

TER: A la découverte des lois de conservation scalaires non-linéaires

Nabet Flore, Gautier Clotilde, de Bardou de Segonzac Mathieu
Encadré par Mr Boyer

TER 2009

Table des matières

1	Introduction	5
2	Un problème physique utilisant l'équation de Burgers	7
3	Etude des équations non linéaires	11
3.1	Etude de l'existence de solutions régulières	11
3.2	Solutions faibles dans le cas linéaire	15
3.3	Existence de solutions faibles dans le cas non linéaire	21
3.4	Non unicité des solutions faibles pour le cas non linéaire	27
3.5	Conditions de Rankine-Hugoniot	31
4	Conditions pour obtenir l'unicité des solutions faibles	33
4.1	Entropie	33
4.2	Résolution du problème de Riemann	42
4.2.1	Introduction	42
4.2.2	Auto-similarité	42
4.2.3	Définition des chocs et des détentes	43
4.2.4	Résolution du problème de Riemann pour l'équation de Burgers	43
4.2.5	Un exemple de flux non convexe	47
4.2.6	Calcul de la fonction ψ	49
5	Etude du problème de Burgers avec quelques schémas numériques	51
6	Conclusion	57
A	Résultats intermédiaires	59
B	Programme	61

Chapitre 1

Introduction

Dans ce TER, nous allons nous intéresser à l'étude des lois de conservation scalaires non linéaires, c'est-à-dire de la forme :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0, \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ u(t = 0, x) = u_0(x); \end{cases} \quad (*)$$

L'étude de ces lois de conservation est importante car elles interviennent dans de nombreux problèmes physiques, notamment dans celui du trafic routier.

Cette étude étant assez complexe, il nous faut tout d'abord étudier les lois de conservation scalaire linéaire. A partir de ceci on définira les notions nécessaires pour adapter nos connaissances au cas non linéaire.

Pour finir, on illustrera ce type de problème sur l'exemple de l'équation de Burgers à l'aide de quelques schémas numériques.

Chapitre 2

Un problème physique utilisant l'équation de Burgers

Les mathématiques s'intéressent à des problèmes qui sont mis en évidence par la physique. Si l'on s'intéresse à la dynamique des gaz compressibles par exemple et si nous restreignons le système à une dimension, le gaz est décrit par les trois équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\mu v) = 0 : \text{conservation de la masse} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\mu v) + \frac{\partial}{\partial x}[\mu v^2 + p] = 0 : \text{conservation de la quantité de mouvement} \\ \frac{\partial}{\partial t}E + \frac{\partial}{\partial x}[(E + p)v] = 0 : \text{conservation de l'énergie} \\ pV = nRT : \text{équation d'état des gaz parfaits.} \end{array} \right.$$

Où :

- μ est la masse volumique,
- v est la vitesse,
- p est la pression,
- E est l'énergie totale,
- R est la constante universelle des gaz parfaits,
- n est la quantité de matière,
- T est la température.

Ainsi on peut mettre le problème sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t}X + \frac{\partial}{\partial x}f(X) = 0. \quad (2.1)$$

Preuve :

- Conservation de la masse :

On considère une partie d'un fluide de masse volumique μ délimitée par une surface fermée S (de volume V). Soit \vec{dS} un vecteur élémentaire de cette surface orienté vers l'extérieur à la surface fermée. La partie de fluide a une masse :

$$m = \iiint_V \mu dV$$

et le débit massique sortant de la surface S est égal à :

$$\oint \mu \vec{v} \vec{dS}$$

donc la conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{dm}{dt} = \oint \mu \vec{v} \cdot d\vec{S} + \iiint_V \frac{\partial \mu}{\partial t} dV.$$

Avec la formule d'Ostrogradsky :

$$\oint \mu \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot (\mu \vec{v}) dV$$

et le fait que l'on n'a pas de sources ou de puits, l'équation devient :

$$\iiint_V \left[\nabla \cdot (\mu \vec{v}) + \frac{\partial \mu}{\partial t} \right] dV = 0$$

d'où :

$$\nabla \cdot (\mu \vec{v}) + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0.$$

Puisqu'on se place ici dans le cas où l'écoulement est unidimensionnel, on a finalement :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\mu v) = 0.$$

– Conservation de la quantité de mouvement :

On applique le théorème fondamental de la dynamique, on a donc que la variation de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces appliquées. Ainsi, on recense l'ensemble des forces qui s'exercent sur le volume de fluide, on a alors :

– La quantité de mouvement :

$$\iiint_V \mu \vec{v} dV.$$

Cette quantité est affectée par un transport à travers la surface et par l'action de forces qui s'exprime par :

– pour le flux de quantité de mouvement

$$- \oint \mu \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}),$$

– pour les forces de pression

$$- \oint p d\vec{S}.$$

On néglige les autres forces s'exerçant sur la particule de fluide.

Ainsi on obtient :

$$\iiint_V \frac{\partial(\mu \vec{v})}{\partial t} dV + \oint \mu \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) + \oint p d\vec{S} = 0$$

avec la formule d'Ostrogradsky :

$$\oint \mu \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = \iiint_V \nabla \cdot (\mu \vec{v} \otimes \vec{v}) dV.$$

Donc l'équation devient :

$$\iiint_V \left[\frac{\partial(\mu \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\mu \vec{v} \otimes \vec{v}) + \nabla p \right] dV = 0.$$

D'où :

$$\frac{\partial(\mu \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\mu \vec{v} \otimes \vec{v}) + \nabla p = 0$$

donc puisque ici on se place dans le cas où l'écoulement est unidimensionnel :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mu v) + \frac{\partial}{\partial x} [\mu v^2 + p] = 0.$$

– Conservation de l'énergie :

L'énergie totale par unité de masse est $U + \frac{v^2}{2}$ où U désigne l'énergie interne spécifique. Dans le volume V il y a donc l'énergie :

$$\iiint_V \mu \left(U + \frac{v^2}{2} \right) dV.$$

Cette variation est causée par :

– le flux d'énergie :

$$- \oint \mu \left(U + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v} \cdot d\vec{S},$$

– la puissance des forces de surface :

$$- \oint p \vec{v} \cdot d\vec{S}.$$

Ainsi en appliquant encore une fois la formule d'Ostrogradski on obtient :

$$\iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \left(U + \frac{v^2}{2} \right) \right) + \nabla \cdot \left(\left(\mu \left(U + \frac{v^2}{2} \right) + p \right) \vec{v} \right) \right] dV = 0$$

donc on a ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \left(U + \frac{v^2}{2} \right) \right) + \nabla \cdot \left(\left(\mu \left(U + \frac{v^2}{2} \right) + p \right) \vec{v} \right) = 0$$

et puisque ici on se place dans le cas où l'écoulement est unidimensionnel :

$$\frac{\partial}{\partial t} E + \frac{\partial}{\partial x} [(E + p)v] = 0$$

en posant $\mu \left(U + \frac{v^2}{2} \right) = E$. ■

Pour avoir l'équation de Burgers on peut se placer dans l'approximation des gaz sans pression, c'est-à-dire on suppose que $p = 0$. Ainsi on a le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\mu v) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\mu v) + \frac{\partial}{\partial x} (\mu v^2) = 0. \end{cases}$$

De la deuxième équation on obtient :

$$v \partial_t \mu + \mu \partial_t v + v \partial_x (\mu v) + \mu v \partial_x v = 0.$$

D'où :

$$v \underbrace{(\partial_t \mu + \partial_x (\mu v))}_{=0} + \mu (\partial_t v + v \partial_x v) = 0.$$

Donc on obtient :

$$\partial_t v + v \partial_x v = 0$$

qui est l'équation de Burgers.

Chapitre 3

Etude de l'existence et de l'unicité de solution pour les équations non linéaires

Dans le cours d'analyse numérique, nous avons étudié les lois de conservations scalaires linéaires. Dans ce cas, on sait exprimer des solutions ou du moins trouver un schéma qui approxime au mieux la solution. On peut de plus démontrer l'existence et l'unicité de solution régulière.

On s'intéressera plus particulièrement à l'équation de Burgers : $\partial_t u + \partial_x(u^2) = 0$ qui est une loi de conservation non linéaire, c'est à dire de la forme :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0, \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ u(t = 0, x) = u_0(x); \end{cases} \quad (*)$$

où f est une fonction de classe C^1 et u_0 une donnée initiale bornée.

3.1 Etude de l'existence de solutions régulières

Pour l'équation de Burgers (comme pour les autres équations non linéaires du type (*)), on montre qu'il n'existe pas, en général, de solution régulière au problème défini sur un temps long.

En effet, l'équation de Burgers s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(u^2) = 0, \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ u(t = 0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

Supposons qu'il existe une solution régulière u de ce problème définie sur $[0, T]$, pour $T > 0$.

On a alors :

$$\partial_t u + 2u\partial_x u = 0, \forall t \in [0, T], \forall x \in \mathbb{R}.$$

Posons $c(t, x) = 2u(t, x)$, $\forall t \in [0, T], \forall x \in \mathbb{R}$, u vérifie alors l'équation linéaire :

$$\begin{cases} \partial_t u + c(t, x)\partial_x u = 0, \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ u(t = 0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

On a la définition des caractéristiques suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt}(t, 0, x) = c(t, X(t, 0, x)), \\ X(0, 0, x) = x. \end{cases}$$

La fonction u étant régulière, c l'est aussi.

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, on a donc l'existence locale des courbes caractéristiques associées. On a alors :

$$\frac{d}{dt} [u(t, X(t, 0, x))] = \partial_t u(t, X(t, 0, x)) + \overbrace{\frac{dX}{dt}(t, 0, x)}^{=c(t, X(t, 0, x))} \partial_x u(t, 0, x) = 0.$$

Donc u est constante le long des caractéristiques, d'où :

$$u(t, X(t, 0, x)) = u_0(X(0, 0, x)) = u(0, x) = u_0(x), \forall x, \forall t.$$

En particulier les courbes caractéristique sont globales car c est bornée.

Revenons à la définition des caractéristiques :

$$\frac{dX}{dt}(t, 0, x) = c(t, X(t, 0, x)) = 2u(t, X(t, 0, x)) = 2u_0(x).$$

Cette expression est indépendante de t , donc :

$$X(t, 0, x) = 2u_0(x)t + cst = 2u_0(x)t + x.$$

Les caractéristiques sont des droites dont la pente est $\frac{1}{2u_0(x)}$ et u est constant le long de ces droites.

Fixons $t > 0$, étudions $x \mapsto \Psi_t(x) = x + 2tu_0(x)$, u_0 est régulière et bornée donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \Psi_t = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi_t = -\infty. \end{array} \right.$$

De plus Ψ_t est C^1 , donc par le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe au moins un x_0 tel que $\Psi_t(x_0) = x$.

Ainsi, $u(t, x) = u(t, \Psi_t(x_0)) = u(0, x_0) = u_0(x_0)$.

On a de plus $\Psi_t'(x_0) = 1 + 2tu_0'(x_0)$, donc :

– si u_0 est croissante, alors : $u'(x_0) \geq 0 \Rightarrow \Psi_t' > 0$.

Ainsi Ψ_t est un C^1 -difféomorphisme, donc Ψ_t est bijective et pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique x_0 tel que :

$$\Psi_t(x_0) = x.$$

On a alors une unique solution régulière :

$$u(t, x) = u_0(x_0) = u_0(\Psi_t^{-1}(x)).$$

Par exemple, si $u_0(x) = 4x + 3$, alors $\Psi_t(x_0) = x_0 + 2t(4x_0 + 3)$.

C'est à dire : $\Psi_t(x_0) = x_0 + 8tx_0 + 6t$, d'où : $\Psi_t'(x_0) = 8t + 1 > 0$, donc Ψ_t est bijective et on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! x_0$ tel que $x = \Psi_t(x_0) = x_0(1 + 8t) + 6t$.

Ce qui entraîne : $x_0 = \frac{x-6t}{1+8t}$, donc : $u(t, x) = u_0(x_0) = u_0\left(\frac{x-6t}{1+8t}\right) = 4\frac{x-6t}{1+8t} + 3 = \frac{4x-24t+3+24t}{1+8t}$.

On a donc finalement :

$$u(t, x) = \frac{4x + 3}{1 + 8t}.$$

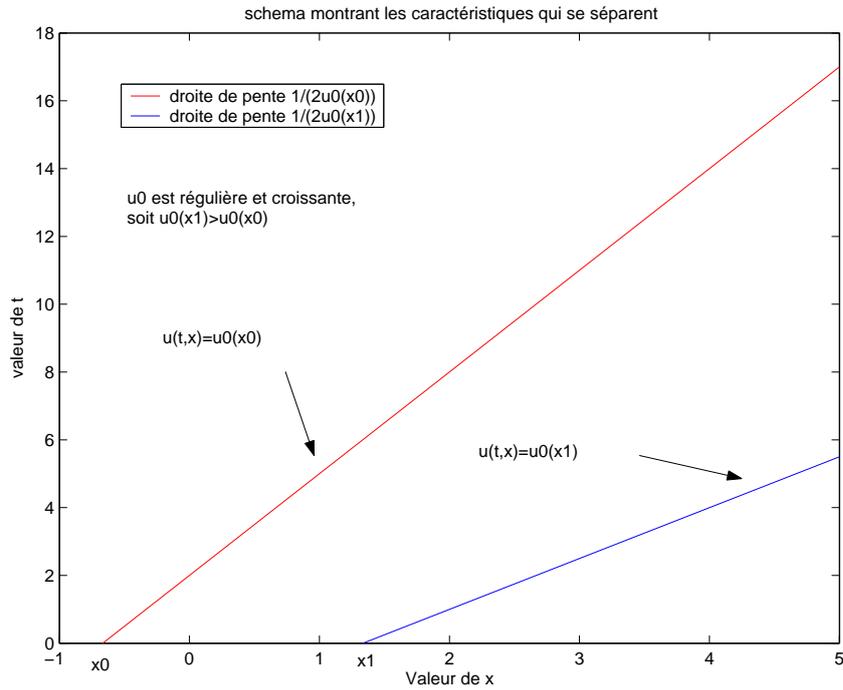


FIGURE 3.1 – Exemple pour l'existence de solution régulière

- Si u_0 n'est pas croissante, alors il existe des valeurs de x_0 en lesquelles $u'_0(x_0) < 0$, d'où $\Psi'_t(x_0) = 1 + 2tu'_0(x_0) < 1$.
Donc Ψ_t sera bijective si et seulement si pour tout x_0 tel que l'on ait $u'_0(x_0) < 0$, alors $\Psi'_t(x_0) > 0$, c'est à dire que l'on doit avoir : $1 + 2tu'_0(x_0) > 0 \Leftrightarrow t > -\frac{1}{2u'_0(x_0)}$.
Ceci doit être vrai pour tout x_0 tel que $u'_0(x_0) < 0$ donc pour l'infimum, donc Ψ_t est bijective si et seulement si $t > -\frac{1}{2\inf u'_0}$.
Il existe donc au moins un t (et même une infinité) tel que Ψ_t n'est pas bijective.
Choisissons un tel t . Soit $x \in \mathbb{R}$.
S'il existe $x_1 \neq x_2$ tel que $\Psi_t(x_1) = \Psi_t(x_2) = x$,
 u étant constante le long de la caractéristique issue de x_1 , on a :

$$u(t, x) = u_0(x_1).$$

u étant constante le long de la caractéristique issue de x_2 , on a :

$$u(t, x) = u_0(x_2).$$

Ce qui entraîne : $u_0(x_1) = u_0(x_2)$, on a alors : $x_1 + 2tu_0(x_1) = x_2 + 2tu_0(x_2)$.
D'où : $x_1 - x_2 = -2t(u_0(x_1) - u_0(x_2)) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$.
Or, on a supposé $x_1 \neq x_2$, on a donc une contradiction.
Donc il n'existe pas de solution régulière jusqu'au temps t en question.

On a dans ce cas :

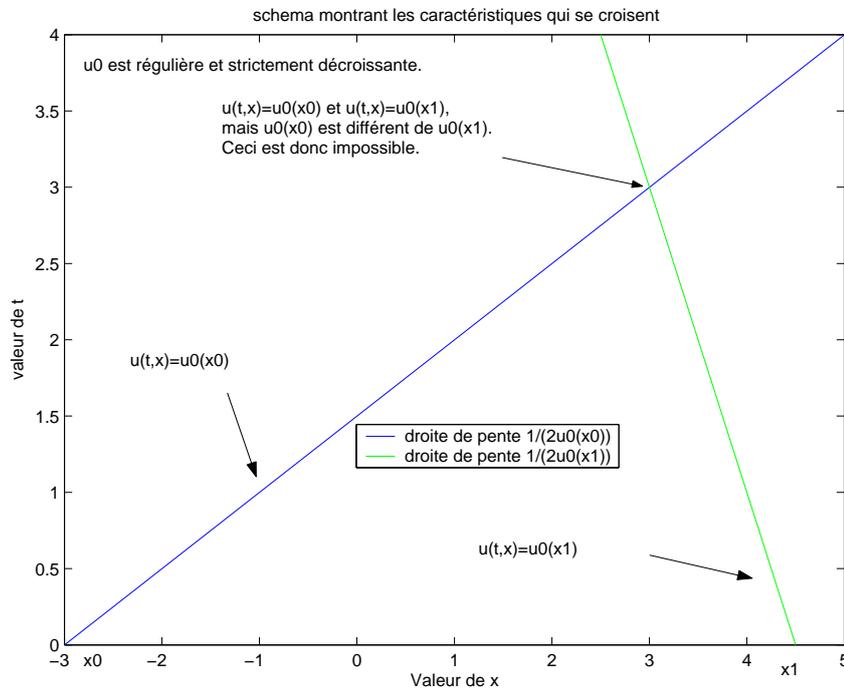


FIGURE 3.2 – Exemple de non existence de solution régulière

On est par exemple dans le cas : $u_0(x) = -2x + 1$, donc :

$$\Psi_t(x_0) = x_0 + 2t(-2x_0 + 1) = x_0(1 - 4t) + 2t.$$

Et ainsi : $\Psi'_t(x_0) = 1 - 4t$, d'où : $\Psi'_t(x_0) > 0 \Leftrightarrow t < \frac{1}{4}$.

Donc Ψ_t est bijective si et seulement si $t < \frac{1}{4}$ et dans ce cas :

$$u(t, x) = u_0(x_0),$$

avec $x = x_0(1 - 4t) + 2t \implies x_0 = \frac{x-2t}{1-4t}$.

D'où :

$$u(t, x) = \frac{-2x + 4t + 1 - 4t}{1 - 4t} = \frac{1 - 2x}{1 - 4t}.$$

Si $t = \frac{1}{4}$, $\Psi'_t(x_0) = 0$ et Ψ_t est constant.

On a donc $x_1 \neq x_2$ et $\Psi(x_1) = \Psi(x_2)$, ce qui est impossible.

Il n'existe donc pas de solution régulière à ce problème pour certains temps t .

On introduit alors la notion de solution faible.

3.2 Solutions faibles dans le cas linéaire

Regardons tout d'abord ces propriétés pour des lois de conservation linéaires.

Définition 1 Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. et soit c de classe C^1 .

On dit qu'une fonction $u \in L^\infty([0, \infty[\times \mathbb{R})$ est solution faible du problème :

$$\begin{cases} \partial_t u + c(t, x) \partial_x u = 0, \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ u(t = 0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (**)$$

si et seulement si, on a :

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u(\partial_t \phi + \partial_x(c(t, x)\phi)) dt dx + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(0, x) dx = 0$$

pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R})$.

Ces solutions faibles ont alors plusieurs propriétés.

Proposition 1 Toute solution régulière (de classe C^1) du problème $(**)$ est aussi une solution faible.

Preuve :

Soit u une solution régulière du problème $(**)$, on a alors :

$$\partial_t u + c(t, x) \partial_x u = 0.$$

Soit $\phi \in C_c^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R})$, alors :

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (\partial_t u + c(t, x) \partial_x u) \phi dx dt = 0 \\ \Leftrightarrow & \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \partial_t u \phi dx dt + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} c(t, x) \partial_x u \phi dx dt = 0. \end{aligned}$$

u est régulière et ϕ est C^∞ à support compact donc $\partial_t u \phi$ est à support compact donc de module intégrable.

