, contrôle, théorie des jeux, modélisation). Bien entendu, cette répartition n'est pas étanche, certains sujets appliqués peuvent receler des aspects fondamentaux, et vice versa.

Des sujets sont proposés tous les ans par les enseignants de RO : XA, SG, Frédéric Meunier (ENPC) et Éric Gourdin (Orange Labs). Nous sollicitons aussi régulièrement un nombre limité de projets auprès d'autres chercheurs travaillant dans l'industrie (EDF, Air-France, Localsolver, ...) Le travail de projet combine le plus souvent l'étude d'un article de recherche et une expérimentation numérique (test d'algorithmes). Les projets amont peuvent aussi comprendre des aspects théoriques originaux. On donne plus bas des exemples de projets des années précédentes – ce qui donne une idée des sujets susceptibles d'être proposées, sachant que les projets de RO sont orientés recherche : la plupart des projets sont originaux et sont renouvelés cette année.

Nous *recommandons fortement* aux élèves potentiellement intéressés de *contacter les coordinateurs* de la thématique (XA et SG), de préférence en amont du remplissage de votre fiche de choix, en précisant vos motivations scientifiques et vos souhaits de sous-thématiques. Nous recommandons en particulier de lister dans votre message des titres de projets des années précédentes qui vous auraient intéressés. Cela nous aide à apprécier vos intérêts afin de vous proposer des sujets répondant au mieux à vos attentes.
Il est aussi fortement recommandé qu'au moins un élève par binôme suive le cours MAP557 "Recherche Opérationnelle : Aspects mathématiques et applications" pour choisir ces projets.

Outils mathématiques : polyèdres, optimisation combinatoire, optimisation convexe, algorithmes de graphes, inégalités polynomiales (optimisation semi-algébrique), processus de décision Markoviens, jeux déterministes et stochastiques, géométrie discrète ou tropicale.

Classes d'applications : Énergie, télécom, transports, services d'urgence (centres d'appels, urgences hospitalières).

Les sous-thématiques pour la Recherche Opérationnelle sont :

— Applications de la recherche opérationnelle (énergie, transports, réseaux de communication, services d'urgence)

— Fondements mathématiques de la recherche opérationnelle.

2.1 Applications de la recherche opérationnelle

Des sujets relatifs à l'énergie et aux transports peuvent porter sur l'optimisation de production éléctrique, la gestion de flottes de véhicules électrique, des problèmes de tournées, ou de tarification, parfois avec des aspects touchant aux jeux de congestion. Des sujets issus du monde de l'aérien sont aussi susceptibles d'être proposés (planification des opérations ou tarification).

Une autre série de sujets porte sur l'application de l'optimisation combinatoire à des problèmes issus des réseaux télécom. Exemples de sujets donnés les années passées : répartition de serveurs virtuels sur des architectures physiques, optimisation des caches, ou contre mesures pour empêcher la propagation de virus dans un réseau.

Des sujets spécifiques portant sur le dimensionnement et l'évaluation de performance de centres d'appels d'urgences, en partenariat avec la direction de programme de la PFAU au sein de la préfecture de police (17-18-112), ou un service d'urgence de l'AP-HP, ont été proposés à plusieurs reprises. D'autres projets sur des centres d'appels commerciaux ont aussi été réalisés.

2.2 Fondements mathématiques de la recherche opérationnelle

Ces projets, destinés aux élèves désireux de s'initier à la recherche sous un angle théorique (par exemple, tentés par une thèse dans la discipline), portent sur l'analyse d'article récents, et parfois sur des prolongements. Des sujets à l'interface d'autres disciplines (géométrie discrète ou tropicale, contrôle optimal, dynamique des populations, algorithmique des jeux, dynamique épidémiologique) ont aussi été donnés. Donnons quelques thèmes explorés dans des projets récents : contre-exemples en programmation linéaire (montrant que les méthodes de points intérieurs peuvent effectuer un nombre d'opérations arithmétiques exponentiel en le nombre de variables et de contraintes), complexité des jeux de maximisation d'entropie (classe de jeux infinis avec paiement moyen), optimisation sous contraintes d'inégalités polynomiales, approximations polyédrales de dynamiques polynomiales (en cinétique chimique ou épidémiologie).

