Méthodes numériques pour les écoulements diphasiques de type Baer Nunziato

Nicole Spillane
Maîtres de stage : Christophe Chalons, Frédéric Coquel, Samuel Kokh

CEA Saclay

19 octobre 2010

Objectifs

- Comprendre et implémenter les travaux de F. Coquel, Q.L. Nguyen, M. Postel et Q.H. Tran. Entropy satisfying relaxation method with large time-steps for Euler IBVP's. *Math. Comp, 79 :1493-1533*, 2010, sur la semi implicitation d'un schéma Lagrange Projection pour les équations d'Euler dans un cadre subsonique,
- Etendre au cas des schémas diphasiques de type Baer Nunziato : s'efforcer de retrouver les mêmes avantages, en particulier la CFL matière.

Notations

Variables :

$$\begin{array}{rlrl} \rho: & \text{densité}, & u: & \text{vitesse}, \\ E: & \text{énergie totale}, & e = E - \frac{u^2}{2} & \text{énergie interne}, \\ p = p(\rho, e): & \text{pression}, & \pi: & \text{pression relaxée}, \\ c: & \text{vitesse du son}. & & \end{array}$$

Vecteurs d'état (variables conservatives, lagrangiennes, et symétriques) :

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}; \mathbb{V} = \begin{pmatrix} \tau = \frac{1}{\rho} \\ u \\ E \end{pmatrix}; \mathbb{W} = \begin{pmatrix} \pi + au \\ \pi - au \\ \pi + a^2\tau \\ E \end{pmatrix},$$

où

$$a = max_{t,x}(\rho c): \quad \text{coefficient dans la relaxation}.$$

Lagrange projection vu comme un splitting d'opérateur

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) &= 0, \\
\partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) &= 0, \\
\partial_t(\rho E) + \partial_x(u(\rho E + p)) &= 0,
\end{aligned}$$

Lagrange projection vu comme un splitting d'opérateur

$$
\begin{aligned}
\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) &= 0, \\
\partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) &= 0, \\
\partial_t(\rho E) + \partial_x(u(\rho E + p)) &= 0,
\end{aligned}
$$

ou en développant

$$
\begin{aligned}
\partial_t \rho + u\partial_x \rho + \rho \partial_x u &= 0, \\
\partial_t(\rho u) + u\partial_x(\rho u) + \rho u \partial_x u + \partial_x p &= 0, \\
\partial_t(\rho E) + u\partial_x(\rho E) + \rho E \partial_x u + \partial_x(up) &= 0.
\end{aligned}
$$

Lagrange projection vu comme un splitting d'opérateur

$$
\begin{aligned}
\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) &= 0,\\
\partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) &= 0,\\
\partial_t(\rho E) + \partial_x(u(\rho E + p)) &= 0,
\end{aligned}
$$

ou en développant

$$
\begin{aligned}
\partial_t \rho {\color{red}+ u\partial_x \rho} {\color{blue}+ \rho \partial_x u} &= 0,\\
\partial_t(\rho u) {\color{red}+ u\partial_x(\rho u)} {\color{blue}+ \rho u \partial_x u + \partial_x p} &= 0,\\
\partial_t(\rho E) {\color{red}+ u\partial_x(\rho E)} {\color{blue}+ \rho E \partial_x u + \partial_x(up)} &= 0.
\end{aligned}
$$

que l'on "splitte" en

$$
\begin{array}{ccc}
\text{LAGRANGE} & & \text{PROJECTION}\\
\begin{aligned}
\partial_t \rho {\color{blue}+ \rho \partial_x u} &= 0,\\
\partial_t(\rho u) {\color{blue}+ \rho u \partial_x u + \partial_x p} &= 0,\\
\partial_t(\rho E) {\color{blue}+ \rho E \partial_x u + \partial_x(up)} &= 0.
\end{aligned}
& \text{puis} &
\begin{aligned}
\partial_t \rho {\color{red}+ u\partial_x \rho} &= 0,\\
\partial_t(\rho u) {\color{red}+ u\partial_x(\rho u)} &= 0,\\
\partial_t(\rho E) {\color{red}+ u\partial_x(\rho E)} &= 0.
\end{aligned}
\end{array}
$$

Opérations sur la phase lagrangienne (1/2)

Changement de variables $\mathbb{U} \to \mathbb{V}$:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \rho \partial_x u &= 0, \\ \partial_t (\rho u) + \rho u \partial_x u + \partial_x p &= 0, \\ \partial_t (\rho E) + \rho E \partial_x u + \partial_x (up) &= 0. \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \partial_t \tau - \tau \partial_x u &= 0, \\ \partial_t u + \tau \partial_x p &= 0, \\ \partial_t E + \tau \partial_x (pu) &= 0. \end{aligned}$$

avec

$$\tau = \frac{1}{\rho}$$

Opérations sur la phase lagrangienne (2/2)

Approximation : Relaxation à chaque itération

$$\partial_t \tau - \tau \partial_x u = 0, \tag{1a}$$

$$\partial_t u + \tau \partial_x \pi = 0, \tag{1b}$$

$$\partial_t E + \tau \partial_x (\pi u) = 0, \tag{1c}$$

$$\partial_t \pi + a^2 \tau \partial_x u = 0. \tag{1d}$$

où a vérifie $a > \rho c$. Ici

$$a = \max_{x \in \mathbb{R}, t \in [0, +\infty[} \{\rho(x,t) c(x,t)\}.$$

Opérations sur la phase lagrangienne (2/2)

Approximation : Relaxation à chaque itération

$$\partial_t \tau - \tau \partial_x u = 0, \tag{1a}$$
$$\partial_t u + \tau \partial_x \pi = 0, \tag{1b}$$
$$\partial_t E + \tau \partial_x (\pi u) = 0, \tag{1c}$$
$$\partial_t \pi + a^2 \tau \partial_x u = 0. \tag{1d}$$

où a vérifie $a > \rho c$. Ici

$$a = \max_{x \in \mathbb{R}, t \in [0, +\infty[} \{\rho(x,t) c(x,t)\}.$$

Changement de variable $\mathbb{V} \to \mathbb{W}$

$$\begin{aligned}
\partial_t (\pi + au) + a\tau \partial_x (\pi + au) &= 0, && (1d) + a\,(1b)\\
\partial_t (\pi - au) - a\tau \partial_x (\pi - au) &= 0, && (1d) - a\,(1b)\\
\partial_t (\pi + a^2 \tau) &= 0, && (1d) + a^2 (1a)\\
\partial_t E + \tau \partial_x (\pi u) &= 0. && (1c)
\end{aligned}$$

Système à discrétiser

Phase lagrangienne

$$\begin{aligned}
\partial_t(\overrightarrow{W}) + a\tau\partial_x(\overrightarrow{W}) &= 0,\\
\partial_t(\overleftarrow{W}) - a\tau\partial_x(\overleftarrow{W}) &= 0,\\
\partial_t(I) &= 0,\\
\partial_t E + \tau\partial_x(\pi u) &= 0.
\end{aligned}$$