On peut donc appliquer le théorème de Fubini :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{+\infty} \partial_t u \phi dt \right) dx + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} c(t, x) \partial_x u \phi dx dt = 0.$$

Par intégration par parties, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\overbrace{[u\phi]_0^{+\infty}}^{=-u_0(x)\phi(0,x)} - \int_0^{+\infty} u \partial_t \phi dt \right) dx + \int_{\mathbb{R}^+} \left(\overbrace{[u(t, x)c(t, x)\phi(t, x)]_{-\infty}^{+\infty}}^{=0} - \int_{\mathbb{R}} u \partial_x(c(t, x)\phi) dx \right) dt = 0.$$

Par Fubini, on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} u(0, x)\phi(0, x) + \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} u \partial_t \phi dx dt + \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} u \partial_x(c(t, x)\phi) dx dt = 0 \\ \Leftrightarrow & \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u(\partial_t \phi + \partial_x(c(t, x)\phi)) dt dx + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(0, x) dx = 0. \end{aligned}$$

D'après la définition précédente u est bien solution faible du problème $(**)$. ■

Réciproquement, on a :

Proposition 2 *Toute solution faible u du problème (**), qui de plus, est de classe C^1 est alors solution au sens usuel et vérifie $u(0, x) = u_0(x)$.*

Preuve :

Soit u une solution faible du problème (**) qui soit également de classe C^1 .

On a $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $u \in L^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R}) \cap C^1([0, +\infty[\times \mathbb{R})$.

$\forall \phi \in C_c^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R})$,

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u(\partial_t \phi + \partial_x(c(t, x)\phi)) dt dx + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(0, x) dx = 0.$$

Prenons Ψ à support compact dans $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, donc $\Psi(0, x) = 0$.

On a ainsi :

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u(\partial_t \Psi + \partial_x(c(t, x)\Psi)) dx dt = 0.$$

En appliquant Fubini, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty (u \partial_t \Psi dt) dx + \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} u \partial_x(c(t, x)\Psi) dx dt = 0.$$

Par intégration par parties, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\overbrace{[u\Psi]_0^{+\infty}}^{=0} - \int_0^\infty \partial_t u \Psi dt \right) dx + \int_{\mathbb{R}^+} \left(\overbrace{[uc(t, x)\Psi]_{-\infty}^{+\infty}}^{=0} - \int_{\mathbb{R}} \partial_x uc(t, x)\Psi dx \right) dt = 0.$$

En réappliquant Fubini, on a :

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (\partial_t u + c(t, x)\partial_x u)\Psi dx dt = 0.$$

Ceci est vrai pour toute $\Psi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times]0, +\infty[)$, donc $\partial_t u + c(t, x)\partial_x u = 0$ presque partout sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

Or, $\partial_t u + c(t, x)\partial_x u = 0$ est continue, donc : $\partial_t u + c(t, x)\partial_x u = 0$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

Prenons maintenant $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$, donc :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u(\partial_t \phi + \partial_x(c(t, x)\phi)) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(0, x) = 0.$$

Par intégration par parties et Fubini, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} u(0, x)\phi(0, x) dx + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \overbrace{(\partial_t u + c(t, x)\partial_x u)\phi}^{=0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} dx dt - \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(0, x) = 0.$$

On a donc :

$$\int_{\mathbb{R}} (u(0, x) - u_0(x))\phi(0, x) dx = 0.$$

Ceci est vrai pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ et $x \mapsto u(0, x) - u_0(x)$ est continue donc :

$$u(0, x) - u_0(x) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

D'où : $u(0, x) = u_0(x), \forall x \in \mathbb{R}$. ■

On a également le théorème suivant :

Théorème 1 Pour toute donnée initiale $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, il existe une unique solution faible $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ du problème (**) donnée par :

$$u(t, x) = u_0(X(0, t, x))$$

pour presque tout t et x .

Preuve :

Soit une donnée initiale $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$.

– Existence :

Soit $\phi \in C^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R})$, calculons :

$$I = \int_0^{+\infty} u_0(X(0, t, x)) (\partial_t \phi(t, x) + \partial_x (c(t, x) \phi(t, x))) dx dt.$$

Effectuons le changement de variable $y = X(0, t, x)$.

On a alors : $x = X(t, 0, y)$, d'où :

$$I = \int_0^{+\infty} u_0(y) [\partial_t \phi(t, X(t, 0, y)) + \partial_x (c(t, X(t, 0, y)) \phi(t, X(t, 0, y)))] |\partial_x X(t, 0, y)| dy dt.$$

Soient $x \in \mathbb{R}$; $s, t \in [0, +\infty[$, on a alors :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} [X(t, s, x)] = c(t, X(t, s, x)) \\ X(s, s, x) = x. \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} [\partial_x X(t, s, x)] = \partial_x c(t, X(t, s, x)) \partial_x X(t, s, x) \\ \partial_x X(s, s, x) = 1. \end{cases} \quad (***)$$

D'où, en posant $a(t) = \partial_x c(t, X(t, s, x))$, on a :

$$\partial_x X(t, s, x) = 1 \exp(a(t)) > 0,$$

donc $|\partial_x X(t, 0, y)| = \partial_x X(t, 0, y)$ (avec $s = 0, x = y$).

D'où, on obtient :

$$I = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u_0(y) [\partial_t \phi(t, X(t, 0, y)) + \partial_x c(t, X(t, 0, y)) \phi(t, X(t, 0, y)) + c(t, X(t, 0, y)) \partial_x \phi(t, X(t, 0, y))] \partial_x X(t, 0, y) dy dt.$$

De plus,

$$\frac{d}{dt} [\phi(t, X(t, 0, y))] = \partial_t \phi(t, X(t, 0, y)) + \frac{d}{dt} \overbrace{[X(t, 0, y)]}^{c(t, X(t, 0, y))} \partial_x \phi(t, X(t, 0, y)).$$

D'où :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \left(\frac{d}{dt} [\phi(t, X(t, 0, y))] + \partial_x c(t, X(t, 0, y)) \phi(t, X(t, 0, y)) \right) \partial_x X(t, 0, y) dy dt \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \frac{d}{dt} [\phi(t, X(t, 0, y)) \partial_x X(t, 0, y)] dy dt \text{ d'après (***)}. \end{aligned}$$

On applique le théorème de Fubini car :

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |u_0(y)| \left| \frac{d}{dt} [\phi(t, X(t, 0, y)) \partial_x X(t, 0, y)] \right| dy dt \\ & \leq \underbrace{\|u_0\|_{\infty}}_{\text{car } u_0 \in L^\infty} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d}{dt} \overbrace{[\phi(t, X(t, 0, y)) \partial_x X(t, 0, y)]}^{\substack{\in C_c^\infty \\ \text{continue}}} \right| dy dt < +\infty. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \frac{d}{dt} [\phi(t, X(t, 0, y)) \partial_x X(t, 0, y)] dy dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} [\phi(t, X(t, 0, y)) \partial_x X(t, 0, y)] dt dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \phi(0, \overbrace{X(0, 0, y)}^{=y}) \overbrace{\partial_x X(0, 0, y)}^{=1} dy \text{ car } \phi \in C_c^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R}) \\ &= - \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \phi(0, y) dy. \end{aligned}$$

Donc :

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \overbrace{u_0(X(0, t, x))}^{u(t, x)} (\partial_t \phi(t, x) + \partial_x (c(t, x) \phi(t, x))) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \phi(0, x) dx = 0.$$

Donc $u(t, x) = u_0(X(0, t, x))$ est bien solution faible du problème (**).

– Unicité :

Par linéarité du problème il suffit de montrer que si $u_0 \equiv 0$, alors $u \equiv 0$.

Soit $u \in L^\infty$ tel que :

$$\begin{cases} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u(t, x) (\partial_t \phi(t, x) + \partial_x (c(t, x) \phi(t, x))) dx dt = 0, \\ \forall \phi \in C_c^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R}). \end{cases} \quad (3.1)$$

Soit Ψ régulière à support compact, cherchons alors ϕ régulière à support compact telle que :

$$\partial_t \phi + \partial_x (c\phi) = \Psi. \quad (3.2)$$

Les caractéristiques associées sont définies par :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X(t, s, x) = c(t, X(t, s, x)), \\ X(s, s, x) = x. \end{cases}$$

Fixons $s = 0$ et x . ϕ est solution de (3.2) si et seulement si :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\phi(t, X(t, 0, x))] &= \partial_t \phi(t, X(t, 0, x)) + \frac{d}{dt} [X(t, 0, x)] \partial_x \phi(t, X(t, 0, x)) \\ &= \partial_t \phi(t, X(t, 0, x)) + c(t, X(t, 0, x)) \partial_x \phi(t, X(t, 0, x)) \\ &= \Psi(t, X(t, 0, x)) - \phi(t, X(t, 0, x)) \partial_x c(t, X(t, 0, x)). \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\frac{d}{dt} [\phi(t, X(t, 0, x)) + \partial_x c(t, X(t, 0, x)) \phi(t, X(t, 0, x))] = \Psi(t, X(t, 0, x)).$$

Solution homogène de cette équation différentielle :

$$\phi_0(t, X(t, 0, x)) = g(x) \exp\left(-\int_0^t \partial_x c(s, X(s, 0, x)) ds\right).$$

Pour trouver la solution particulière ϕ_p , utilisons la méthode de variation de la constante. Cherchons ϕ_p sous la forme, $\phi_p(t, X(t, 0, x)) = \lambda(x, t) \exp(-\int_0^t \partial_x c(s, X(s, 0, x)) ds)$, alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\phi_p(t, X(t, 0, x))] &= \frac{d}{dt}[\lambda(x, t)] \exp\left(-\int_0^t \partial_x c(s, X(s, 0, x)) ds\right) \\ &\quad - \partial_x c(t, X(t, 0, x)) \lambda(x, t) \exp\left(-\int_0^t \partial_x c(s, X(s, 0, x)) ds\right). \end{aligned}$$

D'où, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\phi_p(t, X(t, 0, x))] + \partial_x c(t, X(t, 0, x)) \phi_p(t, X(t, 0, x)) &= \frac{d}{dt}[\lambda(x, t)] \times \\ &\quad \exp\left(-\int_0^t \partial_x c(s, X(s, 0, x)) ds\right) \\ &= \Psi(t, X(t, 0, x)). \end{aligned}$$

donc :

$$\frac{d}{dt}[\lambda(x, t)] = \frac{\Psi(t, X(t, 0, x))}{\exp\left(-\int_0^t \partial_x c(s, X(s, 0, x)) ds\right)}.$$

Et ainsi, on obtient :

$$\lambda(x, t) = -\int_t^{+\infty} \frac{\Psi(w, X(w, 0, x))}{\exp\left(-\int_0^w \partial_x c(s, X(s, 0, x)) ds\right)} dw.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \phi(t, X(t, 0, x)) &= g(x) \exp\left(-\int_0^t \partial_x c(s, X(s, 0, x)) ds\right) \\ &\quad + \lambda(x, t) \exp\left(-\int_0^t \partial_x c(s, X(s, 0, x)) ds\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^t \partial_x c(s, X(s, 0, x)) ds\right) \times \\ &\quad \left(g(x) - \int_t^{+\infty} \frac{\Psi(w, X(w, 0, x))}{\exp\left(-\int_0^w \partial_x c(s, X(s, 0, x)) ds\right)} dw\right). \end{aligned}$$

Choisissons alors g pour que ϕ soit à support compact. Prenons $g \equiv 0$, alors :

$$\phi(t, X(t, 0, x)) = -\exp\left(-\int_0^t \partial_x c(s, X(s, 0, x)) ds\right) \int_t^{+\infty} \frac{\Psi(w, X(w, 0, x))}{\exp\left(-\int_0^w \partial_x c(s, X(s, 0, x)) ds\right)} dw.$$

Donc en posant $x = X(0, t, y)$:

$$\phi(t, y) = -\exp\left(-\int_0^t \partial_x c(s, X(s, t, y)) ds\right) \int_t^{+\infty} \frac{\Psi(w, X(w, t, y))}{\exp\left(-\int_0^w \partial_x c(s, X(s, t, y)) ds\right)} dw$$

. Vérifions que ϕ est bien à support compact :

Soit $[0, T] \times [-M, M]$ le support de Ψ , alors $\Psi \equiv 0$ en dehors de $[0, T] \times [M, -M]$.

- Si $t \geq T$, alors $w \geq t \geq T$ donc $\Psi(w, X(w, t, y)) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$.
On a donc : $\phi(t, y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$.
- Soit $t \in [0, T]$, on a :

$$\frac{d}{dt}[X(w, t, y)] = c(w, X(w, t, y)),$$

d'où :

$$X(w, t, y) = \int_t^w c(s, X(s, t, y)) ds + y.$$

Et ainsi :

$$|X(w, t, y) - y| \leq \int_t^w |c(s, X(s, t, y))| ds \leq \|c\|_\infty(w - t) \leq \|c\|_\infty(T - t).$$

- Si $y < -M - \|c\|_\infty(T - t)$, alors :

$$\begin{aligned} X(w, t, y) &= X(w, t, y) - y + y \leq \|c\|_\infty(T - t) + y \\ &< \|c\|_\infty(T - t) - M - \|c\|_\infty(T - t) = -M, \end{aligned}$$

donc :

$$X(w, t, y) < -M \Rightarrow \Psi(w, X(w, t, y)) = 0, \forall w > t.$$

D'où, $\phi(t, y) = 0$.

- Si $y > M + \|c\|_\infty(T - t)$:

On a : $X(w, t, y) - y \geq -\|c\|_\infty(T - t)$, ce qui entraîne que :

$$X(w, t, y) = X(w, t, y) - y + y \geq -\|c\|_\infty(T - t) + y > -\|c\|_\infty(T - t) + M + \|c\|_\infty(T - t).$$

C'est à dire que : $X(w, t, y) > M$ et donc $\Psi(w, X(w, t, y)) = 0 \forall w > t$.

D'où $\phi(t, y) = 0$.

Donc $\text{Supp } \phi \subset [0, T] \times [-M - \|c\|_\infty T, M + \|c\|_\infty T]$.

ϕ est donc bien à support compact.

$$\begin{cases} x \mapsto \exp(x) \text{ est } C^\infty \text{ et } \forall x, \exp(x) \neq 0 \\ \Psi \text{ est } C^\infty \text{ à support compact.} \end{cases}$$

Donc, ϕ donnée par (3.2) est bien définie et C^∞ .

ϕ est donc C^∞ à support compact et vérifie :

$$\partial_t \phi + \partial_x(c\phi) = \Psi.$$

Prenons donc cette fonction test ϕ dans (3.1) :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u(t, x) (\partial_t \phi(t, x) + \partial_x(c(t, x)\phi(t, x))) dx dt &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u(t, x) \Psi(t, x) dx dt &= 0, \forall \Psi \in C_c^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Or $C_c^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R})$ est dense dans $L^1([0, +\infty[\times \mathbb{R})$, donc :

$$0 = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u(t, x) \Psi(t, x) dt dx, \forall \Psi \in L^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$$

En particulier, pour K compact inclus dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, $\Psi = u1_K$.

Donc $\int_K |u|^2 = 0, \forall K$ et ainsi $u \equiv 0$ p.p. ■

On va donc maintenant s'intéresser au cas non linéaire.

3.3 Existence de solutions faibles dans le cas non linéaire

Définition 2 Une fonction $u \in L^1_{loc}([0, \infty[\times \mathbb{R})$, telle que $f(u) \in L^1_{loc}$, est solution faible du problème :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0, \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ u(t = 0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

si on a :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (u(t, x) \partial_t \phi(t, x) + f(u(t, x)) \partial_x \phi(t, x)) dt dx + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \phi(0, x) dx = 0$$

pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty([0, \infty[\times \mathbb{R})$.

Proposition 3 Si $u \in C^1([0, \infty[\times \mathbb{R})$ est une solution du problème au sens classique, alors c'est une solution faible.

Preuve :

Soit u une solution régulière du problème (*), on a alors :

$$\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0.$$

Soit $\phi \in C_c^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (\partial_t u + \partial_x(f(u))) \phi dx dt = 0 \\ \Leftrightarrow & \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \partial_t u \phi dx dt + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \partial_x(f(u)) \phi(x, t) dx dt = 0. \end{aligned}$$

$u \in C^1([0, \infty[\times \mathbb{R})$, f est de classe C^1 et ϕ est C^∞ à support compact donc $\phi \partial_t u$ et $\phi \partial_x(f(u))$ sont continues et à support compact, donc de modules intégrables.

On peut donc appliquer le théorème de Fubini :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{+\infty} \phi \partial_t u dt \right) dx + \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} \phi \partial_x(f(u)) dx \right) dt = 0.$$

On effectue une intégration par parties :

$$\int_{\mathbb{R}} \left([u\phi]_0^{+\infty} - \int_0^\infty u \partial_t \phi dt \right) dx + \int_{\mathbb{R}^+} \left([f(u(t, x))\phi(t, x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(u) \partial_x \phi dx \right) dt.$$

Ce qui équivaut à :

$$\int_{\mathbb{R}} u(0, x) \phi(0, x) dx + \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} u \partial_t \phi dt dx + \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} f(u) \partial_x \phi dx dt = 0.$$

Ensuite on réapplique Fubini, et on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} u(0, x) \phi(0, x) + \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} u \partial_t \phi dx dt + \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} f(u) \partial_x(\phi) dx dt. \\ \Leftrightarrow & \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u \partial_t \phi + f(u) \partial_x \phi dt dx + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \phi(0, x) dx = 0. \end{aligned}$$

D'après la définition précédente u est bien solution faible du problème (*). ■

Réciproquement, on a :

Proposition 4 Soit u solution faible du problème (*). Si de plus, $u \in C^1([0, +\infty[\times \mathbb{R})$, alors u est solution du problème (*) au sens classique.

Preuve :

Soit u une solution faible du problème (*).

On a $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $u \in L^1_{loc}([0, +\infty[\times \mathbb{R}) \cap C^1([0, +\infty[\times \mathbb{R})$.

Soit $\phi \in C_c^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R})$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (u \partial_t \phi + f(u) \partial_x \phi) dt dx + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \phi(0, x) dx = 0.$$

Prenons Ψ à support compact dans $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ alors $\Psi(0, x) = 0$. On a donc :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (u \partial_t \Psi + f(u) \partial_x \Psi) dx dt = 0.$$

En appliquant Fubini, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty u \partial_t \Psi dt dx + \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} f(u) \partial_x \Psi dx dt = 0.$$

Par intégration par parties, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} \left([u \Psi]_0^{+\infty} - \int_0^\infty \Psi \partial_t u dt \right) dx + \int_{\mathbb{R}^+} \left([f(u) \Psi]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} \Psi \partial_x f(u) dx \right) dt = 0.$$

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \Psi \partial_t u dt dx + \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} \Psi \partial_x f(u) dx dt = 0.$$

En réappliquant Fubini, on a :

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (\partial_t u + \partial_x f(u)) \Psi dx dt = 0.$$

Ceci est vrai pour tout $\Psi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times]0, +\infty[)$, donc $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ presque partout sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Or f est de classe C^1 , u est de classe C^1 donc $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ est continue. Il en résulte que : $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

Prenons maintenant $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$, on a :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (u \partial_t \phi + f(u) \partial_x \phi) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \phi(0, x) dx = 0.$$

Par intégration par parties et Fubini, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} u(0, x) \phi(0, x) dx + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (\partial_t u + \partial_x f(u)) \phi dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \phi(0, x) dx = 0.$$

Soit :

$$\int_{\mathbb{R}} (u(0, x) - u_0(x)) \phi(0, x) dx = 0.$$

Ceci est vrai pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ et $x \mapsto u(0, x) - u_0(x)$ est continue, donc :

$$u(0, x) - u_0(x) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Ainsi, on a bien : $u(0, x) = u_0(x), \forall x \in \mathbb{R}$. ■

Théorème 2 de Kolomogorov

Soient Ω un ouvert quelconque de \mathbb{R}^d et $(f_n)_n$ une suite bornée de $L^p(\Omega)$, avec $1 \leq p \leq \infty$. On suppose que :

1. Pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout ouvert ω borné tel que $\bar{\omega} \subset \Omega$, il existe $\lambda > 0$, avec $\lambda < d(\omega, R \setminus \Omega)$ tel que $\forall f \in f_n, \forall h \in \mathbb{R}^d, |h| \leq \lambda \Rightarrow \|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} \leq \epsilon$.
2. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ouvert borné ω , tel que $\bar{\omega} \subset \Omega$ et tel que $\forall f \in f_n, \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \epsilon$.

