Stabilité Inf-Sup du schéma DDFV pour le problème de Stokes 2D

Franck BOYER[1], **Stella KRELL**[2], **Flore NABET**[1]

[1] Aix-Marseille Université, [2] Université de Nice

[franck.boyer,flore.nabet]@univ-amu.fr, krell@unice.fr

On propose un schéma DDFV (Discrete Duality Finite Volume) pour le problème de Stokes :
Trouver $u : \Omega \to \mathbb{R}^2$ et $p : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \text{ dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0, \text{ sur } \partial\Omega, \quad m(p) = \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega p(x)\mathrm{d}x = 0; \end{cases} \qquad (\mathcal{P})$$

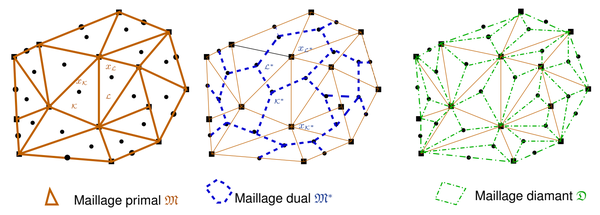
Ω ouvert polygonal borné connexe de $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$.

- **Inf-Sup inégalité :**

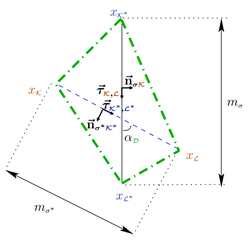
$$\beta = \inf_{p \in L^2(\Omega)} \left(\sup_{\mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^2} \frac{\displaystyle\int_\Omega p \operatorname{div}(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{H^1} \|p - m(p)\|_{L^2}} \right) > 0.$$

1. Cadre DDFV

- **Maillages DDFV** : primal, dual et "diamant".



- **Zoom sur les cellules diamants :** (supposées convexes)



- **Inconnues discrètes :**

$$p^{\mathfrak{D}} = (p^{\mathcal{D}})_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}, \qquad \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \left(\mathbf{u}^{\mathfrak{M}}, \mathbf{u}^{\mathfrak{M}^*}\right) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^{\mathcal{T}}$$

où $\mathbf{u}^{\mathfrak{M}} = (\mathbf{u}_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}}$, $\mathbf{u}^{\mathfrak{M}^*} = (\mathbf{u}_{\mathcal{K}^*})_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*}$.

- **Gradient discret :** $\nabla^{\mathfrak{D}}$ est constant sur chaque diamant,

$$\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}.(x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}}) = \mathbf{u}_{\mathcal{L}} - \mathbf{u}_{\mathcal{K}},$$
$$\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}.(x_{\mathcal{L}^*} - x_{\mathcal{K}^*}) = \mathbf{u}_{\mathcal{L}^*} - \mathbf{u}_{\mathcal{K}^*},$$

$$\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \frac{1}{\sin(\alpha_{\mathcal{D}})} \left[\frac{\mathbf{u}_{\mathcal{L}} - \mathbf{u}_{\mathcal{K}}}{m_{\sigma^*}} \otimes \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}} + \frac{\mathbf{u}_{\mathcal{L}^*} - \mathbf{u}_{\mathcal{K}^*}}{m_\sigma} \otimes \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\mathcal{K}^*} \right].$$

- **Divergence discrète sur le maillage diamant :**

$$\operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \operatorname{Tr}(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}), \quad \forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D}.$$

- **Divergence discrète sur les maillages primal et dual :**

$$\mathbf{div}^{\mathcal{T}}(\xi^{\mathfrak{D}}) = \begin{cases} \operatorname{div}^{\mathcal{K}} \xi^{\mathfrak{D}} = \dfrac{1}{m_{\mathcal{K}}} \displaystyle\sum_{\sigma \subset \partial\mathcal{K}} m_\sigma \xi^{\mathcal{D}} \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}}, & \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M}, \\ \operatorname{div}^{\mathcal{K}^*} \xi^{\mathfrak{D}} = \dfrac{1}{m_{\mathcal{K}^*}} \displaystyle\sum_{\sigma^* \subset \partial\mathcal{K}^*} m_{\sigma^*} \xi^{\mathcal{D}} \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}, & \forall \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*. \end{cases}$$

Gradient de pression $\rightsquigarrow$ $\boldsymbol{\nabla}^{\mathcal{T}} p^{\mathfrak{D}} = \mathbf{div}^{\mathcal{T}}(p^{\mathfrak{D}} \mathrm{Id})$.