Notations

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{W} &= \pi + au,\\
\overleftarrow{W} &= \pi - au,\\
I &= \pi + a^2\tau.
\end{aligned}$$

Phase de projection

$$\begin{aligned}
\partial_t\rho + u\partial_x\rho &= 0,\\
\partial_t(\rho u) + u\partial_x(\rho u) &= 0,\\
\partial_t(\rho E) + u\partial_x(\rho E) &= 0.
\end{aligned}$$

Notations

$$\Omega = [0, L] \subset \mathbb{R},$$

avec conditions aux limites de Neumann au bord du domaine. On se donne un maillage de Ω régulier à N mailles de taille Δx indexées par j tel que $1 \leq j \leq N$.

$$x_j = \frac{2j-1}{2N} L \text{ et } x_{j+1/2} = \frac{j}{N} L.$$

$$Z_j^n \approx Z(t^n, x_j).$$

$$\Delta m_j = \rho_j \Delta x.$$

$$\begin{array}{rl} Z^n & \\ \downarrow & \text{phase lagrangienne} \\ Z^{n\sharp} & \\ \downarrow & \text{phase projection} \\ Z^{n+1} & \end{array}$$

Résolution discrète (1/2) $\mathbb{W}^n \to \mathbb{U}^{n\sharp}$

Etape lagrangienne

$$\overrightarrow{W}_j^{n\sharp} = \overrightarrow{W}_j^{n} - a_j \frac{\Delta t}{\Delta m_j} [\overrightarrow{W}_j^{n\sharp} - \overrightarrow{W}_{j-1}^{n\sharp}],$$

$$\overleftarrow{W}_j^{n\sharp} = \overleftarrow{W}_j^{n} + a_j \frac{\Delta t}{\Delta m_j} [\overleftarrow{W}_{j+1}^{n\sharp} - \overleftarrow{W}_{j}^{n\sharp}],$$

$$I_j^{n\sharp} = I_j^n,$$

$$\pi^{*}{}_{j+1/2}^{n\sharp} = \frac{\overrightarrow{W}_j^{n\sharp} + \overleftarrow{W}_{j+1}^{n\sharp}}{2},$$

$$u^{*}{}_{j+1/2}^{n\sharp} = \frac{\overrightarrow{W}_j^{n\sharp} - \overleftarrow{W}_{j+1}^{n\sharp}}{2a_{j+1/2}},$$

$$E_j^{n\sharp} = E_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_j} [(\pi^* u^*)_{j+1/2}^{n\sharp} - (\pi^* u^*)_{j-1/2}^{n\sharp}].$$

Résolution discrète (1/2) $\mathbb{W}^n \to \mathbb{U}^{n\sharp}$

Etape lagrangienne

$$
\begin{gathered}
\overrightarrow{W}_j^{n\sharp} = \overrightarrow{W}_j^{n} - a_j \frac{\Delta t}{\Delta m_j}[\overrightarrow{W}_j^{n\sharp} - \overrightarrow{W}_{j-1}^{n\sharp}],\\
\overleftarrow{W}_j^{n\sharp} = \overleftarrow{W}_j^{n} + a_j \frac{\Delta t}{\Delta m_j}[\overleftarrow{W}_{j+1}^{n\sharp} - \overleftarrow{W}_{j}^{n\sharp}],\\
I_j^{n\sharp} = I_j^n,\\
{\pi^*}_{j+1/2}^{n\sharp} = \frac{\overrightarrow{W}_j^{n\sharp} + \overleftarrow{W}_{j+1}^{n\sharp}}{2},\\
{u^*}_{j+1/2}^{n\sharp} = \frac{\overrightarrow{W}_j^{n\sharp} - \overleftarrow{W}_{j+1}^{n\sharp}}{2a_{j+1/2}},\\
E_j^{n\sharp} = E_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_j}[(\pi^* u^*)_{j+1/2}^{n\sharp} - (\pi^* u^*)_{j-1/2}^{n\sharp}].
\end{gathered}
$$

Changement de variable

$$\mathbb{U}_j^{n\sharp} = \mathbb{U}(\mathbb{W}_j^{n\sharp}).$$

Résolution discrète (2/2) $\mathbb{U}^{n\sharp} \to \mathbb{W}^{n+1}$

Etape projection

$$\mathbb{U}_j^{n+1} = \mathbb{U}_j^{n\sharp} + \frac{\Delta t}{\Delta x}\{({u^*}^{n\sharp}_{j-1/2})^+\mathbb{U}_{j-1}^{n\sharp} + \\ + [({u^*}^{n\sharp}_{j+1/2})^- - ({u^*}^{n\sharp}_{j-1/2})^+]\mathbb{U}_j^{n\sharp} - ({u^*}^{n\sharp}_{j+1/2})^-\mathbb{U}_{j+1}^{n\sharp}\}.$$

Notations

$$(X)^+ = X \,\mathrm{si}\, X > 0; 0 \,\mathrm{sinon}.$$
$$(X)^- = X \,\mathrm{si}\, X < 0; 0 \,\mathrm{sinon}.$$

Résolution discrète (2/2) $\mathbb{U}^{n\sharp} \to \mathbb{W}^{n+1}$

Etape projection

$$\mathbb{U}_j^{n+1} = \mathbb{U}_j^{n\sharp} + \frac{\Delta t}{\Delta x}\{({u^*}_{j-1/2}^{n\sharp})^+ \mathbb{U}_{j-1}^{n\sharp} + \\ + [({u^*}_{j+1/2}^{n\sharp})^- - ({u^*}_{j-1/2}^{n\sharp})^+]\mathbb{U}_j^{n\sharp} - ({u^*}_{j+1/2}^{n\sharp})^- \mathbb{U}_{j+1}^{n\sharp}\}.$$

Notations

$$(X)^+ = X \,\mathrm{si}\, X > 0; 0 \,\mathrm{sinon}.$$
$$(X)^- = X \,\mathrm{si}\, X < 0; 0 \,\mathrm{sinon}.$$

Projection pour la relaxation et changement de variables

$$\pi_j^{n+1} = p(\mathbb{U}_j^{n+1}),$$
$$\mathbb{W}_j^{n+1} = \mathbb{W}(\mathbb{U}_j^{n+1}, \pi_j^{n+1}).$$

Existence d'une forme localement conservative

Le schéma peut s'écrire sous forme localement conservative :

$$\frac{\mathbb{U}_j^{n+1} - \mathbb{U}_j^{n}}{\Delta t} + \frac{\mathbb{G}_{j+1/2}^{n\sharp} - \mathbb{G}_{j-1/2}^{n\sharp}}{\Delta x} = 0,$$

où

$$\mathbb{G}_{j+1/2}^{n\sharp} = ({u^*}_{j+1/2}^{n\sharp})^+ \mathbb{U}_j^{n\sharp} + ({u^*}_{j+1/2}^{n\sharp})^- \mathbb{U}_{j+1}^{n\sharp} + \mathbb{B}_{j+1/2}^{n\sharp},$$

et

$$\mathbb{B}_{j+1/2}^{n\sharp} = \begin{pmatrix} 0 \\ {\pi^*}_{j+1/2}^{n\sharp} \\ {\pi^*}_{j+1/2}^{n\sharp} {u^*}_{j+1/2}^{n\sharp} \end{pmatrix}.$$