Alors (f_n) est relativement compact dans $L^p(\omega)$.

Dans ce théorème, $\tau_h f$ désigne la fonction translatée définie par : $\tau_h f(x) = f(x + h)$.

La première condition s'apparente à la condition d'uniforme continuité du théorème d'Ascoli, la seconde nous dit que les fonctions de $(f_n)_n$ doivent être "uniformément petites" en norme L^p près du bord de Ω et à l'infini.

Preuve :

Démontrons ce théorème dans $L^1(\Omega)$.

Soit $(f_n)_n$ bornée dans $L^1(\Omega)$. On fixe $\epsilon > 0$ et on choisit un ouvert ω vérifiant la seconde hypothèse. On veut recouvrir (f_n) par un nombre fini de boules de rayon ϵ , ce qui impliquera la compacité relative.

On considère alors $(f_n)|_\omega$, l'ensemble des restrictions à ω de $(f_n)_n$. Grâce à la première hypothèse on peut régulariser, par convolution avec une suite régularisante $(\rho_\delta)_\delta$, les éléments de $(f_n)|_\omega$ de façon uniforme.

On pose pour cela, $v_n = (f_n)|_\omega$ ainsi que $v_{n,\delta} = (f_n * \rho_\delta)|_\omega$, la convolée de f_n avec ρ_δ , telles que $\rho_\delta = \frac{1}{\delta^d} \rho(\frac{x}{\delta})$ et que l'intégrale de ρ sur Ω vaut 1. Cette convolution a bien un sens car l'ouvert ω reste loin du bord de Ω , ce qui permet de définir le produit de convolution dès que le support de ρ_δ est suffisamment petit. Sur ω , le support ne sortira pas de Ω si $|\delta| < d(\bar{\omega}, \partial\Omega)$ (inclus dans la boule $B(0, \delta)$). On a $v_{n,\delta} = \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x) \rho_\delta(y - x) dx$, et par hypothèse $\bar{\omega}$ est compact.

Il nous faut maintenant choisir $\delta > 0$ tel que $\|v_{n,\delta} - v_n\|_{L^1(\omega)} \leq \epsilon, \forall n$, uniformément.

On a :

$$\|v_{n,\delta} - v_n\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^d} \left| v_n(x) - \int v_n(y) \rho_\delta(x - y) dy \right| dx.$$

Etant donné que $v_n(x)$ ne dépend pas de y , on a :

$$\|v_{n,\delta} - v_n\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\Omega} (v_n(x) - v_n(y)) \rho_\delta(x - y) dy \right| dx.$$

Cette intégrale est nulle quand x et y sont éloignés, soit :

$$\|v_{n,\delta} - v_n\|_{L^1} = \int_{\Omega} \int_{B(0,\delta)} |v_n(x) - v_n(x + h)| |\rho_\delta(h)| dh dx.$$

On pose ensuite $h = z\delta$,

$$\|v_{n,\delta} - v_n\|_{L^1} = \int_{\Omega} \int_{B(0,1)} |v_n(x) - v_n(x + \delta z)| |\rho(z)| dz dx$$

$|\rho(z)|$ est borné par C , on applique Fubini :

$$\|v_{n,\delta} - v_n\|_{L^1} \leq C \int_{B(0,1)} \left(\int_{\Omega} |v_n(x) - v_n(x + \delta z)| dx \right) dz.$$

A z fixé, c'est une translation de pas δ , donc :

$$\|v_{n,\delta} - v_n\|_{L^1} \leq C\epsilon \text{ uniformément par rapport à } n.$$

On fixe alors $\delta = \lambda$ tel que $|h| \leq \delta$.

On a donc obtenu que $\|v_{n,\delta} - v_n\|_{L^1} \leq \epsilon$, ceci pour tout n , uniformément. Il en résulte que $v_{n,\delta}$ est continue sur $\bar{\omega}$. De plus, elle est bornée et vérifie l'hypothèse d'équicontinuité du théorème d'Ascoli car $(f_n)_n$ est bornée dans $L^1(\Omega)$. On peut donc appliquer le théorème d'Ascoli, il en résulte que $(v_{n,\delta})_n$ est relativement compacte dans $C^0(\bar{\omega})$ donc dans $L^1(\bar{\omega})$ car l'injection de $C^0(\bar{\omega})$ dans $L^1(\bar{\omega})$ est continue.

Par suite, il existe $(g_i)_{1 \leq i \leq N}$ appartenant à $L^1(\bar{\omega})$ tel que $(v_{n,\delta})_n \subset \bigcup_{i=1}^N B(g_i, \epsilon)$, c'est à dire qu'il existe un nombre fini de boules de rayon ϵ , dans $L^1(\omega)$, qui recouvrent $(v_{n,\delta})_n$. Et comme $\|v_{n,\delta} - v_n\|_{L^1(\omega)} \leq \epsilon$, pour tout v_n , il existe un nombre fini de boules de rayon 2ϵ qui recouvre $(f_n)_{n|\omega}$ dans $L^1(\omega)$. Ceci montre que $(f_n)_{|\omega}$ est relativement compact dans $L^1(\omega)$.

Pour conclure, on regarde maintenant sur Ω . On définit \bar{g}_i , le prolongement de g_i par 0 sur Ω et on obtient que $(f_n)_n \subset \bigcup_{i=1}^N B(\bar{g}_i, 3\epsilon)$ car $\|v_n - g_i\|_{L^1(\omega)} \leq 2\epsilon$ et $\|f_n\|_{L^1(\Omega \setminus \omega)} \leq \epsilon$. Nous avons donc montré que $(f_n)_n$ est compacte dans $L^1(\Omega)$. \blacksquare

Théorème 3 *Pour tout $T > 0$ et toute donnée initiale $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$, il existe au moins une solution faible $u \in L^\infty(]0, T[\times \mathbb{R})$ au problème :*

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ u(t = 0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

Preuve :

On a le problème :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ u(t = 0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

Or ce problème étant trop difficile à résoudre, on rajoute un terme du type de l'équation de la chaleur (que l'on sait résoudre), on obtient alors le problème suivant :

Soit $\epsilon > 0$,

$$(P_\epsilon) \begin{cases} \partial_t u_\epsilon + \partial_x f(u_\epsilon) - \epsilon \partial_x^2 u_\epsilon = 0 \\ u_\epsilon(t = 0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

(P_ϵ) admet alors une unique solution sous de bonnes hypothèses sur u_0 et f ; par exemple $u_0 \in L^\infty$ et à support compact.

(P_ϵ) vérifie le principe du maximum :

$$\|u_\epsilon\|_{L^\infty} \leq \|u_0\|_{L^\infty}. \quad (3.3)$$

En multipliant (P_ϵ) par $\phi \in C_c^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R})$, on obtient :

$$\partial_t u_\epsilon \phi + \partial_x f(u_\epsilon) \phi - \epsilon \phi \partial_x^2 u_\epsilon = 0.$$

On intègre alors cette expression, ce qui nous donne :

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (\partial_t u_\epsilon \phi + \partial_x f(u_\epsilon) \phi - \epsilon \phi \partial_x^2 u_\epsilon) dx dt = 0.$$

En séparant les intégrales, et en appliquant le théorème de Fubini car $\partial_t u_\epsilon \phi$ est continue à support compact, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \partial_t u_\epsilon \phi dt dx + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \partial_x f(u_\epsilon) \phi dx dt - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \epsilon \phi \partial_x^2 u_\epsilon dx dt = 0.$$

On intègre alors par parties pour obtenir :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\underbrace{[u_\epsilon \phi]_0^{+\infty}}_{=-u_\epsilon(0,x)\phi(0,x)=-u_0(x)\phi(0,x)} - \int_0^{+\infty} u_\epsilon \partial_t \phi dt \right) dx + \int_0^{+\infty} \left(\underbrace{[f(u_\epsilon)\phi]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{\mathbb{R}} f(u_\epsilon) \partial_x \phi dx \right) dt - \epsilon \int_0^{+\infty} \left(\underbrace{[\phi \partial_x u_\epsilon]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{\mathbb{R}} \partial_x \phi \partial_x u_\epsilon dx \right) dt = 0.$$

D'où en réappliquant Fubini, on a :

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (u_\epsilon \partial_t \phi + f(u_\epsilon) \partial_x \phi - \epsilon \partial_x \phi \partial_x u_\epsilon) dx dt = - \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \phi(0, x) dx.$$

Il existe G tel que $G'(u) = u f'(u)$.

Multiplions, alors (P_ϵ) par u_ϵ , on a :

$$u_\epsilon \partial_t u_\epsilon + u_\epsilon \partial_x f(u_\epsilon) - \epsilon u_\epsilon \partial_x^2 u_\epsilon = 0.$$

D'où :

$$\partial_t \frac{u_\epsilon^2}{2} + \underbrace{f'(u_\epsilon) u_\epsilon}_{=G'(u_\epsilon)} \partial_x u_\epsilon - \epsilon u_\epsilon \partial_x^2 u_\epsilon = 0.$$

On intègre alors sur \mathbb{R} ,

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}} \frac{u_\epsilon^2}{2} dx + \overbrace{\int_{\mathbb{R}} \partial_x G(u_\epsilon) dx}^{=0} \rightarrow 0 \text{ à l'infini} - \epsilon \int_{\mathbb{R}} u_\epsilon \partial_x^2 u_\epsilon dx = 0.$$

Par intégration par parties, on obtient :

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}} \frac{u_\epsilon^2}{2} dx - \epsilon \left(\overbrace{[u_\epsilon \partial_x u_\epsilon]_{-\infty}^{+\infty}}^{=0} - \int_{\mathbb{R}} |\partial_x u_\epsilon|^2 dx \right) = 0,$$

d'où l'expression :

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}} \frac{u_\epsilon^2}{2} dx + \epsilon \int_{\mathbb{R}} |\partial_x u_\epsilon|^2 dx = 0.$$

Soit $T > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^T \partial_t \int_{\mathbb{R}} \frac{u_\epsilon^2}{2} dx + \epsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\partial_x u_\epsilon|^2 dx &= 0 \\ \int_{\mathbb{R}} \frac{u_\epsilon^2(T, x)}{2} dx + \epsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\partial_x u_\epsilon(t, x)|^2 dx dt &= \int_{\mathbb{R}} \frac{u_\epsilon^2(0, x)}{2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{u_0^2(x)}{2} dx \\ \frac{1}{2} \|u_\epsilon(T, \cdot)\|_{L^2}^2 + \epsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\partial_x u_\epsilon(t, x)|^2 dx dt &= \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

donc :

$$\epsilon \|\partial_x u_\epsilon\|_{L^2(]0, T[\times \mathbb{R})}^2 \leq c$$

donc $\sqrt{\epsilon} \partial_x u_\epsilon$ est bornée dans L^2 et ainsi :

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \epsilon \partial_x \phi \partial_x u_\epsilon dx dt = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\epsilon} \overbrace{\partial_x \phi}^{\text{borne } L^2} \underbrace{\sqrt{\epsilon} \partial_x u_\epsilon}_{\text{borne } L^2} dx dt \rightarrow 0.$$

On a également $\|u_\epsilon(t, \cdot)\|_{L^2} \leq \|u_0\|_{L^2}$, donc on peut extraire une sous suite u_{ϵ_n} qui tend faiblement vers u dans L^2 .

On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{\epsilon_n} \rightharpoonup u \text{ dans } L^2_{\text{loc}} \\ \text{et } \partial_t \phi \in L^2 \end{array} \right. \quad \text{donc } \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u_{\epsilon_n} \partial_t \phi \rightarrow \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u \partial_t \phi.$$

Il faut maintenant passer à la limite dans $\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} f'(u_{\epsilon_n}) \partial_x \phi dx dt$.

D'après (P_{ϵ_n}) , on a :

$$\partial_t u_{\epsilon_n} + f'(u_{\epsilon_n}) \partial_x u_{\epsilon_n} = \epsilon_n \partial_x^2 u_{\epsilon_n}.$$

D'où en dérivant par rapport à x , on obtient :

$$\partial_t \frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} + f''(u_{\epsilon_n}) \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right)^2 + f'(u_{\epsilon_n}) \frac{\partial^2 u_{\epsilon_n}}{\partial x^2} = \epsilon_n \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right). \quad (3.4)$$

Soit alors η convexe de classe C^2 et multiplions cette équation par $\eta' \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right)$; ainsi :

$$\partial_t \eta \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right) + f''(u_{\epsilon_n}) \eta' \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right)^2 + f'(u_{\epsilon_n}) \eta' \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u_{\epsilon_n}}{\partial x^2} = \epsilon_n \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right) \eta' \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right).$$

Or :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(f'(u_{\epsilon_n}) \eta \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right) \right) = f''(u_{\epsilon_n}) \frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \eta \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right) + f'(u_{\epsilon_n}) \eta' \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u_{\epsilon_n}}{\partial x^2}.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \partial_t \eta \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(f'(u_{\epsilon_n}) \eta \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right) \right) + f''(u_{\epsilon_n}) \left[\eta' \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right)^2 - \eta \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right) \frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right] = \\ \epsilon_n \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u_{\epsilon_n}}{\partial x^2} \eta' \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right) \right) - \epsilon_n \eta'' \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right) \left| \frac{\partial^2 u_{\epsilon_n}}{\partial x^2} \right|^2. \end{aligned}$$

Or :

$$\eta'' \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right) \geq 0 \quad \text{donc} \quad -\epsilon_n \eta'' \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right) \left| \frac{\partial^2 u_{\epsilon_n}}{\partial x^2} \right|^2 \leq 0.$$

On intègre sur \mathbb{R} , on obtient alors :

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}} \eta \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right) dx + \int_{\mathbb{R}} f''(u_{\epsilon_n}) \left[\eta' \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right)^2 - \eta \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right) \frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right] dx \leq 0.$$

Soit $T > 0$, on intègre alors sur $[0, T]$:

$$\int_{\mathbb{R}} \eta \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right) (T) dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} f''(u_{\epsilon_n}) \left[\eta' \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right)^2 - \eta \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right) \frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right] dx \leq \int_{\mathbb{R}} \eta \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} (x) \right) dx$$

Prenons alors $\eta_\delta(v) = \sqrt{v^2 + \delta}$, donc $\eta'_\delta(v) = \frac{v}{\sqrt{v^2 + \delta}}$ et $\eta'_\delta(v)v = \frac{v^2}{\sqrt{v^2 + \delta}}$.

$f''(u_{\epsilon_n})$ ne dépend pas de δ et $\exists M$ tel que $f''(u_{\epsilon_n}) \leq M$ car (3.3).

$\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x}$ uniformément borné et ne dépend pas de δ .

De plus, $\eta'_\delta(v)v - \eta_\delta(v) = \frac{v^2}{\sqrt{v^2 + \delta}} - \sqrt{v^2 + \delta} = \frac{-\delta}{\sqrt{v^2 + \delta}} \Rightarrow |\eta'_\delta(v)v - \eta_\delta(v)| \leq \sqrt{\delta}, \forall v$.

Donc, par le théorème de convergence dominée et en appliquant ceci à $v = \frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x}$, on obtient que :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} f''(u_{\epsilon_n}) \left[\eta'_\delta \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right)^2 - \eta_\delta \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right) \frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right] dx dt = 0$$

De plus, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \eta_\delta \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x}(t, x) \right) = \left| \frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x}(t, x) \right|$ et $\left| \eta_\delta \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x}(t, x) \right) \right| \leq 1 + \left| \frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x}(t, x) \right| \in L^1$.

Donc, par le théorème de convergence dominée, on a : $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \eta_\delta \left(\frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x}(t, x) \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x}(t, x) \right| dx$

On obtient alors,

$$\forall t, \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right| dx.$$

On peut faire la même chose pour t , on obtient :

$$\forall t, \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial t} \right| dx \leq k \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right| dx.$$

Ces deux estimations sur les dérivées sont bien indépendantes de ϵ .

Par le théorème de Kolmogorov, on peut extraire une sous-suite qui converge dans L^1 et on réextrait ensuite une sous-suite qui converge vers u presque partout. Appelons la toujours u_{ϵ_n} .

Or f est continue donc $f(u_{\epsilon_n}) \rightarrow f(u)$ p.p.

De plus,

$$\|u_{\epsilon_n}\|_{L^\infty} \leq \|u_0\|_{L^\infty}$$

donc $\exists M > 0$ tel que $|f(u_{\epsilon_n})| \leq M$, d'où :

$$|f(u_{\epsilon_n})\partial_x \Phi| \leq M|\partial_x \Phi| \in L^1.$$

Par le théorème de convergence dominée, on a donc :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} f(u_{\epsilon_n})\partial_x \Phi dx dt \rightarrow \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} f(u)\partial_x \Phi dx dt$$

On a finalement :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (u\partial_t \phi + f(u)\partial_x \phi) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(0, x) dx = 0$$

Par définition, on a bien que u est solution faible du problème (*). ■

Il s'agit maintenant pour nous de s'intéresser à la l'unicité ou non des solution faibles.

3.4 Non unicité des solutions faibles pour le cas non linéaire

Pour cela, étudions la fonction suivante.

Proposition 5 *La fonction $u(x, t) \in \mathbb{L}^1$ définie par :*

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > \sqrt{t} \\ \frac{x}{2t} & \text{si } |x| \leq \sqrt{t} \end{cases}$$

est une solution faible de l'équation de Burgers pour la donnée initiale $u_0 = 0$.

Preuve :

D'après la définition 2 une fonction est solution faible de notre problème si on a :

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (u(t, x)\partial_t \phi(t, x) + f(u(t, x))\partial_x \phi(x, t)) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(0, x) dx = 0,$$

pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty([0, \infty[\times \mathbb{R})$.