Liste indicative de sujets donnés les années précédentes

1. Dimensionnement couplé d'une flotte de véhicules électriques et des infrastructures de recharge
2. Planification de maintenance aérienne sous contrainte de ressource

3. “Tail assignement” (affectation des avions à des vols) avec contrainte de potentiel.
4. Approche robuste pour le dimensionnement capacitaire d’un réseau
5. Jeux de congestion appliqués au pilotage de la demande électrique
6. Planification d’investissement à long terme (par de production électrique).
7. Tarification de contrats électriques
8. Modèles pour le placement optimal dans les réseaux 5G
9. Optimisation de la réponse d’un centre d’appel d’urgence
10. Optimisation d’un service d’accueil des urgences
11. Dimensionnement d’un centre d’interventions de techniciens sur un réseau de distribution électrique
12. Dimensionnement et gestion d’une flotte de véhicules autonomes
13. Optimisation d’une organisation de ligne de production par “bucket brigades” (sujet d’ordonnancement à motivation appliquée et avec une forte composante fondamentale/combinatoire).
14. Algorithmes en transport optimal quantique
15. Barrières exotiques et complexité de la programmation linéaire
16. Complexité des jeux répétés avec paiement moyen : un approche basée sur la géométrie tropicale
17. Algorithmes pour les jeux d’entropie
18. Application de la géométrie tropicale en apprentissage et en analyse phylogénétique.
19. Géométrie discrète appliquée en économie (enchères, tarification).
20. Approximation polyédrale de dynamiques polynomiales en cinétique chimique ou épidémiologie.

3 Modèles aléatoires en action

Enseignant référent : Igor Kortchemski igor.kortchemski@polytechnique.edu

Pour cette thématique nous visons à décrire/simuler/prédire/comprendre des phénomènes aléatoires apparaissant en biologie ou en physique théorique. On peut aussi chercher à utiliser certains de ces phénomènes aléatoires en informatique pour concevoir des algorithmes efficaces, ou pour mieux comprendre certains structures de données.

Un enjeu important pour beaucoup de modèles est de comprendre comment certains phénomènes peuvent émerger à différentes échelles : comment un modèle microscopique peut se décrire à une échelle macroscopique ?

Suivant vos goûts et les disponibilités nous vous aiguilleront vers un encadrant·e particulier (enseignant·e-chercheur·e au Département de Mathématiques Appliquées ou chercheur·se CNRS). Pour les thématiques 3.1 et 3.2 nous avons dans l'équipe Peips du laboratoire Cmap des spécialistes des domaines suivants :

- Probabilités et EDP pour l'évolution du vivant
- Processus stochastique (processus de branchement, processus en environnements aléatoires,...)
- Percolation et mécanique statistique
- Graphes et réseaux aléatoires
- Systèmes de particules en interaction, Systèmes complexes
- Combinatoire et structure discrètes
- Algorithmes probabilistes
- ...

Suivant le sujet et l'orientation que vous souhaitez donner au sujet les outils de mathématiques appliquées seront par exemple parmi :

- Chaînes de Markov, Martingales
- Marches aléatoires, processus stochastiques
- Équations différentielles, Systèmes dynamiques
- Graphes aléatoires, matrices aléatoires
- Combinatoire
- ...

Dans tous les cas le projet aura une forte composante Modélisation/Simulation. Il peut également y avoir une partie d'étude de l'état de l'art, ce projet peut être une excellente occasion de s'initier à la recherche en vue d'un M2/Thèse.

3.1 Modèles aléatoires pour la biologie

Nous développons dans l'équipe Peips du laboratoire Cmap des modèles aléatoires et déterministes pertinents pour capturer des phénomènes liés à la biodiversité, l'écologie et l'évolution. Plus spécifiquement, nous considérons des systèmes complexes construits essentiellement sur les comportements individuels (cellules, bactéries, espèces, populations, métapopulations) et qui prennent en compte le plus possible la biologie du problème.

La modélisation aléatoire permet de quantifier les fluctuations dont les sources peuvent être diverses : dérive génétique, aléa de mutations au moment de la reproduction, aléa des changements environnementaux, aléa dans le déplacement d'individus (impact de la fragmentation de l'habitat). La modélisation déterministe offre un point de vue plus macroscopique dans lequel les comportements individuels s'intègrent dans une évolution décrivant le comportement global du système.

Exemples de sujets proposés les années précédentes :

— Dilemme du prisonnier : la sélection produit-elle de la coopération ?

— Modèles de polymérisation en environnement fluctuant

— Modélisation de la propagation d'une épidémie de tumeurs contagieuses chez le diable de Tasmanie

— Descente de l'infini pour des modèles compétitifs

— ...

Pour les projets en P2, certains sujets peuvent être liés au cours MAP563 *Modèles aléatoires en écologie et évolution* si le binôme suit ce cours.