Condition CFL

Théorème

Sous condition CFL

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{2a}{\max\limits_{1\leq j\leq N}\left\{(\overrightarrow{M}_{j-1}^{n} - \overleftarrow{m}_j^n)^+ - (\overrightarrow{m}_j^n - \overleftarrow{M}_{j+1}^n)^-\right\}},$$

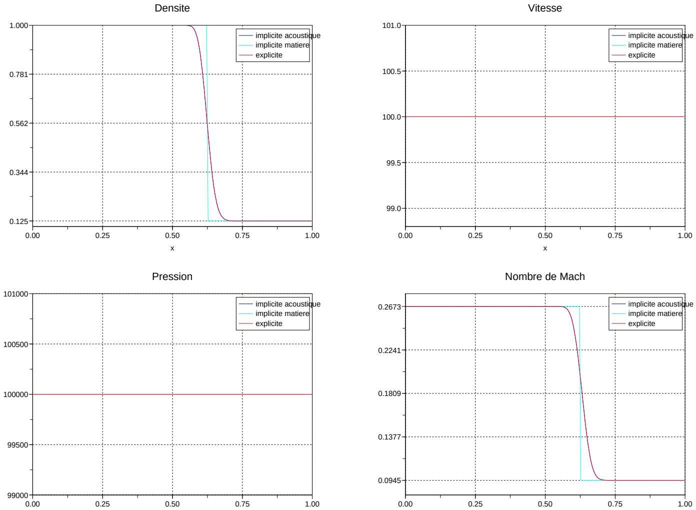
où $\overrightarrow{M}$, $\overleftarrow{m}$, $\overleftarrow{M}$ et $\overrightarrow{m}$ sont définies explicitement au temps n par (2) et ne dépendent pas de Δt, on a

$$\rho_j^{n+1} > 0 \quad \text{et} \quad e_j^{n+1} > 0.$$

$$\begin{array}{rclrcl} \overrightarrow{M}_j^n & = & max_{1\leq k\leq j}\overrightarrow{W}_k^n, & \overrightarrow{m}_j^n & = & min_{1\leq k\leq j}\overrightarrow{W}_k^n, \\ \overleftarrow{M}_j^n & = & max_{1\leq k\leq j}\overleftarrow{W}_k^n, & \overleftarrow{m}_j^n & = & min_{1\leq k\leq j}\overleftarrow{W}_k^n. \end{array} \quad (2)$$

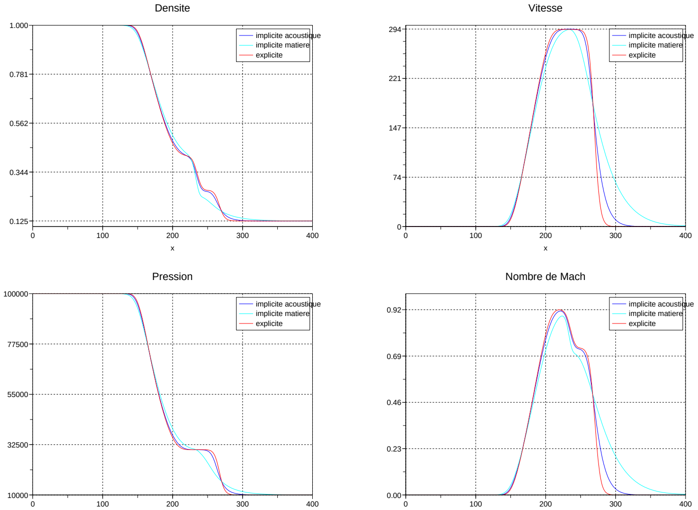
Discontinuité de contact

1: Schema implicite, CFL acoustique avec coef: 1, temps = 0.00125s, n = 774 iterations, dernier pas de temps dt = 0.0000016s, duree du calcul: 59.229s.
2: Schema implicite, CFL matiere avec coef: 1, temps = 0.00125s, n = 26 iterations, dernier pas de temps dt = 0.00005s, duree du calcul: 4.333s.
3: Schema explicite, CFL acoustique avec coef: 1, temps = 0.00125s, n = 774 iterations, dernier pas de temps dt = 0.0000016s, duree du calcul: 31.738s.
Etat initial: (alpha1L, rho1L, u1L, p1L) = (0.5, 1, 100, 100000), (alpha1R, rho1R, u1R, p1R) = (0.5, 0.125, 100, 100000), gamma1 =1.4,



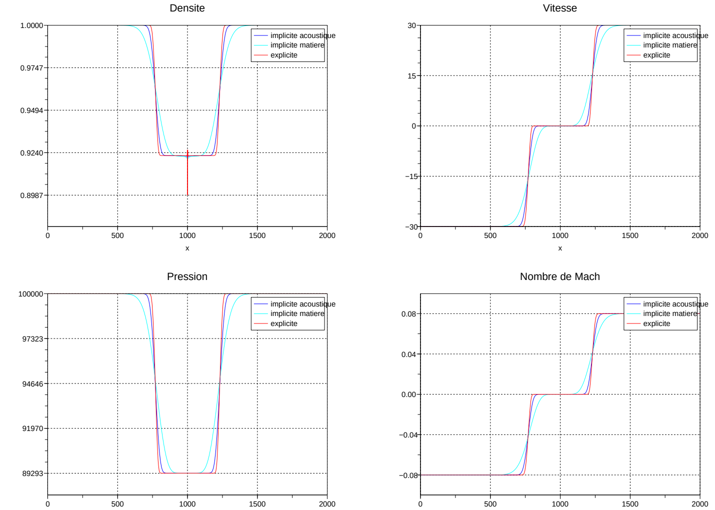
Tube à choc de Sod

1: Schema implicite, CFL acoustique avec coef: 1, temps = 0.0003s, n = 360 iterations, dernier pas de temps dt = 0.0000008s, duree du calcul: 58.019s.
2: Schema implicite, CFL matiere avec coef: 1, temps = 0.0003s, n = 72 iterations, dernier pas de temps dt = 0.0000042s, duree du calcul: 15.624s.
3: Schema explicite, CFL acoustique avec coef: 1, temps = 0.0003s, n = 360 iterations, dernier pas de temps dt = 0.0000008s, duree du calcul: 33.959s.
Etat initial: (alpha1L, rho1L, u1L, p1L) = (0.5, 1, 0, 100000), (alpha1R, rho1R, u1R, p1R) = (0.5, 0.125, 0, 10000), gamma1 =1.4,