Comme $u_0 = 0$ il reste a montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (u(t, x)\partial_t \phi(t, x) + u^2(t, x)\partial_x \phi(x, t)) dx dt = 0.$$

Soit $\epsilon > 0$, on a ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u(t, x) \partial_t \phi(t, x) dx dt &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\epsilon}^{+\infty} u(t, x) \partial_t \phi(t, x) dt dx \text{ d'après le théorème de Fubini} \\ &= \int_{-\sqrt{\epsilon}}^{\sqrt{\epsilon}} \int_{\epsilon}^{+\infty} u \partial_t \phi dt dx + \int_{\sqrt{\epsilon}}^{+\infty} \int_{\epsilon}^{+\infty} u \partial_t \phi dt dx + \int_{-\infty}^{-\sqrt{\epsilon}} \int_{\epsilon}^{+\infty} u \partial_t \phi dt dx. \end{aligned}$$

Or :

– Si $-\sqrt{\epsilon} \leq x \leq \sqrt{\epsilon}$ c'est à dire $|x| \leq \sqrt{\epsilon}$ et $\epsilon \leq t \leq +\infty$, alors $\sqrt{\epsilon} \leq \sqrt{t}$ et donc :

$$|x| \leq \sqrt{t} \text{ et } u(t, x) = \frac{x}{2t}.$$

Calcul préliminaire :

$$\partial_t \left(\frac{x}{2t} \right) + \partial_x \left[\left(\frac{x}{2t} \right)^2 \right] = -\frac{x}{2t^2} + \partial_x \left(\frac{x^2}{4t^2} \right) = -\frac{x}{2t} + \frac{x}{2t} = 0 \text{ si } t > 0.$$

– Si $x \geq \sqrt{\epsilon}$ et $\sqrt{t} \geq \sqrt{\epsilon}$, alors, $u \neq 0$ si $x^2 \leq t$, donc :

$$\int_{\sqrt{\epsilon}}^{+\infty} \int_{\epsilon}^{+\infty} u \partial_t \phi = \int_{\sqrt{\epsilon}}^{+\infty} \int_{x^2}^{+\infty} \frac{x}{2t} \partial_t \phi.$$

– Si $x \leq -\sqrt{\epsilon}$ et $\sqrt{t} \geq \sqrt{\epsilon}$, alors, $u \neq 0$ si $x^2 \leq t$, donc :

$$\int_{-\infty}^{-\sqrt{\epsilon}} \int_{\epsilon}^{+\infty} u \partial_t \phi = \int_{-\infty}^{-\sqrt{\epsilon}} \int_{x^2}^{+\infty} \frac{x}{2t} \partial_t \phi.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u(t, x) \partial_t \phi(t, x) dx dt &= \int_{-\sqrt{\epsilon}}^{\sqrt{\epsilon}} \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{x}{2t} \partial_t \phi dt dx + \int_{\sqrt{\epsilon}}^{+\infty} \int_{x^2}^{+\infty} \frac{x}{2t} \partial_t \phi dt dx + \int_{-\infty}^{-\sqrt{\epsilon}} \int_{x^2}^{+\infty} \frac{x}{2t} \partial_t \phi dt dx \\ &= -\int_{-\sqrt{\epsilon}}^{\sqrt{\epsilon}} \int_{\epsilon}^{+\infty} \phi \partial_t \left(\frac{x}{2t} \right) dt dx - \int_{\sqrt{\epsilon}}^{\sqrt{\epsilon}} \frac{x}{2\epsilon} \phi(\epsilon, x) dx - \int_{\sqrt{\epsilon}}^{+\infty} \int_{x^2}^{+\infty} \phi \partial_t \left(\frac{x}{2t} \right) dt dx \\ &\quad - \int_{\sqrt{\epsilon}}^{+\infty} \frac{x}{2x^2} \phi(x^2, x) dx - \int_{-\infty}^{-\sqrt{\epsilon}} \int_{x^2}^{+\infty} \phi \partial_t \left(\frac{x}{2t} \right) dt dx - \int_{-\infty}^{-\sqrt{\epsilon}} \frac{x}{2x^2} \phi(x^2, x) dx \\ &= \int_{-\sqrt{\epsilon}}^{\sqrt{\epsilon}} \int_{\epsilon}^{+\infty} \phi \frac{x}{2t^2} dt dx - \int_{\sqrt{\epsilon}}^{\sqrt{\epsilon}} \frac{x}{2\epsilon} \phi(\epsilon, x) dx + \int_{\sqrt{\epsilon}}^{+\infty} \int_{x^2}^{+\infty} \phi \frac{x}{2t^2} dt dx \\ &\quad - \int_{\sqrt{\epsilon}}^{+\infty} \frac{1}{2x} \phi(x^2, x) dx + \int_{-\infty}^{-\sqrt{\epsilon}} \int_{x^2}^{+\infty} \phi \frac{x}{2t^2} dt dx - \int_{-\infty}^{-\sqrt{\epsilon}} \frac{1}{2x} \phi(x^2, x) dx. \end{aligned}$$

On a également :

$$\begin{aligned}
\int_{\epsilon}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u^2(t, x) \partial_x \phi(t, x) dx dt &= \int_{\epsilon}^{+\infty} \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} u^2(t, x) \partial_x \phi(t, x) dx dt \\
&= \int_{\epsilon}^{+\infty} \left[\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} -\partial_x \left(\left(\frac{x}{2t} \right)^2 \right) \phi dx + \frac{1}{4t} \phi(t, \sqrt{t}) - \frac{1}{4t} \phi(t, -\sqrt{t}) \right] dt \\
&= \int_{\epsilon}^{+\infty} \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} -\partial_x \left(\left(\frac{x}{2t} \right)^2 \right) \phi dx dt + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{1}{4t} (\phi(t, \sqrt{t}) - \phi(t, -\sqrt{t})) dt \\
&= \int_{\epsilon}^{+\infty} \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} -\frac{x}{2t^2} \phi dx dt + \int_{\sqrt{\epsilon}}^{+\infty} \frac{1}{2x} (\phi(x^2, x) - \phi(x^2, -x)) dx \\
&= \int_{\epsilon}^{+\infty} \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} -\frac{x}{2t^2} \phi dx dt + \int_{\sqrt{\epsilon}}^{+\infty} \frac{1}{2x} \phi(x^2, x) dx + \int_{-\infty}^{-\sqrt{\epsilon}} \frac{1}{2x} \phi(x^2, x) dx.
\end{aligned}$$

Par Fubini, on a de plus :

$$\begin{aligned}
\int_{-\sqrt{\epsilon}}^{\sqrt{\epsilon}} \int_{\epsilon}^{+\infty} \phi \frac{x}{2t^2} dt dx &= \int_{\epsilon}^{+\infty} \int_{-\sqrt{\epsilon}}^{\sqrt{\epsilon}} \phi \frac{x}{2t^2} dx dt. \\
\int_{\sqrt{\epsilon}}^{+\infty} \int_{x^2}^{+\infty} \phi \frac{x}{2t^2} dt dx &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_{[\sqrt{\epsilon}, +\infty[}(x) 1_{[x^2, +\infty[}(t) \frac{x}{2t^2} dt dx.
\end{aligned}$$

Donc :

$$x^2 \leq t \leq +\infty \Rightarrow -\sqrt{t} \leq x \leq \sqrt{t}.$$

$$1_{[\sqrt{\epsilon}, +\infty[}(x) 1_{[x^2, +\infty[}(t) = 1_{[\sqrt{\epsilon}, +\infty[}(x) 1_{[-\sqrt{t}, \sqrt{t}]}(x).$$

Ainsi :

$$x \in [\sqrt{\epsilon}, +\infty[\cap [-\sqrt{t}, \sqrt{t}].$$

On doit donc avoir :

$$\sqrt{\epsilon} \leq \sqrt{t} \implies \epsilon \leq t,$$

et

$$x \in [\sqrt{\epsilon}, \sqrt{t}].$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{\epsilon}}^{\infty} \int_{x^2}^{\infty} \phi \frac{x}{2t^2} dt dx &= \int_{\epsilon}^{\infty} \int_{\sqrt{\epsilon}}^{\sqrt{t}} \phi \frac{x}{2t^2} dx dt. \\
\int_{-\infty}^{-\sqrt{\epsilon}} \int_{x^2}^{\infty} \phi \frac{x}{2t^2} dt dx &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_{[-\infty, -\sqrt{\epsilon}]}(x) 1_{[x^2, \infty[}(t) \frac{x}{2t^2} dt dx.
\end{aligned}$$

Donc :

$$x^2 \leq t \leq +\infty \Rightarrow -\sqrt{t} \leq x \leq \sqrt{t}.$$

$$1_{[-\infty, -\sqrt{\epsilon}]}(x) 1_{[x^2, \infty[}(t) = 1_{[-\infty, -\sqrt{\epsilon}]}(x) 1_{[-\sqrt{t}, \sqrt{t}]}(x).$$

Ainsi :

$$x \in]-\infty, -\sqrt{\epsilon}] \cap [-\sqrt{t}, \sqrt{t}].$$

On a alors :

$$-\sqrt{t} \leq -\sqrt{\epsilon} \implies \epsilon \leq t,$$

et

$$x \in [-\sqrt{t}, -\sqrt{\epsilon}];$$

donc :

$$\int_{-\infty}^{-\sqrt{\epsilon}} \int_{x^2}^{\infty} \phi \frac{x}{2t^2} dt dx = \int_{\epsilon}^{\infty} \int_{-\sqrt{t}}^{-\sqrt{\epsilon}} \phi \frac{x}{2t^2} dx dt.$$

D'où :

$$\begin{aligned} & \int_{-\sqrt{\epsilon}}^{\sqrt{\epsilon}} \int_{\epsilon}^{\infty} \phi \frac{x}{2t^2} dt dx + \int_{\sqrt{\epsilon}}^{\infty} \int_{x^2}^{\infty} \phi \frac{x}{2t^2} dt dx + \int_{-\infty}^{-\sqrt{\epsilon}} \int_{x^2}^{\infty} \phi \frac{x}{2t^2} dt dx \\ &= \int_{\epsilon}^{\infty} \int_{-\sqrt{t}}^{-\sqrt{\epsilon}} \phi \frac{x}{2t^2} dx dt + \int_{\epsilon}^{\infty} \int_{-\sqrt{\epsilon}}^{\sqrt{\epsilon}} \phi \frac{x}{2t^2} dx dt + \int_{\epsilon}^{\infty} \int_{\sqrt{\epsilon}}^{\sqrt{t}} \phi \frac{x}{2t^2} dx dt \\ &= \int_{\epsilon}^{\infty} \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} \phi \frac{x}{2t^2} dx dt \text{ d'après la relation de Chasles.} \end{aligned}$$

On en déduit ainsi que :

$$\int_{\epsilon}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} (u(t, x) \partial_t \phi(t, x) + u^2(t, x) \partial_t \phi(t, x)) dx dt = - \int_{-\sqrt{\epsilon}}^{\sqrt{\epsilon}} \frac{x}{2\epsilon} \phi(\epsilon, x) dx.$$

Comme :

$$\int_{-\sqrt{\epsilon}}^{\sqrt{\epsilon}} \frac{x}{2\epsilon} dx = 0,$$

et comme $\phi(\epsilon, 0)$ est une constante, on a :

$$I_{\epsilon} = \int_{\epsilon}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} (u(t, x) \partial_t \phi(t, x) + u^2(t, x) \partial_t \phi(t, x)) dx dt = - \int_{-\sqrt{\epsilon}}^{\sqrt{\epsilon}} \frac{x}{2\epsilon} (\phi(\epsilon, x) - \phi(\epsilon, 0)) dx.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} |I_{\epsilon}| &\leq \int_{-\sqrt{\epsilon}}^{\sqrt{\epsilon}} \frac{|x|}{2\epsilon} |\phi(\epsilon, x) - \phi(\epsilon, 0)| dx \\ &\leq \|\partial_x \phi\|_{\infty} \int_{-\sqrt{\epsilon}}^{\sqrt{\epsilon}} \overbrace{\frac{x^2}{2\epsilon}}^{\leq \epsilon} dx \text{ d'après le TAF} \\ &\leq \|\partial_x \phi\|_{\infty} \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{\epsilon}}^{\sqrt{\epsilon}} 1 dx = \|\partial_x \phi\|_{\infty} \sqrt{\epsilon}. \end{aligned}$$

On a ainsi :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |I_{\epsilon}| = 0.$$

C'est à dire :

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (u(t, x) \partial_t \phi(t, x) + u^2(t, x) \partial_x \phi(x, t)) dx dt = 0.$$

Donc u est une solution faible de notre problème de Burgers. ■

Cette proposition nous montre donc bien la non unicité des solutions faibles pour le problème de Burgers. En effet, il est clair que pour la donnée initiale $u_0 = 0$, la fonction $u \equiv 0$ est également solution faible de notre problème. On a donc au moins deux solutions.

Maintenant que nous avons vu l'existence mais la non unicité de solutions faibles pour le problème de Burgers, nous allons étudier les fonctions régulières pas morceaux.

3.5 Conditions de Rankine-Hugoniot

Les conditions de Rankine-Hugoniot nous permettent de savoir si une fonction régulière par morceaux est, ou non, solution faible de notre problème. On a le théorème suivant :

Théorème 4 *Soit $t \mapsto \alpha(t)$ une courbe régulière. Soit u une fonction de classe C^1 , bornée ainsi que ses dérivées, dans $\Omega_- = \{(t, x), x < \alpha(t)\}$ et de classe C^1 dans $\Omega_+ = \{(t, x), x > \alpha(t)\}$.*

Alors u est solution faible du problème () si et seulement si :*

- $u(0, \cdot) = u_0$
- u vérifie l'équation au sens classique dans Ω_- et Ω_+ .
- u vérifie de plus la condition de saut suivante :

$$f(u(t, \alpha(t)^+)) - f(u(t, \alpha(t)^-)) = \alpha'(t)(u(t, \alpha(t)^+) - u(t, \alpha(t)^-)), \forall t \geq 0.$$

Cette condition de saut est souvent notée :

$$\llbracket f(u) \rrbracket = \alpha' \llbracket u \rrbracket.$$

Preuve :

Soit u une solution faible du problème (*).

- D'après la définition des solutions faibles, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} (u \partial_t \phi + f(u) \partial_x \phi) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \phi(0, x) dx = 0,$$

$\forall \phi \in C_c^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R})$.

Si $\text{Supp } \phi \subset \Omega_-$, on a alors :

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} (u \partial_t \phi + f(u) \partial_x \phi) dx dt = 0.$$

Par une intégration par parties dans Ω_- , on obtient :

$$- \int_{\Omega_-} (\partial_t u \phi + \partial_x f(u) \phi) dx dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Omega_-} ((\partial_t u + \partial_x f(u)) \phi) dx dt = 0, \forall \phi \in C_c^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R}) \text{ avec } \text{Supp } \phi \subset \Omega_-.$$

On a alors :

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \text{ dans } \Omega_-$$

donc u est solution dans Ω_- .

En effectuant le même calcul on a que u est solution dans Ω_+

- Soit $\phi \in C_c^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R})$ tel que $]t_1, t_2[\times]M_1, M_2[\supset \text{Supp } \phi \cap (t, \alpha(t)) \neq \emptyset$.

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} (u \partial_t \phi + f(u) \partial_x \phi) dx dt = 0.$$

On a ainsi :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{M_1}^{M_2} (u \partial_t \phi + f(u) \partial_x \phi) dx dt = 0,$$

d'où :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{M_1}^{\alpha(t)} (u \partial_t \phi + f(u) \partial_x \phi) dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\alpha(t)}^{M_2} (u \partial_t \phi + f(u) \partial_x \phi) dx dt = 0.$$

On pose :

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \int_{M_1}^{\alpha(t)} (u \partial_t \phi + f(u) \partial_x \phi) dx dt.$$

$$B = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\alpha(t)}^{M_2} (u \partial_t \phi + f(u) \partial_x \phi) dx dt.$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{M_1}^{\alpha(t)} f(u) \partial_x \phi dx dt = \int_{t_1}^{t_2} [f(u(t, \cdot)) \phi(t, \cdot)]_{M_1}^{\alpha(t)} dx - \int_{t_1}^{t_2} \int_{M_1}^{\alpha(t)} \partial_x f(u) \phi dx dt. \\ &= \int_{t_1}^{t_2} f(u(t, \alpha(t)^-)) \phi(t, \alpha(t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{M_1}^{\alpha(t)} \partial_x f(u) \phi dx dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{M_1}^{\alpha(t)} u \partial_t \phi dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{M_1}^{\alpha(t)} (\partial_t(u\phi) - \partial_t u \phi) dx dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} \left(\int_{M_1}^{\alpha(t)} u \phi dx \right) - \alpha'(t) u(t, \alpha(t)^-) \phi(t, \alpha(t)) \right] dt \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_{M_1}^{\alpha(t)} \partial_t u \phi dx dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \alpha'(t) u(t, \alpha(t)^-) \phi(t, \alpha(t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{M_1}^{\alpha(t)} \partial_t u \phi dx dt. \end{aligned}$$

On a donc ainsi en regroupant les deux termes :

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \int_{t_1}^{t_2} [f(u(t, \alpha(t)^-) - \alpha'(t) u(t, \alpha(t)^-)) \phi(t, \alpha(t))] dt \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_{M_1}^{\alpha(t)} (\partial_x f(u) + \partial_t u) \phi dx dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [f(u(t, \alpha(t)^-) - \alpha'(t) u(t, \alpha(t)^-)) \phi(t, \alpha(t))] dt \text{ car } u \text{ solution dans } \Omega_-. \end{aligned}$$

On a de même :

$$B = - \int_{t_1}^{t_2} [f(u(t, \alpha(t)^+) - \alpha'(t) u(t, \alpha(t)^+)) \phi(t, \alpha(t))] dt.$$

Donc :

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} [f(u(t, \alpha(t)^+) - f(u(t, \alpha(t)^-) - \alpha'(t)(u(t, \alpha(t)^+) - u(t, \alpha(t)^-))] \phi(t, \alpha(t)) dt.$$

Comme ceci est vrai pour tout ϕ tel que $Supp \phi \subset [t_1, t_2] \times [M_1, M_2]$, on en déduit :

$$\llbracket f(u) \rrbracket = \alpha'(t) \llbracket u \rrbracket.$$

Pour la réciproque il suffit de faire les mêmes calculs dans le sens inverse. ■

Après avoir étudié les principales propriétés des solutions faibles pour le cas non linéaire, on va essayer de trouver un moyen pour avoir l'unicité de solutions faibles.

Chapitre 4

Conditions pour obtenir l'unicité des solutions faibles

4.1 Entropie

Nous avons vu que nous n'avions pas l'unicité de solutions faibles. Pour remédier à ce problème, il nous faut introduire la notion de solution entropique. Cette notion permet de sélectionner la "bonne solution" physique.

Définition 3 On dit que (η, q) est un couple entropie-flux d'entropie pour le problème (*) si $\eta \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une fonction convexe et $q' = \eta' f'$.

Remarque 1 Si (η, q) est un couple entropie-flux d'entropie et si u est une solution au sens classique de (*), on a alors (si η' ne s'annule qu'une fois) :

$$\begin{aligned}\partial_t u + \partial_x f(u) &= 0 \\ \Leftrightarrow \eta'(u) \partial_t u + \eta'(u) \partial_x f(u) &= 0 \\ \Leftrightarrow \eta'(u) \partial_t u + \eta'(u) f'(u) \partial_x u &= 0 \\ \Leftrightarrow \partial_t \eta(u) + \partial_x q(u) &= 0.\end{aligned}$$

Mais si u n'est pas régulière ceci est faux et donc cette équation n'est pas vérifiée dans le cas de solutions faibles !

Introduisons donc la notion de solution faible entropique.

Définition 4 Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. On appelle solution faible entropique du problème (*), une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ vérifiant pour tout couple entropie-flux d'entropie (η, q) et pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ positif :

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} (\eta(u)(t, x) \partial_t \varphi(t, x) + q(u)(t, x) \partial_x \varphi(t, x)) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0)(x) \varphi(0, x) dx \geq 0$$

ce qui s'écrit plus simplement sous la forme :

$$\partial_t \eta(u) + \partial_x q(u) \leq 0$$

au sens des distributions.

On a alors :

Proposition 6 Une solution faible entropique est une solution faible.

Preuve :

Soit u une solution faible entropique. On a alors, pour tout couple entropie-flux d'entropie (η, q) et pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ positif :

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} (\eta(u)(t, x) \partial_t \varphi(t, x) + q(u)(t, x) \partial_x \varphi(t, x)) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0)(x) \varphi(0, x) dx \geq 0 \quad (4.1)$$

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$,

– Si φ positive, prenons

$$\begin{aligned} \eta : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

alors η est bien convexe et $q(u) = f(u) \Rightarrow q' = f' \eta'$. On a alors, en remplaçant dans (4.1) :

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} (u(t, x) \partial_t \varphi(t, x) + f(u(t, x)) \partial_x \varphi(t, x)) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(0, x) dx \geq 0.$$

Prenons maintenant

$$\begin{aligned} \eta_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto -x. \end{aligned}$$

On a encore $\eta_1'' = 0 \geq 0$ et $\eta_1(u) = -u$ et $q_1(u) = -f(u) \Rightarrow q_1'(u) = -f'(u) \Rightarrow q_1' = f' \eta_1'$. En remplaçant dans (4.1), on a alors :

$$- \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} (u(t, x) \partial_t \varphi(t, x) + f(u(t, x)) \partial_x \varphi(t, x)) dx dt - \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(0, x) dx \geq 0,$$

c'est-à-dire :

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} (u(t, x) \partial_t \varphi(t, x) + f(u(t, x)) \partial_x \varphi(t, x)) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(0, x) dx \leq 0.$$

Donc :

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} (u(t, x) \partial_t \varphi(t, x) + f(u(t, x)) \partial_x \varphi(t, x)) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(0, x) dx = 0.$$

– Si φ est négative, $\varphi_1 = -\varphi$ est positive. D'après ce que l'on vient de faire, on a alors :

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} (u(t, x) \partial_t \varphi_1(t, x) + f(u(t, x)) \partial_x \varphi_1(t, x)) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi_1(0, x) dx = 0$$

ce qui est donc également vrai pour $\varphi = -\varphi_1$.

– Si φ n'est ni positive ni négative : On peut décomposer la double intégrale en sommes d'intégrales où :

– φ est positive : on applique le 1^{er} cas.

– φ est négative : on applique le 2^{ème} cas.

N.B. : Cette décomposition nous donne des φ_k qui ne sont plus C^∞ mais elles restent dans $W^{1,1}$ et notre hypothèse peut être affaiblie à des fonctions seulement $W^{1,1}$.

On a ainsi des sommes d'intégrales nulle d'où :

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} (\eta(u)(t, x) \partial_t \varphi(t, x) + q(u)(t, x) \partial_x \varphi(t, x)) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0)(x) \varphi(0, x) dx = 0.$$

Donc, d'après la définition de solution faibles, u est solution faible du problème (*).