- **Produits scalaires discrets et normes associées :**
Pour $p^{\mathfrak{D}}, q^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$ et $\xi^{\mathfrak{D}}, \phi^{\mathfrak{D}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}}$,

$$(p^{\mathfrak{D}}, q^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} = \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}} q^{\mathcal{D}}, \qquad \|p^{\mathfrak{D}}\|_{\mathfrak{D},2} = (p^{\mathfrak{D}}, p^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}}^{\frac{1}{2}},$$

$$(\xi^{\mathfrak{D}} : \phi^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} = \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} \operatorname{Tr}({}^t\xi^{\mathcal{D}} \phi^{\mathcal{D}}), \quad \|\xi^{\mathfrak{D}}\|_{\mathfrak{D},2} = (\xi^{\mathfrak{D}} : \xi^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}}^{\frac{1}{2}}.$$

- **Schéma Stokes-DDFV :**
Trouver $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$ et $p^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$ tels que :

$$\begin{cases} -\mathbf{div}^{\mathcal{T}}(\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) + \boldsymbol{\nabla}^{\mathcal{T}} p^{\mathfrak{D}} = \mathbf{f}^{\mathcal{T}}, \\ \operatorname{div}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = 0, \\ m(p^{\mathfrak{D}}) = \displaystyle\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}} = 0. \end{cases}$$

où $\mathbb{E}_0 = \left\{ \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in \left(\mathbb{R}^2\right)^{\mathcal{T}} : \forall \mathcal{K} \in \partial\mathfrak{M},\ \mathbf{u}_{\mathcal{K}} = 0,\ \forall \mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}^*,\ \mathbf{u}_{\mathcal{K}^*} = 0 \right\}$

- **Constante Inf-Sup discrète associée :**

$$\beta_{\mathcal{T}} = \inf_{p^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}} \left(\sup_{\mathbf{v}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0} \frac{(\operatorname{div}^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}}}{|||\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}}|||_{\mathfrak{D},2} \|p^{\mathfrak{D}} - m(p^{\mathfrak{D}})\|_{\mathfrak{D},2}} \right)$$

Principales questions :

1. **Bien posé** : Pour un maillage donné, a-t-on $\beta_{\mathcal{T}} > 0$?
2. **Stabilité** : Pour une famille de maillages, a-t-on $\liminf_{\mathrm{size}(\mathcal{T}) \to 0} \beta_{\mathcal{T}} > 0$?

2. Formulation comme un problème de valeurs propres

- **Quelques matrices utiles :**
Rigidité $R_{\mathcal{T}}$: $(R_{\mathcal{T}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \mathbf{v}^{\mathcal{T}}) = (\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} : \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}})_{\mathfrak{D}}$,
Divergence $B_{\mathcal{T}}$: $(B_{\mathcal{T}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}}) = (\operatorname{div}^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}}$,
Masse en pression $M_{\mathcal{T}}$: $(M_{\mathcal{T}} p^{\mathfrak{D}}, q^{\mathfrak{D}}) = (p^{\mathfrak{D}}, q^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}}$.

Lemme : Relation avec le complément de Schur
${\beta_{\mathcal{T}}}^2 =$ la **seconde** plus petite valeur propre de la matrice $S_{\mathcal{T}}$
$= \lambda_2(S_{\mathcal{T}})$ où $S_{\mathcal{T}} = M_{\mathcal{T}}^{-\frac{1}{2}} B_{\mathcal{T}} R_{\mathcal{T}}^{-1t} B_{\mathcal{T}} M_{\mathcal{T}}^{-\frac{1}{2}}$.

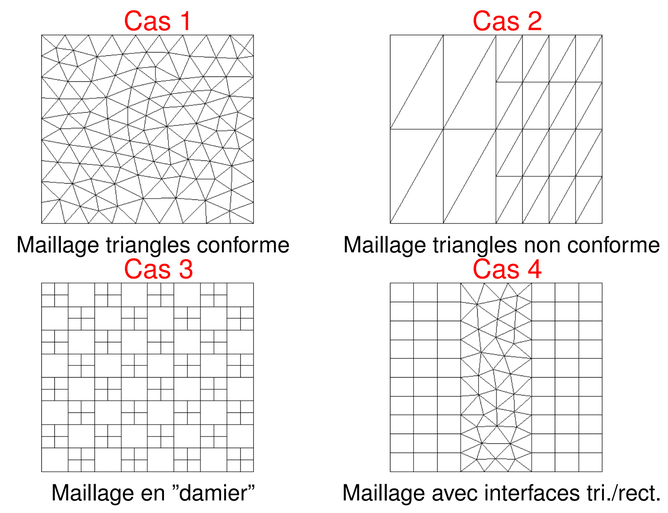
Remarque : $\bar{p}^{\mathfrak{D}} = M_{\mathcal{T}}^{\frac{1}{2}} \mathbf{1} \Rightarrow S_{\mathcal{T}} \bar{p}^{\mathfrak{D}} = 0 \Rightarrow \lambda_1(S_{\mathcal{T}}) = 0$.
Preuve : Manipulations algébriques à partir de la formule :

$$\beta_{\mathcal{T}} = \inf_{\substack{p^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}} \\ m(p^{\mathfrak{D}}) = 0}} \left(\sup_{\mathbf{v}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0} \frac{(B_{\mathcal{T}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}})}{(R_{\mathcal{T}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}}, \mathbf{v}^{\mathcal{T}})^{\frac{1}{2}} (M_{\mathcal{T}} p^{\mathfrak{D}}, p^{\mathfrak{D}})^{\frac{1}{2}}} \right).$$