3.2 Modèles aléatoires pour la physique ou l'informatique

Une autre thématique développée dans l'équipe Peips concerne l'étude de grandes structures aléatoires discrètes et de leurs limites (volume infini ou limites d'échelles). On retrouve en effet au cœur de plusieurs problèmes naturels des objets discrets aléatoires fondamentaux comme des arbres, graphes, cartes planaires, permutations, systèmes de particules, etc. Il se trouve que ces objets trouvent à la fois des applications profondes en physique et en informatique.

Exemples de sujets proposés les années précédentes :

— Un modèle de milieu aléatoire en physique : la percolation de premier passage

— Inférences sur des arbres de Galton-Watson et fraude sur Wikipedia

— Simulations de processus déterminantaux

— Factorisations aléatoires de permutations

— Limites "champ-moyen" pour des graphes aléatoires *sparse*

— Propagation de rumeurs dans des graphes à attachement préférentiel

— ...

4 Modélisation et ingénierie financière

Enseignant référent : Stefano De Marco stefano.de-marco@polytechnique.edu

Il est obligatoire de suivre le cours APM_51052_EP Modèles stochastiques en Finance pour choisir cet EA.

Outils mathématiques sollicités : calcul stochastique, optimisation et contrôle stochastiques, machine learning, statistiques des processus, théorie des jeux stochastiques, méthodes de simulation Monte Carlo.

Vous pouvez choisir parmi les sous-thématiques suivantes

1. Valorisation de produits dérivés
2. Contrôle des risques et investissement
3. Liquidité et microstructure des marchés
4. Machine learning et sciences des données en finance.

Suivant vos choix, nous vous aiguilleront vers un encadrant particulier.

Tous les projets auront une forte composante modélisation et simulation.

4.1 Valorisation de produits dérivés

Thèmes

- Valorisation et couverture des produits dérivés (*pricing* et *hedging*).
- Calcul des risques sur des portefeuilles de dérivés.

Théorie et outils mathématiques

- Calcul stochastique
- Méthodes de Monte Carlo
- Apprentissage profond : *fast pricing* et *deep hedging*.

Quelques mots clés : prix d'options, modèle et formule de Black-Scholes, volatilité implicite, volatilité stochastique, calibration de modèle.

4.2 Contrôle des risques et investissement

Thèmes

- Construction de portefeuille
- Modélisation de l'interaction entre agents.

Théorie et outils mathématiques

- Optimisation
- Contrôle stochastique
- Théorie des jeux
- Jeux à champs moyen.

Quelques mots clés : modèles d'interactions, réseaux financiers, systèmes de joueurs, risque systémique.

4.3 Liquidité et microstructure des marchés

Thèmes

- Modélisation des marchés haute fréquence
- Design de marché (*market making*)
- Comprendre le processus de formation des prix.

Théorie et outils mathématiques

- Statistique des processus
- Modèles d'interactions (théorie principal-agent)
- Machine learning, apprentissage par renforcement (*reinforcement learning*).

Quelques mots clés : volatilité réalisé, carnet d'ordre, trading haute fréquence, market impact, *market making* et *market taking*.

4.4 Machine learning et sciences des données en finance

Thèmes

- Evaluation de la valeurs des actifs via des données alternatives : texte, images satellites, géolocalisation
- Modèles génératifs
- Prédiction de séries financières.

Outils mathématiques

- Apprentissage machine, réseaux de neurones
- Traitement du signal, du texte et de l'image
- Modèles de diffusion, processus Gaussiens, signatures.

Quelques mots clés : prédiction, données non structurés, stratégies alternatives, LLM (Large Language Models).

5 Simulation Aléatoire

Enseignant référent : Clément Rey clement.rey@polytechnique.edu

Dans cette thématique, on s'intéresse au calcul de grandeurs probabilistes par simulation de variables aléatoires. On porte une attention particulière à l'étude de méthodes proposant une approche numérique efficace pour cette simulation. On étudie théoriquement et numériquement la convergence de ces méthodes. On peut s'intéresser, entre autre, à la simulation d'Équations Différentielles Stochastiques (EDS), de Processus Markoviens ou non, à l'introduction d'incertitude dans un modèle ou encore à des méthodes de Meta-modélisation. Dans des cas pratiques, ces approches permettent, par exemple, de calculer des espérances, des quantiles, simuler des lois (ou des approximations) ou encore résoudre des problèmes d'optimisation stochastique.