■

La notion d'entropie nous permet d'avoir le résultat suivant :

Théorème 5 *Pour toute donnée initiale, il existe une unique solution faible entropique u au problème (*).*

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin d'introduire la notion d'entropie de Kruzhkov et de démontrer certains résultats.

Définition 5 *On dit que (η_k, q_k) est un couple entropie-flux d'entropie de Kruzhkov pour le problème (*) si $\eta_k(u) = |u - k|$ et si $q_k(u) = \text{sgn}(u - k)(f(u) - f(k))$ où $k \in \mathbb{R}$.*

On a alors :

Proposition 7 *Une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ est une solution entropique du problème (*) si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{R}$ et tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ positif, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} (\eta_k(u)(t, x) \partial_t \varphi(t, x) + q_k(u)(t, x) \partial_x \varphi(t, x)) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \eta_k(u_0)(x) \varphi(0, x) dx \geq 0.$$

Preuve :

Montrons la condition nécessaire et admettons la condition suffisante.

η_k n'étant pas C^1 , on peut tout de même vérifier que (η_k, q_k) est un couple entropie-flux d'entropie.

Prenons $\eta_{k,\delta}(u) = \sqrt{(u - k)^2 + \delta}$ et $q'_{k,\delta} = \eta'_{k,\delta} f'(u)$ tel que $q_{k,\delta} = 0$.

$\eta_{k,\delta}(u)$ est convexe, en effet : $\eta'_{k,\delta}(u) = \frac{u-k}{\sqrt{(u-k)^2 + \delta}}$ et $\eta''_{k,\delta}(u) = \frac{\delta}{((u-k)^2 + \delta)^{\frac{3}{2}}} \geq 0$.

Alors, $(\eta_{k,\delta}, q_{k,\delta})$ est un couple entropie-flux d'entropie du problème (*), on a ainsi :

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \eta_{k,\delta}(u) \partial_t \varphi(u) dx dt + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} q_{k,\delta}(u) \partial_x \varphi(u) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \eta_{k,\delta}(u_0) \varphi(0, x) dx \geq 0.$$

On a :

$$q_{k,\delta}(u) = \int_k^u \eta'_{k,\delta}(s) f'(s) ds$$

avec $\eta'_{k,\delta}(u) = \frac{u-k}{\sqrt{(u-k)^2 + \delta}}$, $|\eta'_{k,\delta}(u)| \leq 1$; ainsi :

- si $u = k$, $q_{k,\delta}(u) = 0$ par hypothèse,

- si $u > k$, $q_{k,\delta}(u) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_k^u f'(s) ds$ car $\eta'_{k,\delta}(s) \rightarrow 1$ et $|\eta'_{k,\delta}(s) f'(s)| \leq |f'(s)| \in L^1$ et par convergence dominée,

- si $u < k$, $q_{k,\delta}(u) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} -\int_k^u f'(s) ds$.

Donc :

$$q_{k,\delta}(u) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \text{sgn}(u - k)(f(u) - f(k))$$

et de plus,

$$|q_{k,\delta}(u)| \leq \left| \int_k^u |f'(s)| ds \right| \leq C_k \|f'\|_\infty \in L^1.$$

Par le théorème de convergence dominée, on a :

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} q_{k,\delta}(u) \partial_x \varphi dx dt \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} q_k(u) \partial_x \varphi dx dt$$

et

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \eta_{k,\delta}(u) \partial_t \varphi dx dt \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \eta_k(u) \partial_t \varphi dx dt$$

car $\eta_{k,\delta}(u) \rightarrow \eta_k(u)$ et $\eta_{k,\delta}(u)$ est majoré puis par convergence dominée.

De même :

$$\int_{\mathbb{R}} \eta_{k,\delta}(u_0) \varphi(0, x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \eta_k(u_0) \varphi(0, x) dx$$

car $\eta_{k,\delta}(u_0) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \eta_k(u_0)$ et $\eta_{k,\delta}(u_0)$ est majoré puis par convergence dominée.

Donc :

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \eta_k(u) \partial_t \varphi dx dt + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} q_k(u) \partial_x \varphi dx dt + \int_{\mathbb{R}} \eta_k(u_0) \varphi(0, x) dx \geq 0.$$

Par définition, (η_k, q_k) est bien un couple entropie-flux d'entropie de Kruzhkov. \blacksquare

Théorème 6 (Kruzhkov) Soient u_0 et v_0 deux données initiales dans $L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ et soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a \leq u_0, v_0 \leq b$ p.p sur \mathbb{R} . On note u et v des solutions faibles entropiques associées respectivement à u_0 et v_0 . Alors, si on définit $L = \sup_{s \in [a,b]} |f'(s)|$, on a pour tout $T > 0$ et $r > 0$:

$$\int_{|x| < r} |u(T, x) - v(T, x)| dx \leq \int_{|x| < r+LT} |u_0(x) - v_0(x)| dx.$$

Preuve :

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ positif, pour tout $k \in \mathbb{R}$, on a d'après la proposition 7 :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} |u(t, x) - k| \partial_t \varphi dx dt + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(u(t, x) - k) (f(u(t, x)) - f(k)) \partial_x \varphi dx dt + \int_{\mathbb{R}} |u_0(x) - k| \varphi(0, x) dx \geq 0.$$

On ne peut pas prendre $k = v$ car k est une constante et v dépend de t et de x . Prenons donc $k = v(s, y)$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |u(t, x) - v(s, y)| \partial_t \varphi dx dt + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(u(t, x) - v(s, y)) (f(u(t, x)) - f(v(s, y))) \partial_x \varphi dx dt \\ + \int_{\mathbb{R}} |u_0(x) - v(s, y)| \varphi(0, x) dx \geq 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

On a de même, pour tout $k \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |v(s, y) - k| \partial_s \varphi dy ds + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(v(s, y) - k) (f(v(s, y)) - f(k)) \partial_y \varphi dy ds + \int_{\mathbb{R}} |v_0(y) - k| \varphi(0, y) dy \geq 0.$$

D'où en prenant $k = u(t, x)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} |v(s, y) - u(t, x)| \partial_s \varphi dy ds + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(v(s, y) - u(t, x)) (f(v(s, y)) - f(u(t, x))) \partial_y \varphi dy ds \\ + \int_{\mathbb{R}} |v_0(y) - u(t, x)| \varphi(0, y) dy \geq 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Soit maintenant $\varphi(t, x, s, y) \in C_c^\infty((\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})^2)$ positif, on a donc ; en intégrant (4.2) par rapport à s et y sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et (4.3) par rapport à (t, x) sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$; puis en sommant :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} (|u(t, x) - v(s, y)| (\partial_t + \partial_s) \varphi(t, x, s, y) + \operatorname{sgn}(u(t, x) - v(s, y)) \\ (f(u(t, x)) - f(v(s, y))) (\partial_x + \partial_y) \varphi(t, x, s, y)) dx dt dy ds \\ + \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u(t, x) - v_0(y)| \varphi(t, x, 0, y) dy dx dt \\ + \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u_0(x) - v(s, y)| \varphi(0, x, s, y) dx dy ds \geq 0. \end{aligned} \quad (A)$$

Soit maintenant ρ paire positive de classe C^1 à support compact tel que $\int_{\mathbb{R}} \rho(z) dz = 1$ et soit $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ positive. Choisissons alors φ dans (A) tel que pour $\epsilon > 0$ petit :

$$\varphi(t, x, s, y) = \frac{1}{\epsilon^2} \psi\left(\frac{t+s}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \rho\left(\frac{t-s}{2\epsilon}\right) \rho\left(\frac{x-y}{2\epsilon}\right).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} (\partial_t + \partial_s)\varphi(t, x, s, y) &= \frac{1}{\epsilon^2} \rho\left(\frac{x-y}{2\epsilon}\right) \left[\frac{1}{2} \partial_1 \psi\left(\frac{t+s}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \rho\left(\frac{t-s}{2\epsilon}\right) + \frac{1}{2\epsilon} \psi\left(\frac{t+s}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \rho'\left(\frac{t-s}{2\epsilon}\right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon^2} \rho\left(\frac{x-y}{2\epsilon}\right) \left[\frac{1}{2} \partial_1 \psi\left(\frac{t+s}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \rho\left(\frac{t-s}{2\epsilon}\right) - \frac{1}{2\epsilon} \psi\left(\frac{t+s}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \rho'\left(\frac{t-s}{2\epsilon}\right) \right] \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \rho\left(\frac{x-y}{2\epsilon}\right) \partial_1 \psi\left(\frac{t+s}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \rho\left(\frac{t-s}{2\epsilon}\right) \end{aligned}$$

De même :

$$(\partial_x + \partial_y)\varphi(t, x, s, y) = \frac{1}{\epsilon^2} \partial_2 \psi\left(\frac{t+s}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \rho\left(\frac{t-s}{2\epsilon}\right) \rho\left(\frac{x-y}{2\epsilon}\right).$$

Il nous faut ensuite passer à la limite quand $\epsilon \rightarrow 0$.

Raisonnons en dim 2, la preuve est analogue dans \mathbb{R}^4 .

On peut démontrer que : $\frac{1}{\epsilon} \rho\left(\frac{t-s}{2\epsilon}\right) \rightarrow 2\delta_{\{s=t\}}$ dans \mathcal{D}' .

A t fini, on a : $2 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\epsilon} \rho\left(\frac{t-s}{2\epsilon}\right) ds = 2$ par changement de variable ; donc :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\epsilon} \rho\left(\frac{t-s}{2\epsilon}\right) \varphi(t, t) ds dt = 2 \int_{\mathbb{R}} \varphi(t, t) dt$$

et :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\epsilon} \rho\left(\frac{t-s}{2\epsilon}\right) (\varphi(t, s) - \varphi(t, t)) dt ds \right| \\ & \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\epsilon} \rho\left(\frac{t-s}{2\epsilon}\right) |\varphi(t, s) - \varphi(t, t)| dt ds \text{ car } \rho \text{ est un noyau approximant} \\ & \leq \int_{\{|t-s| \leq 2\epsilon \text{ et } |s| \leq k, |t| \leq k\}} \frac{1}{\epsilon} \rho\left(\frac{t-s}{2\epsilon}\right) |\varphi(t, s) - \varphi(t, t)| dt ds \\ & \leq M_\epsilon \int_{\{|t-s| \leq 2\epsilon \text{ et } |s| \leq k, |t| \leq k\}} \frac{1}{\epsilon} \rho\left(\frac{t-s}{2\epsilon}\right) dt ds \text{ car } \varphi \text{ est uniformément continue} \\ & \leq M_\epsilon \int_{|t| \leq k} \frac{1}{\epsilon} \rho\left(\frac{t-s}{2\epsilon}\right) dt ds = 4M_\epsilon k \text{ avec } M_\epsilon \rightarrow 0 \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\epsilon} \rho\left(\frac{t-s}{2\epsilon}\right) \varphi(t, s) dt ds &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\epsilon} \rho\left(\frac{t-s}{2\epsilon}\right) \varphi(t, t) ds dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\epsilon} \rho\left(\frac{t-s}{2\epsilon}\right) \int_{\mathbb{R}} \varphi(t, t) dt \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\epsilon} \rho\left(\frac{t-s}{2\epsilon}\right) \varphi(t, s) dt ds \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 2 \int_{\mathbb{R}} \varphi(t, t) dt.$$

Donc dans \mathbb{R}^4 ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\epsilon^2} |u(t, x) - v(s, y)| \rho\left(\frac{x-y}{2\epsilon}\right) \partial_1 \psi\left(\frac{t+s}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \rho\left(\frac{t-s}{2\epsilon}\right) dx dt dy ds \\ \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 4 \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} |u(t, x) - v(t, x)| \partial_1 \psi(t, x) dx dt \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\epsilon^2} \operatorname{sgn}(u(t, x) - v(s, y)) (f(u(t, x)) - f(v(s, y))) \partial_2 \psi\left(\frac{t+s}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \rho\left(\frac{t-s}{2\epsilon}\right) \rho\left(\frac{x-y}{2\epsilon}\right) dx dt dy ds \\ \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(u - v)(t, x) (f(u) - f(v))(t, x) \partial_2 \psi(t, x) dx dt \end{aligned}$$

De plus, dans \mathbb{R} , on a : $\sup_t \int_{\mathbb{R}} |\partial_t u| \leq C$ donc $\int_{\mathbb{R}} |u(t, x) - u(0, x)| dx \leq Ct$ et $u(t, \cdot) \xrightarrow{t \rightarrow 0} u_0(\cdot)$ dans L^1 .
D'où :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} v(s, x) \frac{1}{\epsilon} \rho\left(\frac{-s}{2\epsilon}\right) ds dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\epsilon} \rho\left(\frac{-s}{2\epsilon}\right) \left(\int_{\mathbb{R}} v(s, x) dx\right) ds \\ \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 2 \int_{\mathbb{R}} v_0(x). \end{aligned}$$

On a alors, par un raisonnement analogue :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\epsilon^2} |u_0(x) - v(s, y)| \psi\left(\frac{s}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \rho\left(\frac{-s}{2\epsilon}\right) \rho\left(\frac{x-y}{2\epsilon}\right) dx dy ds \\ \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 4 \int_{\mathbb{R}} |u_0 - v_0|(x) \psi(0, x) dx. \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\epsilon^2} |u(t, x) - v_0(y)| \psi\left(\frac{t}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \rho\left(\frac{t}{2\epsilon}\right) \rho\left(\frac{x-y}{2\epsilon}\right) dx dy ds \\ \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 4 \int_{\mathbb{R}} |u_0 - v_0|(x) \psi(0, x) dx. \end{aligned}$$

D'où, en faisant tendre $\epsilon \rightarrow 0$, l'équation (A) devient :

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} (|u-v|(t, x) \partial_t \varphi(t, x) + \operatorname{sgn}(u-v)(f(u) - f(v))(t, x) \partial_x \psi(t, x)) dx dt + \int_{\mathbb{R}} |u_0 - v_0|(x) \psi(0, x) dx \geq 0 \quad (B)$$

On peut affaiblir ceci pour des fonctions seulement lipschitziennes.

On définit alors maintenant $\psi(t, x) = \chi_\epsilon(t) w_\epsilon(t, x)$ où :

$$\chi_\epsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < T \\ \frac{T-t}{\epsilon} + 1 & \text{si } T \leq t \leq T + \epsilon \\ 0 & \text{si } t \geq T + \epsilon \end{cases}$$

et :

$$w_\epsilon(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq r + L(T - t) \\ \frac{r + L(T-t) - |x|}{\epsilon} + 1 & \text{si } r + L(T - t) \leq |x| < r + L(T - t) + \epsilon \\ 0 & \text{si } |x| \geq r + L(T - t) + \epsilon \end{cases}$$

L'équation (B) devient alors :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} |u - v|(t, x) (\chi'_\epsilon(t) w_\epsilon(t, x) + \chi_\epsilon(t) \partial_t w_\epsilon(t, x)) dx dt + \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(u - v)(f(u) - f(v))(t, x) \chi_\epsilon(t) \partial_x w_\epsilon(t, x) dx dt \\ + \int_{\mathbb{R}} |u_0 - v_0|(x) \psi(0, x) dx \geq 0. \end{aligned}$$

Or :

$$\chi'_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{-1}{\epsilon} & \text{si } T \leq t \leq T + \epsilon \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\partial_t w_\epsilon(t, x) = \begin{cases} \frac{-L}{\epsilon} & \text{si } 0 \leq |x| - r - L(T - t) < \epsilon \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\partial_x w_\epsilon(t, x) = \begin{cases} \frac{-\text{sgn}(x)}{\epsilon} & \text{si } 0 \leq |x| - r - L(T - t) < \epsilon \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc, l'équation (B) devient :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\epsilon} \int_T^{T+\epsilon} \int_{\mathbb{R}} |u - v|(t, x) w_\epsilon(t, x) dx dt - \frac{L}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{0 \leq |x| - r - L(T - t) < \epsilon} |u - v|(t, x) \chi_\epsilon(t) dx dt \\ & - \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{0 \leq |x| - r - L(T - t) < \epsilon} \text{sgn}(u - v)(f(u) - f(v))(t, x) \chi_\epsilon(t) \text{sgn}(x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} |u_0 - v_0|(x) \psi(0, x) dx \geq 0. \end{aligned}$$

Comme $(\text{sgn}(u - v)(f(u) - f(v))\text{sgn}(x)) \leq L(u - v)$, on a :

$$\frac{1}{\epsilon} \int_T^{T+\epsilon} \int_{\mathbb{R}} |u - v|(t, x) w_\epsilon(t, x) dx dt \leq \int_{\mathbb{R}} |u_0 - v_0|(x) \psi(0, x) dx$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{\epsilon} \int_T^{T+\epsilon} \int_{|x| < r + \epsilon} |u - v|(t, x) w_\epsilon(t, x) dx dt \leq \int_{|x| < r + LT + \epsilon} |u_0 - v_0|(x) \psi(0, x) dx$$

Il nous faut donc maintenant faire tendre ϵ vers 0, alors :

$$\int_{|x| < r + LT + \epsilon} |u_0(x) - v_0(x)| w_\epsilon(0, x) dx \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| < r + LT} |u_0(x) - v_0(x)| dx$$

et

$$\frac{1}{\epsilon} \int_T^{T+\epsilon} \int_{|x| < r + \epsilon} |u - v|(t, x) w_\epsilon(t, x) dx dt \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| < r} |u(T, x) - v(T, x)| dx$$

car $\int_{\mathbb{R}} |\partial_t u(t, x)| dx \leq C$ d'où $\int_{\mathbb{R}} |u(t + h, x) - u(t, x)| dx \leq Ch$ et $u(t + h, \cdot) \xrightarrow{h \rightarrow 0} u(t, \cdot)$ dans L^1 donc $t \mapsto u(t, \cdot) \in L^1$ est continue.

On a :

$$\frac{1}{\epsilon} \int_T^{T+\epsilon} u(t, \cdot) dt \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} u(T, \cdot) \text{ dans } L^1$$

donc :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_T^{T+\epsilon} \frac{1}{\epsilon} (u(t, x) - u(T, x)) dt dx \rightarrow 0$$

et donc :

$$\int_{|x| < r} |u(T, x) - v(T, x)| dx \leq \int_{|x| < r + LT} |u_0(x) - v_0(x)| dx.$$

On peut maintenant s'intéresser à la démonstration du théorème d'existence et d'unicité de la solution faible entropique. ■

Preuve :

– Existence :

Etudions tout d'abord l'équation parabolique :

$$\begin{cases} \partial_t u_\epsilon + \partial_x f(u_\epsilon) - \epsilon \partial_x^2 u_\epsilon = 0, \\ u_\epsilon(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (4.4)$$

où ϵ est une constante réelle positive.

Pour tout $\epsilon > 0$, pour toute donnée initiale continue bornée, il existe une unique solution classique u_ϵ au problème (4.4).

Soit (η, q) un couple entropie-flux d'entropie du problème (*).