- **Méthode numérique :**

$\rightsquigarrow$ Méthode d'itération de sous-espaces avec projection de Rayleigh-Ritz.
$\rightsquigarrow$ Résolution d'un problème de Stokes à chaque itération.

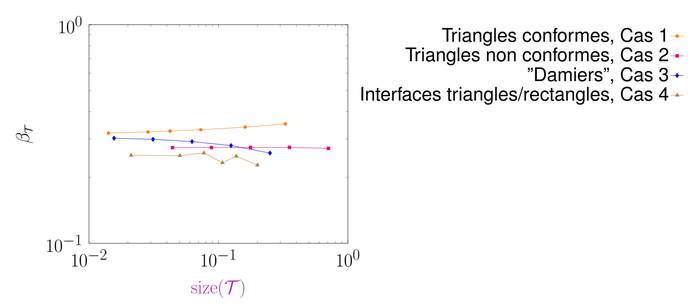
3. Stabilité Inf-Sup inconditionnelle



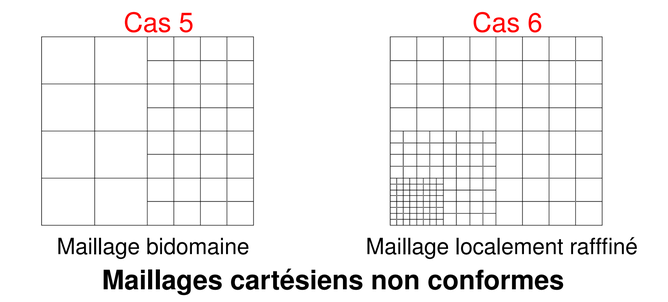
Maillages Inf-Sup stables

Théorème : Soit $\mathcal{T}$ une famille régulière de maillages triangles conformes (cas 1) ou de triangles non conformes (cas 2) ou de maillages "en damier" (cas 3). Il existe $\beta_{\mathcal{T}} > 0$ (indépendante de $\mathrm{size}(\mathcal{T})$) telle que pour tout $p^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$,

$$\beta_{\mathcal{T}} \|p^{\mathfrak{D}} - m(p^{\mathfrak{D}})\|_{\mathfrak{D},2} \leq \sup_{\mathbf{v}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0} \left(\frac{(\operatorname{div}^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}}}{|||\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}}|||_{\mathfrak{D},2}} \right).$$



4. Stabilité Inf-Sup de codimension 1



Maillages cartésiens non conformes

4.1 Inf-Sup instabilité

Définition : Mode en damier
Le mode en damier $\psi^{\mathfrak{D}}$ est défini par :

$$\begin{cases} \psi^{\mathcal{D}} = +1 \text{ si l'arête primale de } \mathcal{D} \text{ est horizontale}, \\ \psi^{\mathcal{D}} = -1 \text{ si l'arête primale de } \mathcal{D} \text{ est verticale}. \end{cases}$$

Remarque : $m(\psi^{\mathfrak{D}}) = 0$ et $\|\psi^{\mathfrak{D}}\|_{\mathfrak{D},2} = 1$.

Théorème : Maillage cartésien uniforme
Soit $\mathcal{T}$ un maillage cartésien uniforme, alors :

$$(\operatorname{div}^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}}, \psi^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} = 0, \quad \forall \mathbf{v}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0.$$

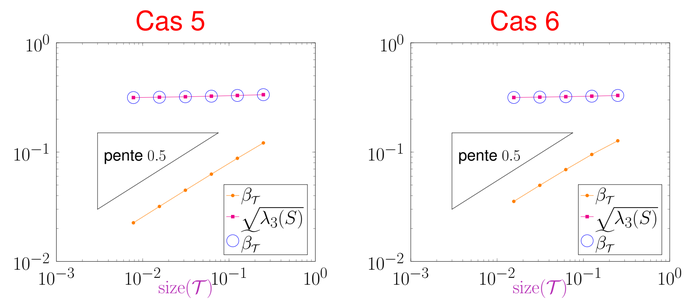
Théorème : Maillage cartésien non conforme
Soit $\mathcal{T}$ un maillage cartésien non conforme (cas 5 et 6), alors il existe $C_1, C_2 > 0$ (indépendantes de $\mathrm{size}(\mathcal{T})$) telles que :

$$C_1 \mathrm{size}(\mathcal{T})^{\frac{1}{2}} \leq \sup_{\mathbf{v}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0} \left(\frac{(\operatorname{div}^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}}, \psi^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}}}{|||\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}}|||_{\mathfrak{D},2}} \right) \leq C_2 \mathrm{size}(\mathcal{T})^{\frac{1}{2}}.$$