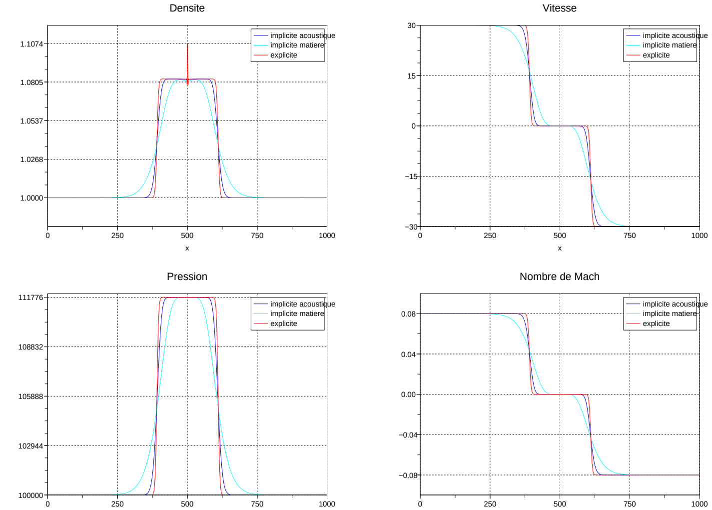
Double raréfaction

1: Schema implicite, CFL acoustique avec coef: 1, temps = 0.0003s, n = 244 iterations, dernier pas de temps dt = 0.0000012s, duree du calcul: 193.098s.
2: Schema implicite, CFL matiere avec coef: 1, temps = 0.0003s, n = 19 iterations, dernier pas de temps dt = 0.0000167s, duree du calcul: 59.451s.
3: Schema explicite, CFL acoustique avec coef: 1, temps = 0.0003s, n = 250 iterations, dernier pas de temps dt = 0.0000012s, duree du calcul: 82.129s.
Etat initial: (alpha1L, rho1L, u1L, p1L) = (0.5, 1, −30, 100000), (alpha1R, rho1R, u1R, p1R) = (0.5, 1, 30, 100000), gamma1 =1.4,



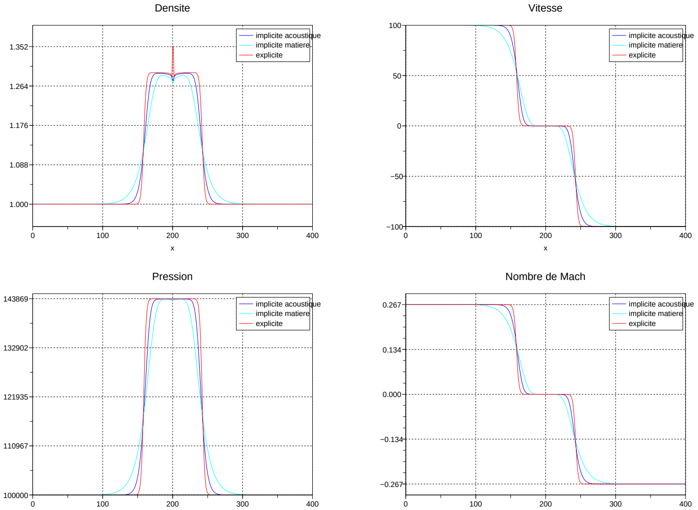
Double choc 1

1: Schema implicite, CFL acoustique avec coef: 1, temps = 0.0003s, n = 133 iterations, dernier pas de temps dt = 0.0000023s, duree du calcul: 47.915s.
2: Schema implicite, CFL matiere avec coef: 1, temps = 0.0003s, n = 10 iterations, dernier pas de temps dt = 0.0000333s, duree du calcul: 10.145s.
3: Schema explicite, CFL acoustique avec coef: 1, temps = 0.0003s, n = 134 iterations, dernier pas de temps dt = 0.0000022s, duree du calcul: 20.491s.
Etat initial: (alpha1L, rho1L, u1L, p1L) = (0.5, 1, 30, 100000), (alpha1R, rho1R, u1R, p1R) = (0.5, 1, −30, 100000), gamma1 =1.4,



Double choc 2

1: Schema implicite, CFL acoustique avec coef: 1, temps = 0.0003s, n = 73 iterations, dernier pas de temps dt = 0.0000041s, duree du calcul: 12.723s.
2: Schema implicite, CFL matiere avec coef: 1, temps = 0.0003s, n = 13 iterations, dernier pas de temps dt = 0.000025s, duree du calcul: 4.367s.
3: Schema explicite, CFL acoustique avec coef: 1, temps = 0.0003s, n = 75 iterations, dernier pas de temps dt = 0.0000040s, duree du calcul: 7.97s.
Etat initial: (alpha1L, rho1L, u1L, p1L) = (0.5, 1, 100, 100000), (alpha1R, rho1R, u1R, p1R) = (0.5, 1, −100, 100000), gamma1 =1.4,



Système d'équations

$$
\begin{aligned}
\partial_t \alpha_1 + u_I \partial_x \alpha_1 &= 0,\\
\partial_t(\alpha_1\rho_1) + \partial_x(\alpha_1\rho_1 u_1) &= 0,\\
\partial_t(\alpha_1\rho_1 u_1) + \partial_x(\alpha_1\rho_1 {u_1}^2 + \alpha_1 p_1) - p_I \partial_x \alpha_1 &= 0,\\
\partial_t(\alpha_1\rho_1 E_1) + \partial_x[(\alpha_1\rho_1 E_1 + \alpha_1 p_1)u_1] - p_I u_I \partial_x \alpha_1 &= 0,\\
\partial_t(\alpha_2\rho_2) + \partial_x(\alpha_2\rho_2 u_2) &= 0,\\
\partial_t(\alpha_2\rho_2 u_2) + \partial_x(\alpha_2\rho_2 {u_2}^2 + \alpha_2 p_2) - p_I \partial_x \alpha_2 &= 0,\\
\partial_t(\alpha_2\rho_2 E_2) + \partial_x[(\alpha_2\rho_2 E_2 + \alpha_2 p_2)u_2] - p_I u_I \partial_x \alpha_2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Dans ce système α_k pour $k = 1, 2$ est la fraction de volume de la phase k. On a de plus des relations de fermeture :

- $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$;
- loi d'état dans chaque phase ;
- expression de la vitesse interfaciale u_I ;
- expression de la pression interfaciale p_I.

Pression et vitesses interfaciales (thèse N. Seguin)

Définitions

$$u_I = \beta u_1 + (1-\beta)u_2, \text{ et } p_I = \mu p_1 + (1-\mu)p_2,$$

où

$$\beta = \frac{\chi \alpha_1 \rho_1}{\chi \alpha_1 \rho_1 + (1-\chi)\alpha_2 \rho_2},$$

et

$$\mu = \frac{(1-\beta)T_2}{\beta T_1 + (1-\beta)T_2}, \chi \in [0,1],$$

pour assurer l'existence d'une entropie (condition sur p_I) et pour que le champ associé à l'onde u_I soit linéairement dégénéré (condition sur u_I).