Suivant les possibilités d'encadrement nous vous aiguillerons vers un encadrant·e particulier (enseignant·e-chercheur·se au Département de Mathématiques Appliquées, chercheur·se CNRS ou chercheur·se extérieur).

Suivant le sujet, les outils de mathématiques appliquées pourront être :

— Chaînes de Markov, Martingales

— Calcul stochastique

— Gestion du risque

Dans tous les cas, le projet aura une composante Modélisation/Simulation.

5.1 Processus aléatoires

Dans cette sous-thématique, l'attention se porte sur des méthodes de simulation associées à l'étude de processus alèatoires. On étudie la simulation de modèles qui entrent en jeu dans des domaines comme la finance ou la biologie. Ces modèles peuvent décrire l'évolution d'une grandeur comme le mouvement d'une particule, la valeur d'un actif sur un marché financier ou encore une population. On peut, par exemple, se focaliser sur le calcul d'une espérance associée à ce modèle, à la loi d'une grandeur comme le temps d'atteinte d'un seuil par un processus ou encore le calcul de quantiles. On met en application des techniques pouvant être héritées des chaînes de Markov, des martingales ou du calcul stochastique. On explore également des domaines comme les EDS non linéaires, la simulation de processus non-Markoviens ou l'étude d'évènements rares.

Mots clés :

— Calcul Stochastique

— Équations Différentielles Stochastiques

— Martingales

— Processus Markoviens

— ....

Références

— N. El Karoui, E. Gobet : Les outils stochastiques des marchés financiers : Une visite guidée de Einstein à Black-Scholes

— D. Lambert, B. Lapeyre : Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance

— D. Revuz, M. Yor Continuous Martingales and Brownian Motion

5.2 Quantification d'incertitude

La Quantification d'incertitude repose sur la gestion de l'aléa d'un modèle. Par exemple, un modèle (aléatoire) possède des paramètres qui sont des quantités déterministes. Ces paramètres ne sont, en réalité, pas toujours connus, car non observables ou non calculables exactement à partir de données d'observation. On peut alors introduire un aléa sur ces paramètres et obtenir un modèle étendu. On étudie alors, théoriquement et numériquement, l'impact de l'introduction de cet aléa dans la résolution de problèmes comme le calcul d'une espérance, de quantiles ou encore la résolution d'un problème d'optimisation. Une autre approche dans ce domaine repose sur la simulation même d'un modèle. Celle-ci étant parfois trop coûteuse, on peut introduire une approximation du modèle plus simple à simuler et dont on souhaite quantifier l'erreur associée lors de la résolution d'un problème comme ceux mentionnés. Ces méthodes, dites de Meta-modélisation, ainsi que celles évoquées en premier lieu, sont particulièrement utilisées dans la gestion du risque. On applique, entre autre, des techniques de probabilités et calcul stochastique combinées avec des techniques d'approximation de variables aléatoires (fonction d'une Gaussienne pour un exemple simple) par des projections, intrepolations, représentations en chaos, etc

Mots clés :

— Gestion du risque

— Modélisation et Meta-modélisation

— Représentation de variables aléatoires (*e.g.* Polynômes de chaos).

— Processus aléatoires

— ...

Références

— T. J. Sullivan : Introduction to Uncertainty Quantification

— J. Garnier : Cours de Gestion des incertitudes et analyse de risque (MAP 568)

— G. Szego : Orthogonal Polynomials

6 EDP, analyse numérique et applications en physique, mécanique et biologie

Enseignant référent : Maxime Breden maxime.breden@polytechnique.edu

Suivant les possibilités d'encadrement, nous vous aiguilleront vers un·e encadrant·e particulier·e (enseignant·e-chercheur·e au Département de Mathématiques Appliquées ou associé·e). Si vous souhaitez travailler plus particulièrement sur un sujet lié à cette thématique, vous pouvez également contacter par mail le responsable.

Cette thématique concerne assez généralement les équations ou systèmes d'équations différentielles ordinaires (EDO) ou aux dérivées partielles (EDP) issues de diverses modélisations en physique, mécanique ou en biologie. On s'intéressera aux méthodes numériques (déterministes) pour résoudre ces équations ou à des problèmes qui leur sont liés.

Les sujets incluent une ou plusieurs thématiques suivantes, et sont en lien avec les cours de 2A : APM_41012 (introduction à l'analse numérique), APM_42031 (analyse variationelles des EDP) et APM_43035 (optimisation et contrôle) qui peuvent être recommandés pour certains projets.