4.2 Résultats numériques

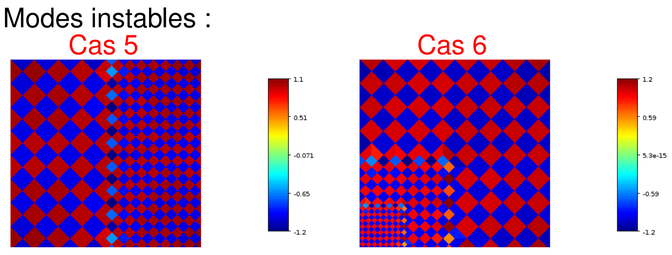
- Comparaison des valeurs propres de $S_{\mathcal{T}}$ avec :

$$\widetilde{\beta_{\mathcal{T}}} = \inf_{p^{\mathfrak{D}} \in \{\psi^{\mathfrak{D}}\}^\perp} \left(\sup_{\mathbf{v}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0} \frac{(\operatorname{div}^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}}}{|||\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}}|||_{\mathfrak{D},2} \|p^{\mathfrak{D}} - m(p^{\mathfrak{D}})\|_{\mathfrak{D},2}} \right).$$



$\Longrightarrow$ Instabilité **mais il y a un unique mode instable**.
$\Longrightarrow$ $\widetilde{\beta_{\mathcal{T}}} \sim \sqrt{\lambda_3(S_{\mathcal{T}})}$.
$\Longrightarrow$ $\psi^{\mathfrak{D}}$ **bonne approximation du mode instable.**

- Modes instables :



Pas de formule explicite pour ces modes !!

4.3 Inf-Sup stabilité de codimension 1

Théorème : Soit $\mathcal{T}$ un maillage cartésien, il existe $\beta_{\mathcal{T}} > 0$ (indépendante de $\mathrm{size}(\mathcal{T})$) telle que pour tout $p^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$ vérifiant $(p^{\mathfrak{D}}, \psi^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} = 0$:

$$\beta_{\mathcal{T}} \|p^{\mathfrak{D}} - m(p^{\mathfrak{D}})\|_{\mathfrak{D},2} \leq \sup_{\mathbf{v}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0} \left(\frac{(\operatorname{div}^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}}}{|||\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}}|||_{\mathfrak{D},2}} \right).$$

Théorème : Asymptotique des modes instables
Soit $\mathcal{T}$ un maillage cartésien non conforme, il existe $C > 0$ (indépendante de $\mathrm{size}(\mathcal{T})$) telle que :

$$\|q^{\mathfrak{D}} - \psi^{\mathfrak{D}}\|_{\mathfrak{D},2} \leq C \mathrm{size}(\mathcal{T})^{\frac{1}{2}},$$

où $q^{\mathfrak{D}}$ est le mode propre instable observé numériquement.

5. Conjectures

Les tests numériques semblent montrer que la méthode DDFV est, en général, Inf-Sup stable. En particulier, on observe la stabilité dans les cas suivants :

- Maillages quadrangles conformes assez proches des rectangles.
- Maillages conformes composés de triangles et de rectangles (cas 4).

References

[1] F. Boyer, S. Krell et F. Nabet, *Inf-Sup stability of the Discrete Duality Finite Volume method for the 2D Stokes problem,* soumis, http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00795362, 2013.
[2] M. Dobrowolski, *On the LBB condition in the numerical analysis of the Stokes equations,* Applied Numerical Mathematics, Vol. 54, Issue 3-4, 314–323, 2005.
[3] T. Gallouët, R. Herbin et J.C. Latché, *$W^{1,q}$ stability of the Fortin operator for the MAC scheme,* Calcolo, Vol. 49, Issue 1, 63–71, 2012.
[4] S. Krell, *Stabilized DDFV schemes for Stokes problem with variable viscosity on general 2D meshes,* Num. Meth. for PDEs, Vol. 27, Issue 6, 1666–1706, 2011.
[5] D.S. Malkus, *Eigenproblems associated with the discrete LBB condition for incompressible finite elements,* International Journal of Engineering Science, Vol. 19, Issue 10, 1299–1310, 1981.