Typiquement,

$$\chi = 1 \text{ d'où } \beta = 1,\ \mu = 0,\ u_I = u_1 \ \text{ et } \ p_I = p_2.$$

Difficultés de résolution et Objectifs

Difficultés supplémentaires pour Baer Nunziato par rapport à Euler

- problème de Riemann compliqué (ondes même pas ordonnées),

Difficultés de résolution et Objectifs

Difficultés supplémentaires pour Baer Nunziato par rapport à Euler

- problème de Riemann compliqué (ondes même pas ordonnées),
- impossible de découpler directement les deux phases à cause des termes en p_I et u_I,

Difficultés de résolution et Objectifs

Difficultés supplémentaires pour Baer Nunziato par rapport à Euler

- problème de Riemann compliqué (ondes même pas ordonnées),
- impossible de découpler directement les deux phases à cause des termes en p_I et u_I,
- présence de termes non conservatifs,

Difficultés de résolution et Objectifs

Difficultés supplémentaires pour Baer Nunziato par rapport à Euler

- problème de Riemann compliqué (ondes même pas ordonnées),
- impossible de découpler directement les deux phases à cause des termes en p_I et u_I,
- présence de termes non conservatifs,
- pas de choix évident pour avoir une vitesse de projection.

Difficultés de résolution et Objectifs

Difficultés supplémentaires pour Baer Nunziato par rapport à Euler

- problème de Riemann compliqué (ondes même pas ordonnées),
- impossible de découpler directement les deux phases à cause des termes en p_I et u_I,
- présence de termes non conservatifs,
- pas de choix évident pour avoir une vitesse de projection.

Caractéristiques souhaitées pour le schéma numérique

- deux phases découplées et semblables à Euler,

Difficultés de résolution et Objectifs

Difficultés supplémentaires pour Baer Nunziato par rapport à Euler

- problème de Riemann compliqué (ondes même pas ordonnées),
- impossible de découpler directement les deux phases à cause des termes en p_I et u_I,
- présence de termes non conservatifs,
- pas de choix évident pour avoir une vitesse de projection.

Caractéristiques souhaitées pour le schéma numérique

- deux phases découplées et semblables à Euler,
- semi-implicite (grands pas de temps possibles) en assurant une certaine stabilité,

Difficultés de résolution et Objectifs

Difficultés supplémentaires pour Baer Nunziato par rapport à Euler

- problème de Riemann compliqué (ondes même pas ordonnées),
- impossible de découpler directement les deux phases à cause des termes en p_I et u_I,
- présence de termes non conservatifs,
- pas de choix évident pour avoir une vitesse de projection.

Caractéristiques souhaitées pour le schéma numérique

- deux phases découplées et semblables à Euler,
- semi-implicite (grands pas de temps possibles) en assurant une certaine stabilité,
- structure conservative des équations conservée pour les variables $\alpha_1\rho_1$, $\alpha_2\rho_2$, $\alpha_1\rho_1 u_1 + \alpha_2\rho_2 u_2$ et $\alpha_1\rho_1 E_1 + \alpha_2\rho_2 E_2$.

$$\partial_t \alpha_1 = 0,$$

$$\partial_t(\alpha_k \rho_k) + \alpha_k \rho_k \partial_x u_k + u_k \partial_x(\alpha_k \rho_k) = 0,$$

$$\begin{aligned}\partial_t(\alpha_k \rho_k u_k) + \alpha_k \rho_k u_k \partial_x u_k + u_k \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k) + \\ + \alpha_k \partial_x p_k + p_k \partial_x(\alpha_k) - p_I \partial_x(\alpha_k) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_t(\alpha_k \rho_k E_k) + \alpha_k \rho_k E_k \partial_x u_k + u_k \partial_x(\alpha_k \rho_k E_k) + \\ + \alpha_k \partial_x(p_k u_k) + p_k u_k \partial_x(\alpha_k) - p_I u_I \partial_x(\alpha_k) = 0.\end{aligned}$$

$$\partial_t \alpha_1 = 0,$$

$$\partial_t(\alpha_k\rho_k) + \alpha_k\rho_k\partial_x u_k + u_k\partial_x(\alpha_k\rho_k) = 0,$$

$$\begin{aligned}\partial_t(\alpha_k\rho_k u_k) + \alpha_k\rho_k u_k\partial_x u_k + u_k\partial_x(\alpha_k\rho_k u_k) + \\ + \alpha_k\partial_x p_k + p_k\partial_x(\alpha_k) - p_I\partial_x(\alpha_k) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_t(\alpha_k\rho_k E_k) + \alpha_k\rho_k E_k\partial_x u_k + u_k\partial_x(\alpha_k\rho_k E_k) + \\ + \alpha_k\partial_x(p_k u_k) + p_k u_k\partial_x(\alpha_k) - p_I u_I\partial_x(\alpha_k) = 0.\end{aligned}$$

Étape de projection

$$\partial_t \alpha_1 = 0,$$

$$\partial_t(\alpha_k \rho_k) + \alpha_k \rho_k \partial_x u_k + u_k \partial_x(\alpha_k \rho_k) = 0,$$

$$\partial_t(\alpha_k \rho_k u_k) + \alpha_k \rho_k u_k \partial_x u_k + u_k \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k) + \\ + \alpha_k \partial_x p_k + p_k \partial_x(\alpha_k) - p_I \partial_x(\alpha_k) = 0,$$

$$\partial_t(\alpha_k \rho_k E_k) + \alpha_k \rho_k E_k \partial_x u_k + u_k \partial_x(\alpha_k \rho_k E_k) + \\ + \alpha_k \partial_x(p_k u_k) + p_k u_k \partial_x(\alpha_k) - p_I u_I \partial_x(\alpha_k) = 0.$$

Étape de projection
Étape lagrangienne

$$\partial_t \alpha_1 = 0,$$

$$\partial_t(\alpha_k \rho_k) + \alpha_k \rho_k \partial_x u_k + u_k \partial_x(\alpha_k \rho_k) = 0,$$

$$\partial_t(\alpha_k \rho_k u_k) + \alpha_k \rho_k u_k \partial_x u_k + u_k \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k) + \\ + \alpha_k \partial_x p_k + p_k \partial_x(\alpha_k) - p_I \partial_x(\alpha_k) = 0,$$

$$\partial_t(\alpha_k \rho_k E_k) + \alpha_k \rho_k E_k \partial_x u_k + u_k \partial_x(\alpha_k \rho_k E_k) + \\ + \alpha_k \partial_x(p_k u_k) + p_k u_k \partial_x(\alpha_k) - p_I u_I \partial_x(\alpha_k) = 0.$$

Étape de projection
Étape lagrangienne
Étape terme source

Splitting (1/2)

1) LAGRANGE

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha_1 &= 0, \\ \partial_t(\alpha_k \rho_k) + \alpha_k \rho_k \partial_x u_k &= 0, \\ \partial_t(\alpha_k \rho_k u_k) + \alpha_k \rho_k u_k \partial_x u_k + \alpha_k \partial_x p_k &= 0, \\ \partial_t(\alpha_k \rho_k E_k) + \alpha_k \rho_k E_k \partial_x u_k + \alpha_k \partial_x (p_k u_k) &= 0. \end{aligned}$$