6.1 Modélisation déterministe et analyse des EDP/EDO

Cette sous-thématique regroupe à la fois la modélisation déterministe, c'est-à-dire la représentation d'un système physique ou biologique, par des équations ou systèmes d'équations différentielles ou aux dérivées partielles, et l'analyse de ces modèles. On cherchera ainsi à construire ces modèle, mais également à préserver dans cette représentation les propriétés essentielles de ce système.

Les modèles en question peuvent être issus par exemple de :

— La biologie ou la médecine : Modèles proie-prédateur, chimiotactisme (mouvement de bactéries), polymérisation.

— La mécanique des fluides : Gazs raréfiés, écoulements diphasiques liquide-vapeur, particules portés dans un fluide.

— La physique : Ondes, radiations, plasmas (gazs ionisés), orbites de satellites.

Et on pourra s'intéresser par exemple à la structure des équations ou des opérateurs en jeu, l'existence et l'unicité d'une solution, la stabilité de ces solutions ou de certains régimes (équilibre) ou leur comportement (structure Hamiltonienne pour des solutions périodiques).

6.2 Méthodes numériques, analyse numérique et calcul scientifique

Une fois construits, les modèles considérés prennent généralement la forme de problèmes en dimension infinie. Afin de les résoudre, on cherche à approcher ces

problèmes par d'autres de dimension finie et qu'on peut résoudre par ordinateur. Plusieurs problématiques sont alors envisageables :

— La construction de ces méthodes numériques, i.e. de ces problèmes de dimension finie, à partir du problème original. On pourra étudier différentes familles de schémas numériques (différences finies, volumes finis, éléments finis) ou des méthodes de "scientific machine learning" (Physics-Informed Neural Network, PINN ; Neural operator). On pourra également chercher à préserver des propriétés du modèle original ou de sa solution (schéma préservant une asymptotique en temps long, solution discrète périodique, dissipation d'une entropie discrète).

— L'analyse de ces méthodes numériques. Le problème le plus classique est l'étude de l'erreur (estimation d'erreur ou étude de convergence) commise à travers cette approximation. On pourra également chercher à certifier ces solutions discrètes par des techniques de preuves assistées par ordinateur, i.e. démontrer l'existence d'une solution exacte au problème original dans un voisinage ou à une certaine distance de la solution du problème numérique.

— L'implémentation efficace de ces méthodes numériques. C'est le cadre du calcul scientifique de construire des algorithmes efficaces pour la résolution des problèmes approchés de dimension finie (préconditionnement de systèmes linéaires par exemple). On pourra également s'intéresser au calcul haute performance pour, par exemple, construire des algorithmes adaptés aux architectures parallèles (OpneMP, MPI), raffiner localement la solution numérique (multi-résolution en espace, algorithme pararéels en temps), voire étudier des structures de données adaptées aux algorithmes considérés.

6.3 Optimisation et contrôle déterministe

L'optimisation consiste en la recherche du (ou des) minimum d'une fonction. Le contrôle (resp. optimal) consiste en la recherche de la valeur d'un paramètre (resp. optimal) dans une équation pour amener sa solution vers un certain état (resp. minimum d'une fonction). Pour ces problèmes déterministes, on pourra là-encore étudier la mise en équation du problème (modélisation), l'analyse du problème (optimisation convexe, sous contraintes, etc), de ses propriétés et de sa (ou ses) solution. On pourra également étudier les méthodes numériques pour la recherche de minima ou pour faire décroitre la valeur de la fonction cible (étude de convergence), et implémenter ces méthodes.

Les problèmes considérés peuvent être liés à :

— Optimisation sous contrainte de modélisation. L'exemple type est la recherche du minimum d'une fonction (par exemple, la température moyenne dans une pièce) sous la contrainte de satisfaire la physique (la température suit l'équation de la chaleur).

— Optimisation topologique, c'est-à-dire la recherche d'une forme optimale. Il peut s'agir de maximiser la charge qu'une structure peut soutenir, ou maximiser la surface d'une goutte soumise à une tension.

— Contrôle optimal et problèmes inverses. Pour un problème dépendant d'un paramètre, il s'agit de trouver une valeur à ce paramètre afin d'amener le système d'un certain état vers un autre (contrôle), ou de le déterminer à partir de la valeur de la solution (problème inverse) donnée a priori ou obtenue par une expérience.

— Transport optimal. Il s'agit généralement de minimiser la distance entre deux objets dans des espaces complexes, par exemple la distance entre deux mesures, entre deux points sur une variété (géodésique) ou le trajet le plus court pour les relier (brachistochrone).