Multiplions (4.4) par $\eta'(u_\epsilon)$, on obtient :

$$\eta'(u_\epsilon) \partial_t u_\epsilon + \eta'(u_\epsilon) \partial_x f(u_\epsilon) - \epsilon \eta'(u_\epsilon) \partial_x^2 u_\epsilon = 0. \quad (4.5)$$

On a :

$$\eta'(u_\epsilon) \partial_t u_\epsilon = \partial_t \eta(u_\epsilon),$$

$$\eta'(u_\epsilon) \partial_x f(u_\epsilon) = \eta'(u_\epsilon) f'(u_\epsilon) \partial_x u_\epsilon = \partial_x q(u_\epsilon),$$

et

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \eta(u_\epsilon) &= \partial_x (\partial_x \eta(u_\epsilon)) \\ &= \partial_x (\eta'(u_\epsilon) \partial_x u_\epsilon) \\ &= \partial_x (\eta'(u_\epsilon)) \partial_x u_\epsilon + \eta'(u_\epsilon) \partial_x^2 u_\epsilon \\ &= \eta''(u_\epsilon) (\partial_x u_\epsilon)^2 + \eta'(u_\epsilon) \partial_x^2 u_\epsilon. \end{aligned}$$

L'équation (4.5) devient alors :

$$\begin{aligned} \partial_t \eta(u_\epsilon) + \partial_x q(u_\epsilon) + \epsilon \eta''(u_\epsilon) (\partial_x u_\epsilon)^2 - \epsilon \partial_x^2 \eta(u_\epsilon) &= 0 \\ \Leftrightarrow \partial_t \eta(u_\epsilon) + \partial_x q(u_\epsilon) &= \epsilon \partial_x^2 \eta(u_\epsilon) - \epsilon \eta''(u_\epsilon) (\partial_x u_\epsilon)^2. \end{aligned}$$

D'où :

$$\partial_t \eta(u_\epsilon) + \partial_x q(u_\epsilon) \leq \epsilon \partial_x^2 \eta(u_\epsilon).$$

Soit $\varphi \in C_c^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R})$ positive, en multipliant par φ puis en intégrant sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$, on obtient :

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\partial_t \eta(u_\epsilon) + \partial_x q(u_\epsilon) - \epsilon \partial_x^2 (\eta(u_\epsilon)) \right) \varphi dx dt \leq 0 \\ \Leftrightarrow &\int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \partial_t \eta(u_\epsilon) \varphi dt dx + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \partial_x q(u_\epsilon) \varphi dx dt - \epsilon \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 (\eta(u_\epsilon)) \varphi dx dt \leq 0 \text{ par Fubini} \\ \Leftrightarrow &-\int_{\mathbb{R}} \eta(u_\epsilon(0, x)) \varphi(0, x) dx - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \eta(u_\epsilon) \partial_t \varphi dx dt - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} q(u_\epsilon) \partial_x \varphi dx dt \\ &+ \epsilon \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \partial_x (\eta(u_\epsilon)) \partial_x \varphi dx dt \leq 0 \text{ par IPP et Fubini} \\ \Leftrightarrow &\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \eta(u_\epsilon) \partial_t \varphi dx dt + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} q(u_\epsilon) \partial_x \varphi dx dt \\ &- \epsilon \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \partial_x (\eta(u_\epsilon)) \partial_x \varphi dx dt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) \varphi(0, x) dx \geq 0. \end{aligned}$$

D'après la démonstration du théorème (3), on peut extraire une sous-suite u_{ϵ_n} qui converge vers u dans L^2 . Or η et q sont continues, donc :

$$\eta(u_{\epsilon_n}) \rightarrow \eta(u) p.p.$$

$$q(u_{\epsilon_n}) \rightarrow q(u) p.p.$$

De plus, $\exists M > 0$ tel que $\|u_{\epsilon_n}\|_{L^\infty} \leq M$ donc :

$$|\eta(u_{\epsilon_n})| \leq \sup \eta = c,$$

$$|q(u_{\epsilon_n})| \leq \sup q = c',$$

donc :

$$|\eta(u_{\epsilon_n}) \partial_t \varphi| \leq c |\partial_t \varphi| \in L^1,$$

$$|q(u_{\epsilon_n}) \partial_t \varphi| \leq c' |\partial_t \varphi| \in L^1.$$

D'où :

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \eta(u_{\epsilon_n}) \partial_t \varphi dx dt \rightarrow \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \eta(u) \partial_t \varphi dx dt \text{ lorsque } n \text{ tend vers } \infty$$

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} q(u_{\epsilon_n}) \partial_t \varphi dx dt \rightarrow \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} q(u) \partial_t \varphi dx dt \text{ lorsque } n \text{ tend vers } \infty$$

par le théorème de convergence dominée.

De plus,

$$\epsilon_n \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \partial_x(\eta(u_{\epsilon_n})) \partial_x \varphi dx dt = \sqrt{\epsilon_n} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \eta'(u_{\epsilon_n}) \frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x} \sqrt{\epsilon_n} \partial_x \varphi dx dt$$

Or η' est bornée, $\partial_x \varphi$ est borné L^2 et d'après la démonstration du théorème (3), $\sqrt{\epsilon_n} \frac{\partial u_{\epsilon_n}}{\partial x}$ est borné L^2 . Donc $\epsilon_n \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \partial_x(\eta(u_{\epsilon_n})) \partial_x \varphi dx dt \rightarrow 0$.

On a finalement :

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (\eta(u) \partial_t \varphi + q(u) \partial_x \varphi) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) \varphi(0, x) dx \geq 0.$$

Donc, par définition, u est solution entropique du problème.

– Unicité :

Par le théorème de Kruzhkov, si u et v sont solutions du problème (*) pour la même donnée initiale u_0 , on a :

$$\int_{|x| < r} |u(T, x) - v(T, x)| \leq 0$$

donc

$$\int_{|x| < r} |u(T, x) - v(T, x)| = 0$$

donc $u(T, x) = v(T, x)$ pour tout $|x| < r$ et pour tout r donc $u \equiv v$.

D'où l'unicité de la solution entropique. ■

Proposition 8 Une solution faible régulière par morceaux est entropique si et seulement si, le long de toute courbe de discontinuité $t \rightarrow \alpha(t)$ on a

$$[[q(u)]] \leq \alpha' [[\eta(u)]]$$

Preuve :

La démonstration de cette proposition est la même que celle du théorème 4 en remplaçant les égalités par des inégalités \leq . ■

4.2 Résolution du problème de Riemann

4.2.1 Introduction

On appelle problème de Riemann, un problème de la forme :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0, \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ u(t = 0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad \text{avec } u_0(x) = \begin{cases} u^- & \forall x < 0 \\ u^+ & \forall x > 0 \end{cases}$$

Nous allons étudier un problème de Riemann pour comprendre ce qu'il se passe quand, déjà, il y a une discontinuité dans la fonction initiale car nous savons qu'il y aura des discontinuités dans la solution de l'équation non linéaire.

4.2.2 Auto-similarité

Montrons que la solution du problème de Riemann est une solution autosimilaire, c'est à dire de la forme $\psi(\frac{x}{t})$.

On remarque tout d'abord que $u_0(\lambda x) = u_0(x)$, $\forall \lambda > 0$.

Ensuite, soit $u(t, x)$ la solution entropique pour la donnée initiale $u_0(x)$, on regarde $u(\lambda t, \lambda x)$, nous allons montrer que c'est encore solution entropique pour la donnée initiale $x \mapsto u_0(\lambda x)$ qui est égale à $u_0(x)$:

$u(t, x)$ solution entropique s'écrit,

$$\forall \varphi \in C_c^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R}), \varphi \geq 0$$

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (\eta(u)(t, x) \partial_t \varphi(t, x) + q(u(t, x)) \partial_x \varphi(t, x)) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0)(x) \varphi(0, x) dx \geq 0$$

avec $\eta'' \geq 0$ et $q' = \eta' f'$.

On effectue ensuite le changement de variable $\lambda s = t$ et $\lambda y = x$ et on obtient,

$$\lambda^2 \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (\eta(u)(\lambda s, \lambda y) \partial_t \varphi(\lambda s, \lambda y) + q(u(\lambda s, \lambda y)) \partial_x \varphi(\lambda s, \lambda y)) ds dy + \lambda \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0)(\lambda y) \varphi(0, \lambda y) dy \geq 0.$$

Ceci est vrai quelque soit la fonction test φ , donc on pose : $\varphi_\lambda(s, y) = \varphi(\lambda s, \lambda y)$ qui est de classe C^∞ , à support compact et positive.

On obtient donc,

$$\begin{cases} \varphi(0, \lambda y) = \varphi_\lambda(0, y), \\ u_0(\lambda y) = u_0(y), \\ \partial_s \varphi_\lambda = \lambda \partial_t \varphi(\lambda s, \lambda y), \\ \partial_y \varphi_\lambda = \lambda \partial_x \varphi(\lambda x, \lambda y). \end{cases}$$

Soit,

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (\eta(u)(\lambda s, \lambda y) \partial_s \varphi_\lambda(s, y) + q(u(\lambda s, \lambda y)) \partial_y \varphi_\lambda(s, y)) ds dy + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0)(y) \varphi_\lambda(0, y) dy \geq 0.$$

Ceci est toujours vrai quelque soit φ donc quelque soit φ_λ , on peut donc refaire le changement inverse et prendre quelque soit φ de classe C^∞ à support compact et positive.

On a donc montré que $u(\lambda t, \lambda x)$ est solution entropique pour u_0 . Or il y a unicité de la solution entropique, donc $\forall \lambda > 0$ et pour presque tout $(t, x) : u(\lambda t, \lambda x) = u(t, x)$. On cherche donc une solution de la forme $\psi(\frac{x}{t}) = \psi(\xi)$, avec $\xi = \frac{x}{t}$, c'est une solution autosimilaire. De plus, la solution est constante sur les demi droites issues de 0. Il n'est donc plus nécessaire de regarder la solution pour un temps infini, mais seulement pour les premiers instants.

Avec la nouvelle forme de notre solution, nous allons obtenir un nouveau problème : Soit $u(t, x) = \psi(\xi)$, alors

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_t \psi(\frac{x}{t}) = -\frac{x}{t^2} \psi'(\frac{x}{t}) \\ \partial_x f(u) = \partial_x f(\psi(\frac{x}{t})) = \frac{1}{t} \psi'(\frac{x}{t}) f'(\psi(\frac{x}{t})) \\ \frac{d}{d\xi} f(\psi(\xi)) = f'(\psi(\xi)) \psi'(\xi). \end{cases}$$

Le problème devient donc :

$$\begin{cases} \frac{d}{d\xi} f(\psi(\xi)) = \xi \psi'(\xi) \\ \psi(-\infty) = u^- \\ \psi(+\infty) = u^+ \end{cases}$$

4.2.3 Définition des chocs et des détente

Nous allons maintenant définir les ondes de chocs et les ondes de détente.

Comme nous l'avons montré en première partie, il n'existe pas forcément de solution régulière pour tout temps t . Dans ce cas, lorsque nous traçons les caractéristiques, elle se croisent en un point qui prend donc deux valeurs différentes, ce qui est impossible : c'est une onde de choc.

Définition 6 ψ est une solution de choc si c'est une solution faible de la forme :

$$\psi(\xi) = \begin{cases} \psi_- & \forall \xi < \sigma \\ \psi_+ & \forall \xi > \sigma \end{cases}$$

avec $\sigma = \frac{f(\psi_+) - f(\psi_-)}{\psi_+ - \psi_-}$, vitesse de discontinuité de Rankine-Hugoniot.

Sinon, les caractéristiques ne se croisent pas pour un certain temps t , la solution est régulière : c'est une détente.

Définition 7 On appelle onde de détente une solution autosimilaire non constante $u(x, t) = \varphi(\xi)$ de classe C^1 dans un demi-cône ouvert $\{(t, x) / f'(u^-)t < x < f'(u^+)t\}$. Elle y satisfait l'équation $(f'(u(x, t)))' = \frac{x}{t}$.

4.2.4 Résolution du problème de Riemann pour l'équation de Burgers

Traisons maintenant l'exemple de l'équation de Burgers, c'est à dire pour $f(u) = u^2$. Nous pouvons cependant remarquer que tout fonctionnerait de la même façon pour n'importe quel flux strictement convexe.

Montrons donc que dans le cas de l'équation de Burgers, $(u^2(x, t))' = \frac{x}{t}$, c'est à dire que $u(x, t) = \frac{x}{2t}$ est solution :

Partons de l'équation de départ,

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d\xi} \psi^2(\xi) = \xi \psi'(\xi) \\
& \Leftrightarrow 2\psi(\xi) \psi'(\xi) = \xi \psi'(\xi) \\
& \Leftrightarrow 2\psi(\xi) = \xi \\
& \Leftrightarrow \psi(\xi) = \frac{\xi}{2} \\
& \Leftrightarrow u(x, t) = \frac{x}{2t}.
\end{aligned}$$

Regardons maintenant plus précisément le cas de l'équation de Burgers selon les valeurs de u^- et u^+ .

– 1^{er} cas : $u^- < u^+$

De plus, $2\varphi(\xi) = \xi$ définit une solution régulière, autosimilaire, connectant u^- et u^+ : c'est une détente sur l'intervalle $2u^-t < x < 2u^+t$.

Dans ce cas, on peut aussi avoir des chocs mais ils ne sont pas entropiques, alors que la détente est entropique car la solution est continue.

Lemme 1 *Pour l'équation de Burgers, dans le cas $u^- < u^+$, la solution choc (u^-, u^+) de vitesse $\sigma = u^+ + u^-$ n'est pas la solution entropique.*

Preuve :

Il suffit de montrer que la condition de Rankine-Hugoniot entropique n'est pas vérifiée pour une entropie quelconque.

Prenons $\eta(u) = u^2$, avec la relation $q' = \eta' f'$, il en résulte que $q = \frac{4}{3}u^3$. La solution est entropique si elle vérifie la condition de Rankine-Hugoniot entropique : $[[\frac{4u^3}{3}]] \leq [[u^2]](u^+ + u^-)$.

Montrons donc que $[[\frac{4u^3}{3}]] > [[u^2]](u^+ + u^-)$.

Pour cela on calcule,

$$\begin{aligned}
& \frac{4}{3}u^{+3} - \frac{4}{3}u^{-3} = \frac{4}{3}(u^+ - u^-)(u^{+2} + u^+u^- + u^{-2}) \\
& \text{et } (u^+ + u^-)(u^{+2} - u^{-2}) = (u^+ + u^-)^2(u^+ - u^-).
\end{aligned}$$

Il faut donc vérifier que :

$$\begin{aligned}
& \frac{4}{3}u^{+3} - \frac{4}{3}u^{-3} - (u^+ + u^-)(u^{+2} - u^{-2}) > 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{4}{3}(u^+ - u^-)(u^{+2} + u^+u^- + u^{-2}) - (u^+ + u^-)^2(u^+ - u^-) > 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{4}{3}(u^{+2} + u^+u^- + u^{-2}) - (u^+ + u^-)^2 > 0 \\
& \Leftrightarrow u^{+2} - 2u^+u^- + u^{-2} > 0 \\
& \Leftrightarrow (u^+ - u^-)^2 > 0, \text{ ce qui est toujours vrai car } u^+ \neq u^-.
\end{aligned}$$

On a donc obtenu que $[[\frac{4u^3}{3}]] > [[u^2]](u^+ + u^-)$. La condition de Rankine-Hugoniot entropique n'est donc pas vérifiée, il ne s'agit donc pas de la solution entropique, dans le cas où $u^- < u^+$. Mais, nous verrons un peu plus loin qu'il s'agit de la solution entropique dans le cas où $u^- > u^+$.

■

Soit maintenant le schéma d'une solution du problème de Riemann avec $f(u) = u^2$ dans le cas où $u^- < u^+$:

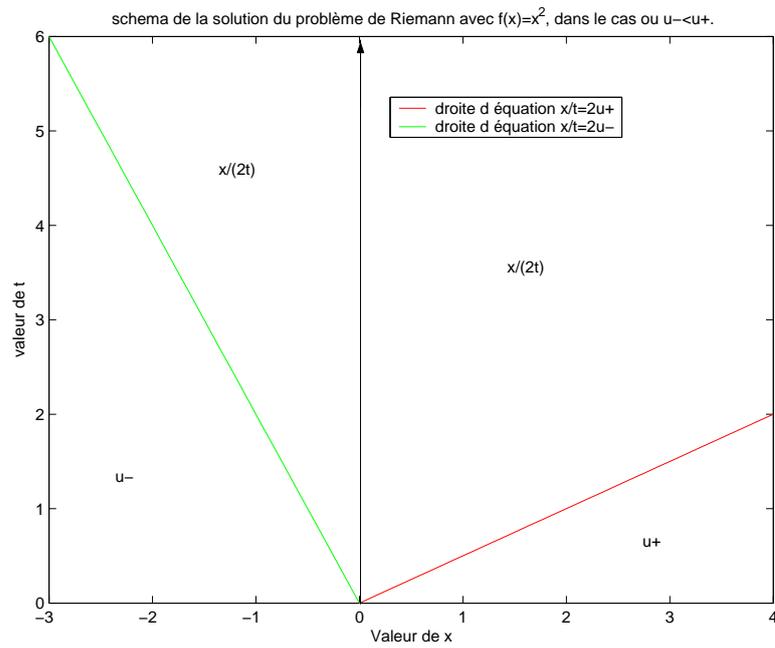


FIGURE 4.1 – Solution dans le cas où $u^- < u^+$.

On en déduit l'évolution de la solution u à différents temps t .

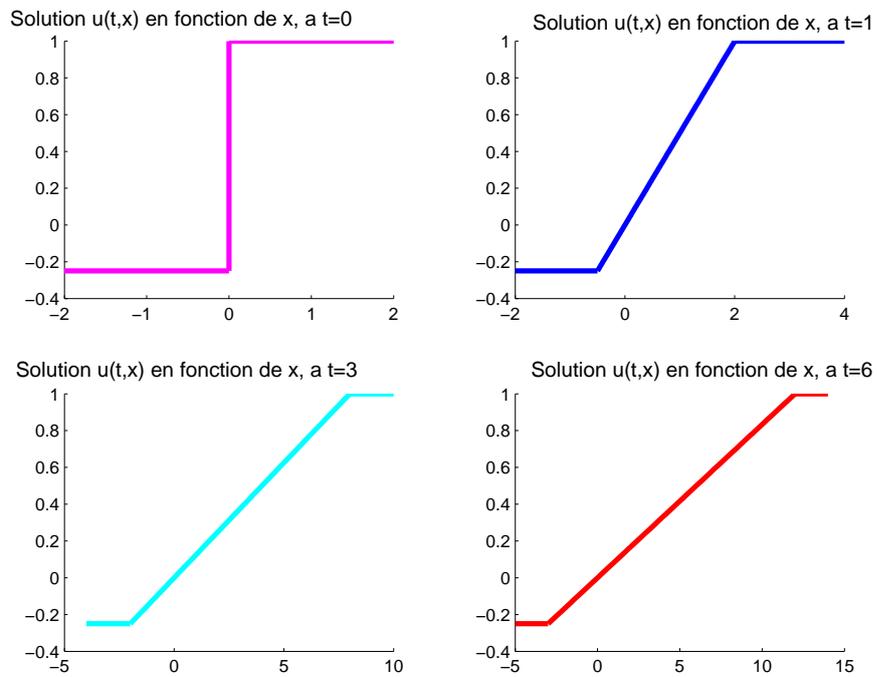


FIGURE 4.2 – Solution de l'équation de Burgers à différents temps t fixés

– 2^{eme} cas : $u^- > u^+$

On introduit cette fois l'enveloppe concave supérieure de $f(u) = u^2$ sur $[u^+; u^-]$.

Dans notre cas, l'enveloppe est affine et la solution se résume donc à un choc séparant les deux états constants et se propageant à la vitesse $\sigma = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}$; c'est à dire dans le cas de l'équation de Burgers, $\sigma = \frac{u^{+2} - u^{-2}}{u^+ - u^-} = u^+ + u^-$.

En effet on suppose que la solution faible est constante par morceaux, prend exactement les deux valeurs que prend u_0 et que la discontinuité est une courbe qui part de $(0, 0)$.

On utilise le théorème de Rankine-Hugoniot, $\frac{[[f(u)]]}{[[u]]} = \alpha'$.

u est constante de part et d'autres donc les sauts de u et de $f(u)$ sont aussi des constantes, qui ne dépendent donc pas du temps.

Il en résulte que la dérivée de la courbe de discontinuité α' est une constante, la courbe est donc une droite.

De plus, la pente de cette droite est $\frac{[[f(u)]]}{[[u]]} = \frac{u^{+2} - u^{-2}}{u^+ - u^-} = u^+ + u^-$.

Lemme 2 *Pour l'équation de Burgers, dans le cas $u^- < u^+$, la solution choc (u^-, u^+) de vitesse $\sigma = u^+ + u^-$ est la solution entropique.*

Preuve :

Montrons donc que, dans ce cas, le choc est entropique. Nous devons montrer que la condition de Rankine-Hugoniot entropique est vérifiée pour toutes les entropies de Krushkov et pas seulement pour une entropie en particulier. On sait en effet d'après le proposition 7 que la solution choc sera entropique si et seulement si elle est solution entropique pour tout couple entropie-flux d'entropie de Kruzhkov.