2) PROJECTION

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha_1 &= 0, \\ \partial_t(\alpha_k \rho_k) + u_k \partial_x(\alpha_k \rho_k) &= 0, \\ \partial_t(\alpha_k \rho_k u_k) + u_k \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k) &= 0, \\ \partial_t(\alpha_k \rho_k E_k) + u_k \partial_x(\alpha_k \rho_k E_k) &= 0. \end{aligned}$$

Splitting (2/2)

3) TERME SOURCE

$$
\begin{aligned}
\partial_t \alpha_1 &= 0, \\
\partial_t(\alpha_k \rho_k) &= 0, \\
\partial_t(\alpha_k \rho_k u_k) + (p_k - p_I)\partial_x(\alpha_k) &= 0, \\
\partial_t(\alpha_k \rho_k E_k) + (p_k u_k - p_I u_I)\partial_x(\alpha_k) &= 0.
\end{aligned}
$$

4) MISE À JOUR DE LA FRACTION DE VOLUME

$$
\begin{aligned}
\partial_t \alpha_1 + u_I \partial_x \alpha_1 &= 0, \\
\partial_t(\alpha_k \rho_k) &= 0, \\
\partial_t(\alpha_k \rho_k u_k) &= 0, \\
\partial_t(\alpha_k \rho_k E_k) &= 0.
\end{aligned}
$$

Réécriture de la phase lagrangienne

Simplification par α_k :

$$
\begin{aligned}
\partial_t \alpha_1 &= 0, \\
\partial_t(\rho_k) + \rho_k \partial_x u_k &= 0, \\
\partial_t(\rho_k u_k) + \rho_k u_k \partial_x u_k + \partial_x p_k &= 0, \\
\partial_t(\rho_k E_k) + \rho_k E_k \partial_x u_k + \partial_x (p_k u_k) &= 0.
\end{aligned}
$$

Réécriture de la phase lagrangienne

Simplification par α_k :

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha_1 &= 0, \\ \partial_t(\rho_k) + \rho_k \partial_x u_k &= 0, \\ \partial_t(\rho_k u_k) + \rho_k u_k \partial_x u_k + \partial_x p_k &= 0, \\ \partial_t(\rho_k E_k) + \rho_k E_k \partial_x u_k + \partial_x(p_k u_k) &= 0. \end{aligned}$$

Premier changement de variables :

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha_1 &= 0, \\ \partial_t \tau_k - \tau_k \partial_x u_k &= 0, \\ \partial_t u_k + \tau_k \partial_x p_k &= 0, \\ \partial_t E_k + \tau_k \partial_x(p_k u_k) &= 0. \end{aligned}$$

Réécriture de la phase lagrangienne

Simplification par α_k :

$$\begin{aligned}
\partial_t \alpha_1 &= 0, \\
\partial_t(\rho_k) + \rho_k \partial_x u_k &= 0, \\
\partial_t(\rho_k u_k) + \rho_k u_k \partial_x u_k + \partial_x p_k &= 0, \\
\partial_t(\rho_k E_k) + \rho_k E_k \partial_x u_k + \partial_x(p_k u_k) &= 0.
\end{aligned}$$

Premier changement de variables :

$$\begin{aligned}
\partial_t \alpha_1 &= 0, \\
\partial_t \tau_k - \tau_k \partial_x u_k &= 0, \\
\partial_t u_k + \tau_k \partial_x p_k &= 0, \\
\partial_t E_k + \tau_k \partial_x(p_k u_k) &= 0.
\end{aligned}$$

Relaxation puis deuxième changement de variables :

$$\begin{aligned}
\partial_t \alpha_1 &= 0, \\
\partial_t(\overrightarrow{W}_k) + a_k \tau_k \partial_x(\overrightarrow{W}_k) &= 0, \\
\partial_t(\overleftarrow{W}_k) - a_k \tau_k \partial_x(\overleftarrow{W}_k) &= 0, \\
\partial_t(I_k) &= 0, \\
\partial_t E_k + \tau_k \partial_x(\pi_k u_k) &= 0.
\end{aligned}$$

Notations :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{W}_k &= \pi_k + a_k u_k, \\
\overleftarrow{W}_k &= \pi_k - a_k u_k, \\
I_k &= \pi_k + {a_k}^2 \tau_k.
\end{aligned}$$

Notations

$$\begin{pmatrix} {\alpha_k}^n \\ (\alpha\mathbb{U})_k{}^n \\ \mathbb{U}_k{}^n \end{pmatrix} \xrightarrow[\textit{Lagrange}]{} \begin{pmatrix} {\alpha_k}^n \\ (\alpha\mathbb{U})_k{}^{n\sharp} \\ \mathbb{U}_k{}^{n\sharp} \end{pmatrix} \xrightarrow[\textit{Projection}]{} \begin{pmatrix} {\alpha_k}^n \\ (\alpha\mathbb{U})_k{}^{n\flat} \\ \mathbb{U}_k{}^{n\flat} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} {\alpha_k}^n \\ (\alpha\mathbb{U})_k{}^{n\flat} \\ \mathbb{U}_k{}^{n\flat} \end{pmatrix} \xrightarrow[\textit{Source}]{} \begin{pmatrix} {\alpha_k}^n \\ (\alpha\mathbb{U})_k{}^{n+1} \\ \mathbb{U}_k{}^{n\natural} \end{pmatrix} \xrightarrow[\textit{Maj}\ \alpha_k]{} \begin{pmatrix} {\alpha_k}^{n+1} \\ (\alpha\mathbb{U})_k{}^{n+1} \\ \mathbb{U}_k{}^{n+1} \end{pmatrix}$$

On se limite au cas de conditions aux limites de type Neumann.

Résolution discrète (1/4)

Étape lagrangienne

$$\overrightarrow{W}_{kj}^{n\sharp} = \overrightarrow{W}_{kj}^{n} - a_k \frac{\Delta t}{\Delta m k_j}[\overrightarrow{W}_{kj}^{n\sharp} - \overrightarrow{W}_{kj-1}^{n\sharp}],$$

$$\overleftarrow{W}_{kj}^{n\sharp} = \overleftarrow{W}_{kj}^{n} + a_k \frac{\Delta t}{\Delta m k_j}[\overleftarrow{W}_{kj+1}^{n\sharp} - \overleftarrow{W}_{kj}^{n\sharp}],$$

$$I_{kj}^{n\sharp} = I_{kj}^{n},$$

$$\pi^{*\,n\sharp}_{kj+1/2} = \frac{\overrightarrow{W}_{kj}^{n\sharp} + \overleftarrow{W}_{kj+1}^{n\sharp}}{2},$$

$$u^{*\,n\sharp}_{kj+1/2} = \frac{\overrightarrow{W}_{kj}^{n\sharp} - \overleftarrow{W}_{kj+1}^{n\sharp}}{2a},$$

$$E_{kj}^{n\sharp} = E_{kj}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta m k_j}[(\pi_k^* u_k^*)_{j+1/2}^{n\sharp} - (\pi_k^* u_k^*)_{j-1/2}^{n\sharp}].$$

Changement de variables $(\alpha\mathbb{U})_{kj}^{n\sharp} = (\alpha\mathbb{U})_k(\alpha_{kj}^{n}, \mathbb{W}_{kj}^{n\sharp})$.