Montrons que pour tout κ , on a :

$$\begin{aligned} & [[q_\kappa(u)]] - (u^+ + u^-)[[\eta_\kappa(u)]] \leq 0 \\ \Leftrightarrow & q_\kappa(u^+) - q_\kappa(u^-) - (u^+ + u^-)(\eta_\kappa(u^+) - \eta_\kappa(u^-)) \leq 0. \end{aligned} \tag{C}$$

Il y a 3 cas :

– 1^{er} cas : $\kappa < \min(u^+, u^-)$ donc $u^\pm - \kappa > 0$ donc $\eta_\kappa(u^\pm) = u^\pm - \kappa$ et

$$\begin{aligned} \eta_\kappa(u^+) - \eta_\kappa(u^-) &= u^+ - \kappa - u^- + \kappa \\ &= u^+ - u^- \end{aligned}$$

De plus,

$$q_\kappa(u) = \text{sgn}(u - \kappa)(f(u) - f(\kappa))$$

la partie de gauche de (C) égal à $f(u^+) - f(u^-) - (u^+ + u^-)(u^+ - u^-)$ est nulle.

La condition de Rankine Hugoniot entropique est donc vérifiée.

– 2^{eme} cas : $\kappa > \max(u^+, u^-)$ même calcul que le premier cas ainsi on a :

$$f(u^+) - f(u^-) - (u^+ + u^-)(u^+ - u^-) = 0$$

Et donc la condition de Rankine Hugoniot entropique est vérifiée.

– 3^{eme} cas : $u^+ < \kappa < u^-$, on pose $\sigma = u^+ + u^-$.

$$\begin{aligned} q_\kappa(u^+) &= -(f(u^+) - f(\kappa)) \\ q_\kappa(u^-) &= +(f(u^-) - f(\kappa)) \\ \eta_\kappa(u^+) &= -(u^+ - \kappa) \\ \eta_\kappa(u^-) &= +(u^- - \kappa) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \llbracket q_\kappa \rrbracket - \sigma \llbracket \eta_\kappa \rrbracket = 2f(\kappa) - f(u^+) - f(u^-) - (u^+ + u^-)(2\kappa - u^+ - u^-).$$

Avec $f(u) = u^2$, on obtient :

$$\begin{aligned} \llbracket q_\kappa \rrbracket - \sigma \llbracket \eta_\kappa \rrbracket &= 2\kappa^2 - (u^+)^2 - (u^-)^2 - (u^+ + u^-)(2\kappa - u^+ - u^-) \\ &= 2\kappa^2 - 2\kappa(u^+ + u^-) + 2u^+u^- \\ &= 2(\kappa - u^+)(\kappa - u^-) \end{aligned}$$

et donc $\llbracket q_\kappa \rrbracket - \sigma \llbracket \eta_\kappa \rrbracket \leq 0$.

Il en résulte que $u = u^+ + u^-$ est la solution choc entropique pour l'équation de Burgers. ■

Remarque 2 Remarquons simplement qu'il existe une infinité d'autres solutions.

Par exemple, dans le cas $u^- < u^+$, il existe un u^* , entre u^- et u^+ tel que $u^* + u^- \leq u^* + u^+$. On vérifie de la même façon que précédemment avec Rankine-Hugoniot qu'on peut construire une solution constante par morceaux qui prend les trois valeurs u^- , u^* et u^+ ; séparées par les droites de pentes $u^- + u^*$ et $u^+ + u^*$.

Par contre ceci est impossible dans le cas où $u^- > u^+$ car il n'existe pas de u^* tel que $u^* + u^- \leq u^* + u^+$.

4.2.5 Un exemple de flux non convexe

Prenons maintenant une fonction f non convexe définie par :

$$f(x) = \frac{x^a(1-x)^b}{x^a + (1-x)^b} \text{ prenons par exemple, } a = b = 2$$

soit,

$$f(x) = \frac{x^2(1-x)^2}{x^2 + (1-x)^2}$$

1^{er} cas : $u^- < u^+$

On trace la fonction f sur $[u^-, u^+]$, ainsi que son enveloppe convexe inférieure f_c . Celle-ci dépend des valeurs que l'on prend pour u^- et u^+ . On admet qu'il suffit ensuite de travailler sur la fonction convexe inférieure.

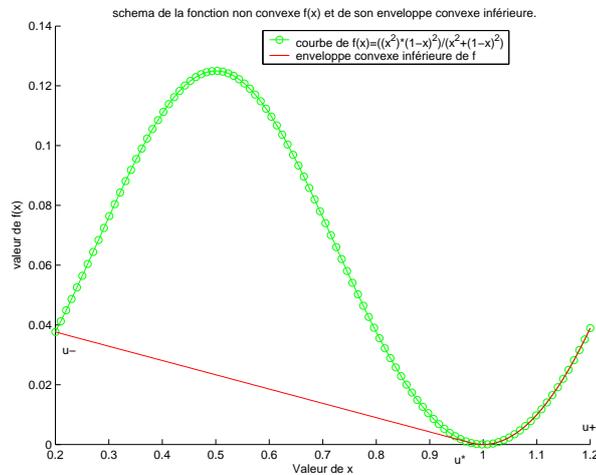


FIGURE 4.3 – Schema de la fonction non convexe f et de son enveloppe convexe inférieure

On en déduit donc le graphe de la solution, tout d'abord un graphe du temps en fonction de x :

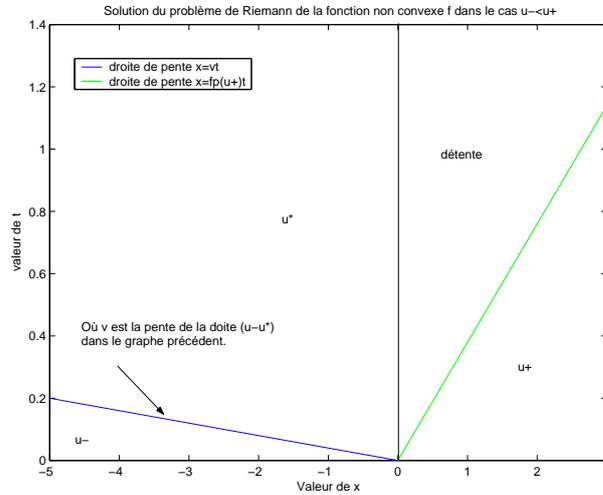


FIGURE 4.4 – Solution du problème de Riemann pour la fonction f non convexe pour le 1^e cas

Calcul de u^* tel que

$$f'(u^*) = \frac{f(u^*) - f(u^-)}{u^* - u^-}$$

2^{eme} cas : $u^- > u^+$

On introduit cette fois l'enveloppe concave supérieure f^c sur $[u^-, u^+]$, et on procède de manière analogue. L'enveloppe concave supérieure dépend évidemment des valeurs que nous prenons pour u^- et u^+ .

Dans notre cas l'enveloppe est égale à la fonction f sur l'intervalle $[u^+, u^*]$, c'est une détente. Puis, sur l'intervalle $[u^*, u^-]$, l'enveloppe est affine, c'est un choc.

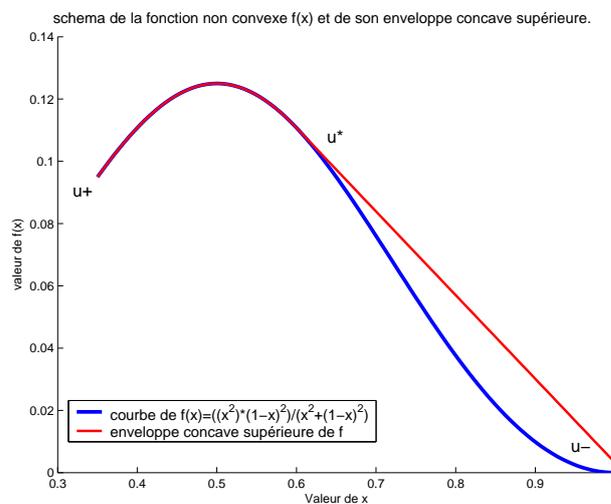


FIGURE 4.5 – Schema de la fonction non convexe f et de son enveloppe concave supérieure

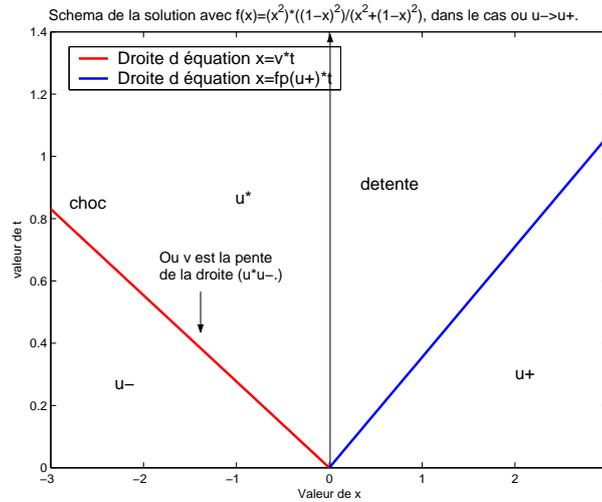


FIGURE 4.6 – Solution du problème de Riemann pour la fonction f non convexe pour le 2^e cas

4.2.6 Calcul de la fonction ψ

Calculons la fonction ψ qui représente la détente dans le graphe de la solution $u(t, x)$ en fonction de x à t fixé. Soit notre équation de départ $\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0$, avec $u(t, x) = \psi(\frac{x}{t})$ et $\xi = \frac{x}{t}$, on obtient donc :

$$-\frac{x}{t^2}\psi'(\xi) + f'(\psi(\xi))\psi'(\xi) = 0$$

Soit, $\psi(\xi) = (f')^{-1}(\xi)$. On remarque que $(f')^{-1}(\xi)$ est bien définie car f' est strictement décroissante sur l'intervalle considéré $[u^+, u^*]$. On utilise ensuite la méthode de Newton pour calculer $(f')^{-1}$.

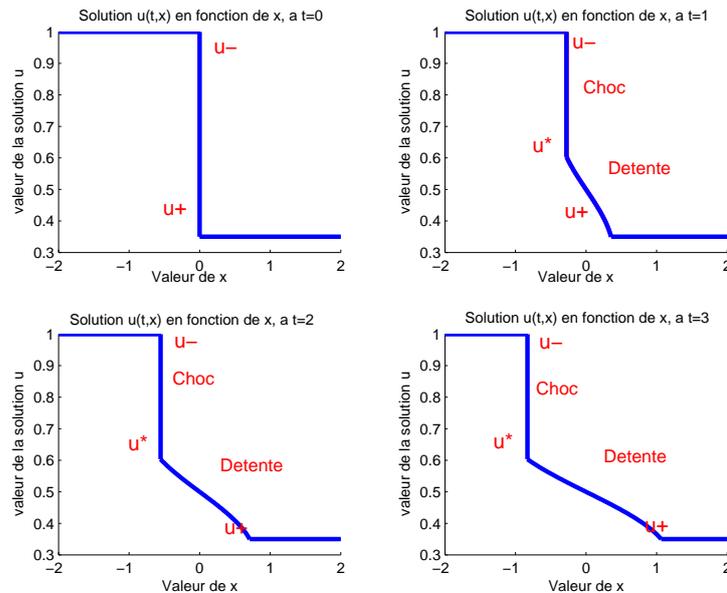


FIGURE 4.7 – Schema de la fonction non convexe f et de son enveloppe concave supérieure

Chapitre 5

Etude du problème de Burgers avec quelques schémas numériques

On va ici s'intéresser à résoudre l'équation de Burgers avec différents schémas. On verra ainsi lesquels sont satisfaisants et lesquels le sont moins voire pas du tout. Pour chacun des schémas, on va tracer la solution approchée et la solution exacte puis afficher l'erreur en norme L^1 ce qui nous permettra de regarder la performance de chaque schéma.

Il faut également tenir compte de la CFL qui est ici $\sup_{[u_{min}, u_{max}]} |f'(s)| \frac{\delta t}{\delta x} \leq 1$: plus cette CFL est proche de 1 mieux c'est mais dès qu'elle dépasse 1 le schéma n'est plus stable.

Pour calculer la solution exacte il faut prendre une donnée initiale en créneau. Ainsi, on peut séparer ce créneau pour avoir deux problèmes de Riemann différents et trouver la solution exacte que l'on comparera avec la solution approchée trouvée pour les différents schémas.

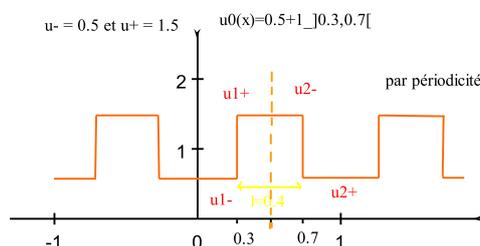


FIGURE 5.1 – Donnée initiale

Intéressons nous à l'intervalle $[0, 1]$, le reste se retrouve par périodicité. On a alors :

- Problème 1 :
 $0.5 = u_1^- < u_1^+ = 1.5$: On a une détente.

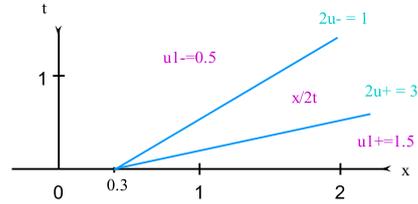


FIGURE 5.2 – Premier problème de Riemann

– Problème 2 :

$1.5 = u_2^- > u_2^+ = 0.5$: On a un choc.

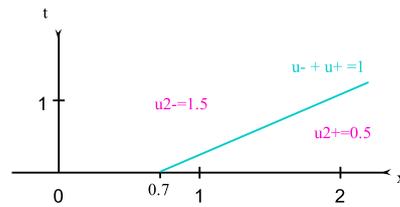


FIGURE 5.3 – Deuxième problème de Riemann

Pour un certain temps t fixé, la donnée initiale va se modifier pour donner la solution $u(t, x)$.

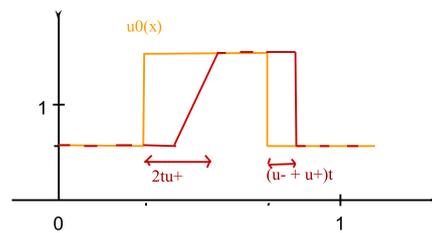


FIGURE 5.4 – Comparaison entre la solution exacte et la donnée initiale

Tout ceci va bien marcher, c'est à dire que les différentes valeurs des solutions ne se rencontrent pas, tant que l'on n'atteint pas le temps t^* où :

$$2u_1^+ t^* = (u_2^+ + u_2^-)t^* + l \Leftrightarrow t^* = \frac{l}{2u_1^+ - u_2^+ - u_2^-}.$$

Donc dans notre cas, $t^* = \frac{0.4}{2 \cdot 1.5 - 0.5 - 1.5} = 0.4$.

Il en résulte que si $t < t^*$, on peut trouver la solution exacte :

$$u(t, x) = \begin{cases} u_1^- + x_{min} & \text{si } x \leq 2u_1^- t \\ \frac{x}{2t} + x_{min} & \text{si } 2u_1^- \leq x \leq 2u_1^+ t \\ u_2^- = u_1^+ + x_{min} & \text{si } 2u_1^+ t \leq x \leq (u_2^- + u_2^+)t + l \\ u_2^+ + x_{min} & \text{si } (u_2^- + u_2^+)t + l \leq x; \end{cases}$$

c'est-à-dire,

$$u(t, x) = \begin{cases} u^- + x_{min} & \text{si } x \leq 2u^- t \\ \frac{x}{2t} + x_{min} & \text{si } 2u^- \leq x \leq 2u^+ t \\ u^+ + x_{min} & \text{si } 2u^+ t \leq x \leq (u^- + u^+)t + l \\ u^- + x_{min} & \text{si } (u^- + u^+)t + l \leq x. \end{cases}$$

Ici donc ; pour tout $t < 0,4$:

$$u(t, x) = \begin{cases} 0,5 + 0,3 & \text{si } x \leq t \\ \frac{x}{2t} + 0,3 & \text{si } t \leq x \leq 3t \\ 1,5 + 0,3 & \text{si } 3t \leq x \leq 2t + 0,4 \\ 0,5 + 0,3 & \text{si } 2t + 0,4 \leq x. \end{cases}$$

On va s'intéresser à trois schémas :

– Schéma non conservatif :

Ce schéma s'écrit :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + 2u_i^n \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0.$$

On obtient alors :

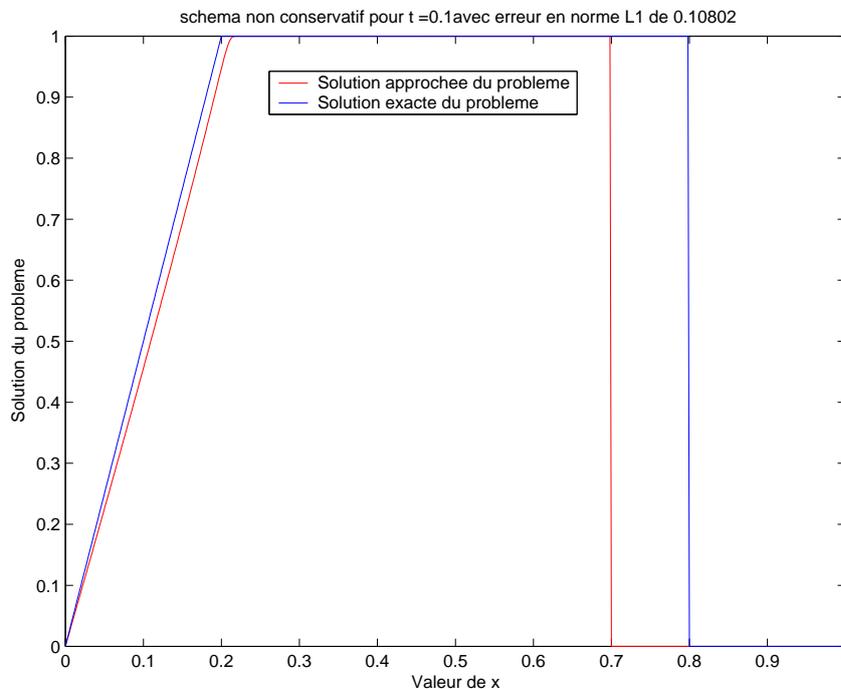


FIGURE 5.5 – Schéma non conservatif pour une $CFL \leq 1$

On remarque que le schéma calcule mal la vitesse du choc : le choc ne se déplace pas. Ce schéma converge donc vers une solution mais ce n'est pas la bonne !

- Schéma de Lax-Friedrichs : Ce schéma est s'écrit sous la forme :

$$\frac{u_i^{n+1} - \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2}}{\Delta t} + \frac{f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n)}{2\Delta x} = 0.$$

Ce qui s'écrit pour l'équation de Burgers :

$$\frac{u_i^{n+1} - \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2}}{\Delta t} + \frac{(u_{i+1}^n)^2 - (u_{i-1}^n)^2}{2\Delta x} = 0.$$

N.B. : On peut démontrer la stabilité L^∞ de ce schéma.

On a alors pour une CFL convenable :

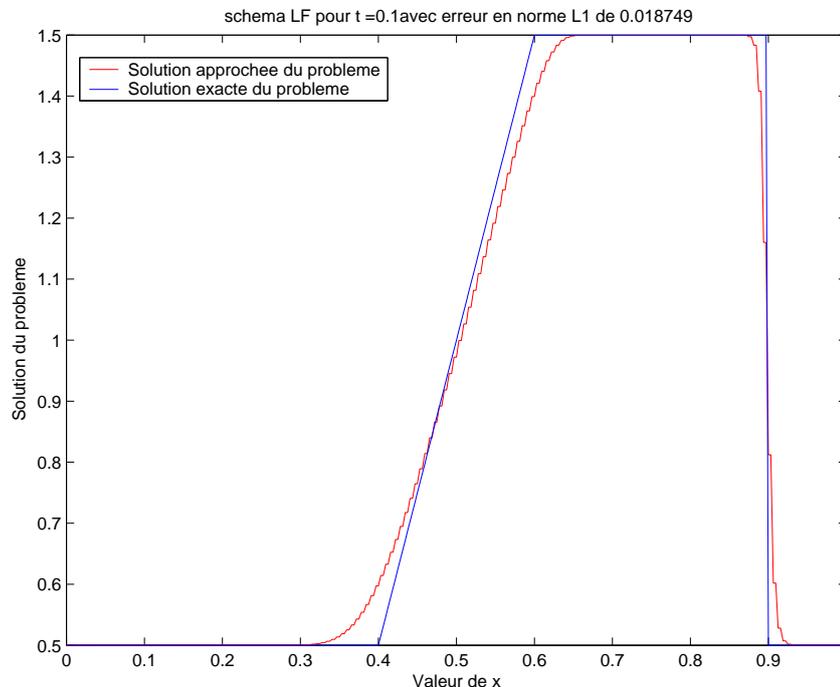


FIGURE 5.6 – Schéma de Lax-Friedrichs pour une $CFL \leq 1$

Comparé au schéma précédent celui-ci capture bien la bonne solution bien qu'il soit un peu diffusif.