Résolution discrète (2/4)

Étape de projection

$$(\alpha\mathbb{U})_{k\,j}^{n\flat} = (\alpha\mathbb{U})_{k\,j}^{n\sharp} + \frac{\Delta t}{\Delta x}\{(u^{*\,n\sharp}_{k\,j-1/2})^{+}(\alpha\mathbb{U})_{k\,j-1}^{n\sharp}$$
$$-(u^{*\,n\sharp}_{k\,j+1/2})^{-}(\alpha\mathbb{U})_{k\,j+1}^{n\sharp} + [(u^{*\,n\sharp}_{k\,j+1/2})^{-} - (u^{*\,n\sharp}_{k\,j-1/2})^{+}](\alpha\mathbb{U})_{k\,j}^{n\sharp}\}.$$

Résolution discrète (3/4)

Étape terme source

$$\overline{p_k}_j^{n\sharp} = \pi^*_{k\,j-1/2},$$

$$\overline{(pu)_k}_j^{n\sharp} = \pi^*_{k\,j-1/2} u^*_{k\,j-1/2},$$

$$\overline{p_I} = \beta \overline{p_1} + (1-\beta)\overline{p_2}, \overline{u_I} = \nu \overline{u_1} + (1-\nu)\overline{u_2}, \overline{p_I\,u_I} = \overline{p_I}\,\overline{u_I},$$

$$\alpha_k{}^n_{j+1/2} = \alpha_k{}^n_j,$$

$$(\alpha u)_k{}^{n+1}_j = (\alpha u)_k{}^{n\flat}_j - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\overline{p_k}_j^{n\sharp} - \overline{p_I}_j^{n\sharp})(\alpha_k{}^n_{j+1/2} - \alpha_k{}^n_{j-1/2}),$$

$$(\alpha E)_k{}^{n+1}_j = (\alpha E)_k{}^{n\flat}_j - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\overline{(pu)_k}_j^{n\sharp} - \overline{(pu)_I}_j^{n\sharp})(\alpha_k{}^n_{j+1/2} - \alpha_k{}^n_{j-1/2}\cdot$$

Mise à jour de la fraction volumique

$$u^{*\,n\sharp}_{I\,j+1/2} = \beta u^{*\,n\sharp}_{1\,j+1/2} + (1-\beta) u^{*\,n\sharp}_{2\,j+1/2},$$

$$\begin{aligned}\alpha_{1\,j}^{\,n+1} = \alpha_{1\,j}^{\,n} + \frac{\Delta t}{\Delta x}\{(u^{*\,n\sharp}_{I\,j-1/2})^{+}\alpha_{1\,j-1}^{\,n} - (u^{*\,n\sharp}_{I\,j+1/2})^{-}\alpha_{1\,j+1}^{\,n} \\ +[(u^{*\,n\sharp}_{I\,j+1/2})^{-} - (u^{*\,n\sharp}_{I\,j-1/2})^{+}]\alpha_{1\,j}^{\,n}\}\end{aligned}$$

$$\alpha_2^{\,n+1} = 1 - \alpha_1^{\,n+1}.$$

Résolution discrète (4/4)

Mise à jour de la fraction volumique

$$u^{*\,n\sharp}_{I\,j+1/2} = \beta u^{*\,n\sharp}_{1\,j+1/2} + (1-\beta) u^{*\,n\sharp}_{2\,j+1/2},$$

$$\begin{aligned}{\alpha_1}_j^{n+1} = {\alpha_1}_j^{n} + \frac{\Delta t}{\Delta x}\{ & (u^{*\,n\sharp}_{I\,j-1/2})^{+} {\alpha_1}_{j-1}^{n} - (u^{*\,n\sharp}_{I\,j+1/2})^{-} {\alpha_1}_{j+1}^{n} \\ & + [(u^{*\,n\sharp}_{I\,j+1/2})^{-} - (u^{*\,n\sharp}_{I\,j-1/2})^{+}] {\alpha_1}_j^{n} \}\end{aligned}$$

$${\alpha_2}^{n+1} = 1 - {\alpha_1}^{n+1}.$$

Relaxation : ${\pi_k}_j^{n+1} = p((\alpha\mathbb{U})_{k\,j}^{n+1}, {\alpha_k}_j^{n+1})$.
Changement de variables :
${\mathbb{W}_k}_j^{n+1} = \mathbb{W}_k((\alpha\mathbb{U})_{k\,j}^{n+1}, {\alpha_k}_j^{n+1}, {\pi_k}_j^{n+1})$.

Justification de la méthode de discrétisation des termes non conservatifs (1/7)

Objectif :
conserver la structure conservative des équations pour les variables $\alpha_1\rho_1$, $\alpha_2\rho_2$, $\alpha_1\rho_1 u_1 + \alpha_2\rho_2 u_2$ et $\alpha_1\rho_1 E_1 + \alpha_2\rho_2 E_2$.
Rappel : Équations de Baer Nunziato

$$\begin{aligned}
\partial_t\alpha_1 + u_I\partial_x\alpha_1 &= 0,\\
\partial_t(\alpha_1\rho_1) + \partial_x(\alpha_1\rho_1 u_1) &= 0,\\
\partial_t(\alpha_1\rho_1 u_1) + \partial_x(\alpha_1\rho_1 {u_1}^2 + \alpha_1 p_1) - p_I\partial_x\alpha_1 &= 0,\\
\partial_t(\alpha_1\rho_1 E_1) + \partial_x[(\alpha_1\rho_1 E_1 + \alpha_1 p_1)u_1] - p_I u_I\partial_x\alpha_1 &= 0,\\
\partial_t(\alpha_2\rho_2) + \partial_x(\alpha_2\rho_2 u_2) &= 0,\\
\partial_t(\alpha_2\rho_2 u_2) + \partial_x(\alpha_2\rho_2 {u_2}^2 + \alpha_2 p_2) - p_I\partial_x\alpha_2 &= 0,\\
\partial_t(\alpha_2\rho_2 E_2) + \partial_x[(\alpha_2\rho_2 E_2 + \alpha_2 p_2)u_2] - p_I u_I\partial_x\alpha_2 &= 0.
\end{aligned}$$

avec $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$.