- Schéma décentré amont ou schéma de Godunov :

Pour écrire ce schéma il nous faut décrire la fonction de Godunov g dans le cas de l'équation de Burgers. On a alors 2 cas :

- $a > b$:

$$\text{si } a + b > 0, g(a, b) = a^2$$

$$\text{si } a + b < 0, g(a, b) = b^2$$

$$\text{si } a + b = 0, g(a, b) = 0$$

– $a < b$:

$$\text{si } a < b < 0, g(a, b) = b^2$$

$$\text{si } 0 < a < b, g(a, b) = a^2$$

$$\text{si } a \leq 0 < b, g(a, b) = 0$$

On va regarder ce schéma pour une bonne et une mauvaise CFL.
Regardons d'abord ce que l'on a pour une $CFL > 1$:

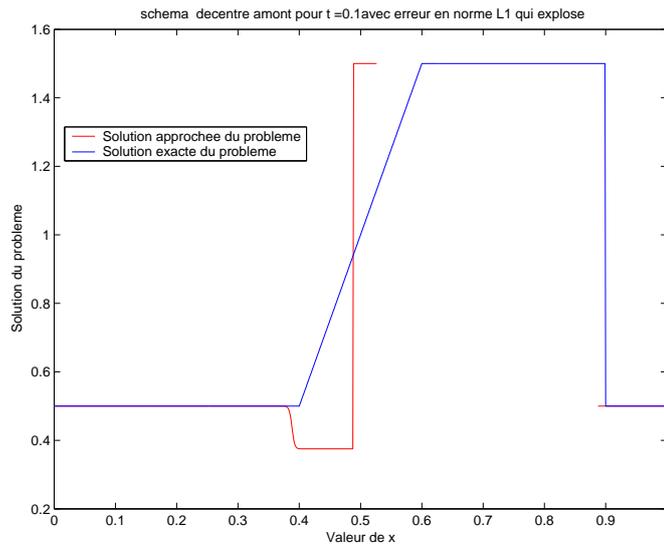


FIGURE 5.7 – Schéma de Godunov pour une $CFL > 1$

On voit bien que le schéma n'est pas stable et la norme L^1 explose à l'infini. Par contre, si la $CFL \leq 1$, on a :

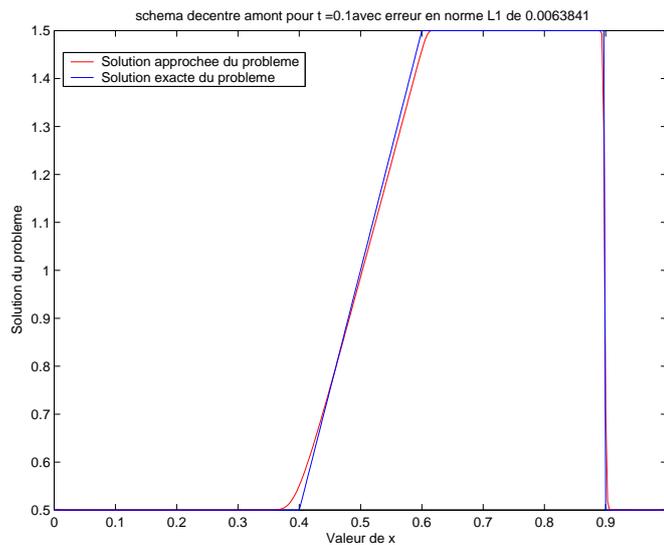


FIGURE 5.8 – Schéma de Godunov pour une $CFL \leq 1$

On peut voir que le schéma capture bien la bonne solution, l'erreur est très petite. Devant, le choc est bien calculé, la détente aussi mais elle diffuse un peu plus. Cependant, ce schéma diffuse moins que le schéma de Lax-Friedrichs. Le schéma de Godunov capture donc une meilleure solution que le schéma de Lax-Friedrichs.

Chapitre 6

Conclusion

Dressons maintenant un bilan des résultats présentés.

En sachant que les solutions des lois de conservation scalaire linéaire sont régulières, il est facile de voir que dans le cas non linéaire elles ne le sont pas toujours. Les difficultés prennent donc naissance ici.

Pour les surmonter nous avons étudié le cas linéaire, pour tenter d'appliquer les résultats au cas non linéaire. Il a cependant fallu définir pour cela de nouvelles notions. L'entropie est l'outil qui nous permet d'obtenir l'unicité de la solution faible alors que dans le cas linéaire on a immédiatement l'unicité de la solution au sens classique. De plus, l'étude de ces lois étant très complexe, on s'est intéressé à un problème simplifié, le problème de Riemann.

Pour conclure, nous avons illustré ces résultats à l'aide de schémas numériques plus ou moins satisfaisants.

Annexe A

Résultats intermédiaires

Le résultat suivant fait le lien entre dérivée et translatée ce que l'on a utilisé pour démontrer le théorème de Kolmogorov :

Lemme 3 On a $\|\tau_h u - u\|_{L^1} \leq h \|\partial_x u\|$.

Preuve :

Soit $u(x+h) - u(x) = \int_x^{x+h} \partial_x u(s) ds$ avec $u \in C^\infty$. Ainsi on a que :

$$|u(x+h) - u(x)| \leq \int_x^{x+h} |\partial_x u(s)| ds.$$

On intègre maintenant par rapport à x :

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x+h) - u(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} \left[\int_x^{x+h} |\partial_x u(s)| ds \right] dx.$$

Puis on effectue le changement de variable $s = x + t$, ainsi on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x+h) - u(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} \left[\int_0^h |\partial_x u(x+t)| dt \right] dx.$$

En utilisant le théorème de Fubini on a :

$$\begin{aligned} \|\tau_h u - u\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}} |u(x+h) - u(x)| dx \leq \int_0^h \underbrace{\left[\int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(x+t)| dx \right]}_{\text{indépendant de } t \text{ car intégrale sur } \mathbb{R}} dt \\ &\leq h \int_{\mathbb{R}} |\partial_x u| \leq h \|\partial_x u\|. \end{aligned}$$

Les fonctions C^∞ sont denses dans tous les espaces par exemple dans L^1 . Donc l'information sur les dérivées donne l'information sur les translatées. Donc :

$$\int_{\mathbb{R}} |u_\epsilon(x+h) - u_\epsilon(x)| \leq C \times h.$$

■

Lemme 4 Au sens des distributions, on a :

$$\frac{\partial}{\partial x} |u(x, t)| = \operatorname{sgn}(u(x, t)) \frac{\partial}{\partial x} u(x, t).$$

Preuve :

En effet , posons $\Phi_\epsilon(s) = \sqrt{s^2 + \epsilon}$, alors $\Phi_\epsilon \in C^1$ et $\Phi'_\epsilon(s) = \frac{s}{\sqrt{s^2 + \epsilon}}$ et $|\Phi'_\epsilon(s)| \leq 1 \forall s, \forall x$.
On a une classe de fonction uniformément 1-Lipschitzienne.
Soit u une fonction de classe C^1 , alors $\Phi_\epsilon(u)$ est C^1 et :

$$(\Phi_\epsilon(u(t, x)))' = \Phi'_\epsilon(u(t, x))u'(t, x) = \frac{u(t, x)}{\sqrt{u^2(t, x) + \epsilon}}u'(t, x)$$

$$\begin{aligned} \forall \Psi \in D(\Omega), \int \Phi_\epsilon(u(t, x))\partial_{x_i}(\Psi(t, x))dx &= - \int \partial_{x_i}(\Phi_\epsilon(u(t, x)))\Psi(t, x)dx \\ &= - \int \frac{u(t, x)}{\sqrt{u^2(t, x) + \epsilon}}\partial_{x_i}u(t, x)\Psi(t, x)dx \end{aligned}$$

Or $|\Phi_\epsilon(u(t, x))| \leq 1 + |u(t, x)| \in L^1$ et $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Phi_\epsilon(u(t, x)) = |u(t, x)|$. Par le théorème de convergence dominée, on a donc :

$$\int \Phi_\epsilon(u(t, x))\partial_{x_i}(\Psi(t, x))dx \rightarrow \int |u(t, x)|\partial_{x_i}\Psi(t, x)dx \text{ lorsque } \epsilon \text{ tend vers } 0$$

De plus,

$$\left| \frac{u(t, x)}{\sqrt{u^2(t, x) + \epsilon}}\partial_{x_i}u(t, x)\Psi(t, x) \right| \leq \partial_{x_i}u(t, x)\Psi(t, x) \in L^1$$

et

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{u(t, x)}{\sqrt{u^2(t, x) + \epsilon}} = \text{sgn}(u(t, x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } u(t, x) > 0 \\ 0 & \text{si } u(t, x) = 0 \\ -1 & \text{si } u(t, x) < 0 \end{cases}$$

Par le théorème de convergence dominée, on a :

$$- \int \frac{u(t, x)}{\sqrt{u^2(t, x) + \epsilon}}\partial_{x_i}u(t, x)\Psi(t, x)dx \rightarrow - \int \text{sgn}(u(t, x))\partial_{x_i}\Psi(t, x)dx \text{ lorsque } \epsilon \text{ tend vers } 0$$

Par définition, on a bien $\partial_x|u| = \text{sgn}(u)\partial_xu$ au sens des distributions . ■

On démontre de la même manière :

Lemme 5 $\nabla u^+ = \nabla u 1_{\{u \geq 0\}}$

Annexe B

Programme

Pour tracer les schémas nous avons eu besoin des programmes suivants :

– Programme principal :

```
clear                % On nettoie la memoire
close all           % On ferme toutes les fenetres graphiques

%%% CHOIX DU SCHEMA NUMERIQUE UTILISE %%%

%schema='nc';        % Schema non conservatif
%schema='LF';        % Schema de Lax-Friedrichs
schema='da';         % Schema decentre amont

disp(['Schema utilise : ' schema])

%%% PARAMETRES DU CRENEAU

global xmin xmax umoins upluss

xmin=0.3;
xmax=0.7;
umoins=0.5;
upluss=1.5;

%%% PARAMETRES DU CALCUL %%%

N=80+1;             % Nombre de points de discretisation en x
M=160+1;           % Nombre de points de discretisation en t
T=0.5;              % Temps final du calcul

x=linspace(0,1,N);  % Vecteur des abscisses pour le trace de la solution
t=linspace(0,T,M);  % Vecteur des instants du calcul

dx=x(2)-x(1);       % Pas d'espace = 1/(N-1);
dt=t(2)-t(1);       % Pas de temps = T/(M-1);

disp([' dt = ' num2str(dt) ' et dx = ' num2str(dx) ...
      'et CFL ' num2str(max(abs(2*umoins),abs(2*upluss))*dt/dx)]);
```

```

%%%% PRISE EN COMPTE DE LA PERIODICITE %%%

plus=zeros(N,1);
moins=zeros(N,1);

plus(1:N-1)=[2:N];      % plus(i)=i+1 pour i=1,...,N-1
plus(N)=2;              % plus(N)=2

moins(2:N)=[1:N-1];    % moins(i)=i-1 pour i=2,...,N
moins(1)=N-1;          % moins(1)=N-1

%%%% ECRITURE DES SCHEMAS %%%

u=zeros(M,N);
u(1,:)=uinit(x);      % Initialisation

for n=1:M-1
    switch schema
        case 'LF'
            u(n+1,:)=(1/2)*(u(n,moins)+u(n,plus))+(dt/(2*dx))*(burgers(u(n,moins))
                ...-burgers(u(n,plus)));
        case 'nc'
            u(n+1,:)=u(n,:)+(dt/dx)*2*u(n,:).*(u(n,moins)-u(n,:));
        case 'da'
            u(n+1,:)=u(n,:)+(dt/dx)* ( godunov(u(n,moins),u(n,:)) -
                ...godunov(u(n,:),u(n,plus)));
    end
end

%%%% AFFICHAGE DE L ERREUR EN NORME INFINIE %%%

Einf=max(abs(u(M,:)-uexacte(t(M),x)));
EL1=sum(dx*abs(u(M,:)-uexacte(t(M),x)));
disp([' dt = ' num2str(dt) ' et dx = ' num2str(dx)]);
disp(['Norme infinie de l''erreur = ' num2str(Einf)]);
disp(['Norme L1 de l''erreur = ' num2str(EL1)]);

%%%% TRACE %%%

for n=1:M
    plot(x,u(n,:), 'r', x,uexacte(t(n),x), 'b')
    title(['t = ' num2str(t(n))])
    pause(0.1);
end

```

```

- Donnée initiale :
function [y]=uinit(x)
global umoins upluss xmin xmax
    y=umoins+(upluss-umoins)*(mod(x,1)>xmin).*(mod(x,1)<xmax);
end
- solution exacte :
function [y]=uexacte(t,x)
global xmin xmax umoins upluss
l=xmax-xmin;
xx=mod(x-2*umoins*t,1)+2*umoins*t;
y=    umoins*(xx<=(2*umoins*t)+xmin) ...
    + ((xx-xmin)/(2*t)).*((2*umoins*t)+xmin<xx).*(xx<=(2*upluss*t)+xmin) ...
    + upluss*((2*upluss*t)+xmin<xx).*(xx<=((umoins+upluss)*t+l+xmin)) ...
    + umoins*((umoins+upluss)*t+l+xmin<xx);
- fonction f pour l'équation de Burgers :
function [y]=burgers(x)
    y=x.^2; % mod(.,1) pour la 1-periodicite
end
- Schema de Godunov :
function [z]=godunov(x,y)
z = (x>=y).*(x+y>0).*burgers(x) + (x>=y).*(x+y<=0).*burgers(y) ...
    + (x<y).*(x>0).*burgers(x) + (x<y).*(y<0).*burgers(y);

```

Le programme suivant nous permet de tracer l'enveloppe concave de la fonction f pour un problème non linéaire de la forme (*).

```

clear
f=inline('(x.^2).*((1-x).^2)./((x.^2)+((1-x).^2)')');
fp=inline('(2.*x.*(1-x).*((1-x).^3-(x.^3))./((x.^2+((1-x).^2)).^2)');

N=100;
x=linspace(0.35,1,N);

y=f(x);
yp=fp(x);

if (max(y-y(1)-yp(1)*(x-x(1)))>0)
    yp(1)=max((y(2:N)-y(1))./(x(2:N)-x(1)));
end;
iok=1;

for i=1:N
    if (max(y-y(i)-yp(i)*(x-x(i)))<=0)
        z(i)=y(i);
        iok=i;
    else
        z(i)=y(iok)+(x(i)-x(iok))*yp(iok);
    end;
end;

clf;

```

hold on

```
plot(x,y,'b');
plot(x,z,'r');
title('schema de la fonction non convexe f(x) et de son enveloppe concave supérieure.')
xlabel('Valeur de x')
ylabel('valeur de f(x)')
legend('courbe de f(x)=((x^2)*(1-x)^2)/(x^2+(1-x)^2)', 'enveloppe concave supérieure de f')
```

hold off

Ce schéma donne la fonction $(f')^{-1}$ qui nous permet de calculer la fonction ψ de la détente.

```
clear
clear all
N=100;
M=100;

e=10^-6;
K=15;
f=inline('((x.^2).*((1-x).^2))./((x.^2)+((1-x).^2))');
fp=inline('(2.*x.*(1-x).*((1-x).^3-(x.^3)))./((x.^2+((1-x).^2)).^2)');
fpp=inline('(2.*(4.*x.^6-12.*x.^5+18.*x.^4-16.*x.^3+12.*x.^2-6.*x+1))./(2.*x.^2-2.*x+1).^3');

umoins=1;
upluss=0.35;

uetoile=0.6034; %% Cette valeur depend de umoins et upluss et doit
                %% etre changee si ces deux valeurs changent

vmoins=fp(umoins); %% si uetoile est juste, cette valeur doit aussi etre
                    %% egale a (f(umoins)-f(uetoile))/(umoins-uetoile)
vplus=fp(upluss);

t=1;

y0=linspace(vmoins*t,vplus*t,N);
y=linspace(vmoins*t,vplus*t,N);
x0=linspace(uetoile,upluss,N);

for k=1:K
    x1=x0-((fp(x0)-y/t)./fpp(x0));
    if max(abs(x1-x0))>e
        x0=x1;
    else
        continue
    end
end
end
```

```

subplot(2,2,1)
hold on
plot(linspace(-2,0,M),umoins*ones(1,M))
plot(zeros(1,M),linspace(plusplus,umoins,M));
plot(linspace(0,2,M),plusplus*ones(1,M))
hold off

subplot(2,2,2)
hold on
plot(y0,x0);
plot(linspace(-2,vmoins*t,M),umoins*ones(1,M))
plot(linspace(vplus*t,2,M),plusplus*ones(1,M))
plot(vmoins*t*ones(1,M),linspace(uetoile,umoins,M))
hold off

t=2;

y0=linspace(vmoins*t,vplus*t,N);
y=linspace(vmoins*t,vplus*t,N);
x0=linspace(uetoile,plusplus,N);

for k=1:K
    x1=x0-((fp(x0)-y/t)./fpp(x0));
    if max(abs(x1-x0))>e
        x0=x1;
    else
        continue
    end
end

subplot(2,2,3)
hold on
plot(y0,x0);
plot(linspace(-2,vmoins*t,M),umoins*ones(1,M))
plot(linspace(vplus*t,2,M),plusplus*ones(1,M))
plot(vmoins*t*ones(1,M),linspace(uetoile,umoins,M))
hold off

t=3;

y0=linspace(vmoins*t,vplus*t,N);
y=linspace(vmoins*t,vplus*t,N);
x0=linspace(uetoile,plusplus,N);

for k=1:K
    x1=x0-((fp(x0)-y/t)./fpp(x0));
    if max(abs(x1-x0))>e
        x0=x1;
    else

```

```
        continue
    end
end

subplot(2,2,4)
hold on
plot(y0,x0);
plot(linspace(-2,vmoins*t,M),umoins*ones(1,M))
plot(linspace(vplus*t,2,M),upluss*ones(1,M))
plot(vmoins*t*ones(1,M),linspace(uetoile,umoins,M))
hold off
```

Bibliographie

- [1] GODLEWSKI, Edwidge, RAVIART, Pierre-Arnaud, *Hyperbolic system of conservation laws*, Ellipses, 1991.
- [2] SEGUIN, Nicolas, *Méthodes de volumes finis pour les fluides compressibles*, 2009.
- [3] PERTHAME, Benoît, *Equations de transport non linéaires et systèmes hyperboliques*, 2003-2004.
- [4] HERBIN, Raphaèle, *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, 2008.
- [5] SBIHI, Karima, *Etudes de quelques EDP non linéaires dans L^1 avec des conditions générales sur le bord*, 2006.
- [6] BOYER, Franck, FABRIE, Pierre, *Eléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles*, 2005.
- [7] BOYER, Franck, *Analyse numérique des EDP*, 2009.
- [8] BOUDARIAS, Christian, *Lois de conservation et transport routier*.
- [9] BOUDARIAS, Christian, *Modèles de trafic routier*.
- [10] DUCHATEAU, Paul, *Introduction to Nonlinear Partial Differential Equations*.
- [11] DESPRÈS, Bruno, *Lois de conservation et modélisation des Chocs*.
- [12] SANTOS, BONET, CUNHA, *Buckley-Leverett mathematical and numerical models describing vertical equilibrium process in porous media*.
- [13] SAINT BLANQUET, Claude, *Mécanique des fluides*.
- [14] JIMENEZ, Julien, *Lois de conservations scalaires à flux discontinu*.
- [15] RICARD, Yanick, *Les équations fondamentales de la mécanique des fluides*.
- [16] G. ALLAIRE F. COQUEL *Analyse théorique et numérique des systèmes hyperboliques de lois de conservation*
- [17] BONNOTTE, Nicolas FRESLON, Amaury, *Solutions entropiques des lois de conservation scalaires unidimensionnelles*, 2008.