Justification de la méthode de discrétisation des termes non conservatifs (2/7)

Problème Le schéma numérique pour les phases lagrange suivi de projection ne s'écrit pas sous forme conservative locale. À la place, on a l'écriture :

$$\frac{\mathbb{U}_{k\,j}^{n+1} - \mathbb{U}_{k\,j}^{n}}{\Delta t} + \frac{\mathbb{G}_{k\,j+1/2}^{n\sharp} - \mathbb{G}_{k\,j-1/2}^{n\sharp}}{\Delta x} + \frac{\mathbb{N}_{k\,j}^{n\sharp}}{\Delta x} = 0,$$

où

$$\mathbb{G}_{k\,j+1/2}^{n\sharp} = (u_{k\,j+1/2}^{*\,n\sharp})^{+}\mathbb{U}_{k\,j}^{n\sharp} + (u_{k\,j+1/2}^{*\,n\sharp})^{-}\mathbb{U}_{k\,j+1}^{n\sharp},$$

et

$$\mathbb{N}_{k\,j}^{n\sharp} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_{k\,j}^{n}(\pi_{k\,j+1/2}^{*\,n} - \pi_{k\,j-1/2}^{*\,n}) \\ \alpha_{k\,j}^{n}(\pi_{k\,j+1/2}^{*\,n} u_{k\,j+1/2}^{*\,n} - \pi_{k\,j-1/2}^{*\,n} u_{k\,j-1/2}^{*\,n}) \end{pmatrix}.$$

Justification de la méthode de discrétisation des termes non conservatifs (3/7)

Stratégie

Discrétiser l'étape terme source de manière à assurer les bonnes propriétés de conservativité. C'est-à-dire, choisir judicieusement $\overline{p_k}$, $\overline{(pu)_k}$, $\overline{p_I}$, $\overline{(pu)_I}$ et $\alpha_{k\,j+1/2}$.

Rappel : étape de discrétisation des termes sources

$$(\alpha u)_{k\,j}^{n+1} = (\alpha u)_{k\,j}^{n\flat} - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\overline{p_k}_j^{n\sharp} - \overline{p_I}_j^{n\sharp})(\alpha_{k\,j+1/2}^{n} - \alpha_{k\,j-1/2}^{n}),$$

$$(\alpha E)_{k\,j}^{n+1} = (\alpha E)_{k\,j}^{n\flat} - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\overline{(pu)_k}_j^{n\sharp} - \overline{(pu)_I}_j^{n\sharp})(\alpha_{k\,j+1/2}^{n} - \alpha_{k\,j-1/2}^{n}).$$

Justification de la méthode de discrétisation des termes non conservatifs (4/7)

Le schéma global pour les variables conservatives s'écrit :

$$\Delta x \frac{(\alpha\mathbb{U})_{k}{}_{j}^{n+1} - (\alpha\mathbb{U})_{k}{}_{j}^{n\sharp}}{\Delta t} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_{k}{}_{j}^{n}(\pi^{*}{}_{k}{}_{j+1/2}^{n\sharp} - \pi^{*}{}_{k}{}_{j-1/2}^{n\sharp}) \\ \alpha_{k}{}_{j}^{n}(\pi^{*}{}_{k}{}_{j+1/2}^{n\sharp} u^{*}{}_{k}{}_{j+1/2}^{n\sharp} - \pi^{*}{}_{k}{}_{j-1/2}^{n\sharp} u^{*}{}_{k}{}_{j-1/2}^{n\sharp}) \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ (\overline{p_k} - \overline{p_l})(\alpha_{k}{}_{j+1/2}^{n} - \alpha_{k}{}_{j-1/2}^{n}) \\ (\overline{p_k u_k} - \overline{p_l u_l})(\alpha_{k}{}_{j+1/2}^{n} - \alpha_{k}{}_{j-1/2}^{n}). \end{pmatrix} - (\mathbb{G}_{k}{}_{j+1/2}^{n\sharp} - \mathbb{G}_{k}{}_{j-1/2}^{n\sharp})$$

L'objectif est d'obtenir :

$$\alpha_{k}{}_{j}^{n}(\pi^{*}{}_{k}{}_{j+1/2}^{n\sharp} - \pi^{*}{}_{k}{}_{j-1/2}^{n\sharp}) + \overline{p_k}(\alpha_{k}{}_{j+1/2}^{n} - \alpha_{k}{}_{j-1/2}^{n}) = (\alpha\pi)_{k}{}_{j+1/2}^{n\sharp} - (\alpha\pi)_{k}{}_{j-1/2}^{n\sharp},$$

$$\alpha_{k}{}_{j}^{n}(\pi^{*}{}_{k}{}_{j+1/2}^{n\sharp} u^{*}{}_{k}{}_{j+1/2}^{n\sharp} - \pi^{*}{}_{k}{}_{j-1/2}^{n\sharp} u^{*}{}_{k}{}_{j-1/2}^{n\sharp}) + \overline{p_k u_k}(\alpha_{k}{}_{j+1/2}^{n} - \alpha_{k}{}_{j-1/2}^{n}) = (\alpha\pi u)_{k}{}_{j+1/2}^{n\sharp} - (\alpha\pi u)_{k}{}_{j-1/2}^{n\sharp}.$$

Justification de la méthode de discrétisation des termes non conservatifs (5/7)

Théorème La formule de Leibniz permet de calculer la variation $\Delta(fg)$ du produit de deux fonctions f et g entre deux "instants" R et L :

$$\Delta(fg) = (fg)_R - (fg)_L = \overrightarrow{f}\,\Delta g + \overleftarrow{g}\,\Delta f,$$

où

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f} &= \kappa_{RL} f_L + (1-\kappa_{RL}) f_R,\\ \overleftarrow{g} &= (1-\kappa_{RL}) g_L + \kappa_{RL} g_R,\end{aligned}$$

ceci étant vrai pour tout $\kappa_{RL} \in [0,1]$.

Justification de la méthode de discrétisation des termes non conservatifs (6/7)

Cette formule permet d'obtenir les bonnes propriétés de conservativité dès que les relations suivantes entre $\overline{p_k}$, $\overline{p_k\, u_k}$ et $\alpha_{k\,j+1/2}$ sont satisfaites pour un certain $\kappa_j \in [0,1]$:

$$\alpha_{k\,j}^{\,n} = \kappa_j \alpha_{k\,j+1/2}^{\,n} + (1-\kappa_j)\alpha_{k\,j-1/2}^{\,n},$$

$$\overline{p_k}_j = (1-\kappa_j)\pi^{*\,n\sharp}_{k\,j+1/2} + \kappa_j \pi^{*\,n\sharp}_{k\,j-1/2},$$

$$\overline{p_k\, u_k}_j = (1-\kappa_j)\pi^{*\,n\sharp}_{k\,j+1/2} u^{*\,n\sharp}_{k\,j+1/2} + \kappa_j \pi^{*\,n\sharp}_{k\,j-1/2} u^{*\,n\sharp}_{k\,j-1/2}.$$

Par exemple, avec $\kappa_j = 1$:

$$\alpha_{k\,j+1/2}^{\,n} = \alpha_{k\,j}^{\,n},$$

$$\overline{p_k}_j = \pi^{*\,n\sharp}_{k\,j-1/2},$$

$$\overline{p_k\, u_k}_j = \pi^{*\,n\sharp}_{k\,j-1/2} u^{*\,n\sharp}_{k\,j-1/2}.$$

Justification de la méthode de discrétisation des termes non conservatifs (7/7)

Étape terme source :

$$\overline{p_k}_j^{n\sharp} = \pi^*_{k\,j-1/2},$$

$$\overline{(pu)_k}_j^{n\sharp} = \pi^*_{k\,j-1/2} u^*_{k\,j-1/2},$$

$$\overline{p_I} = \beta \overline{p_1} + (1-\beta)\overline{p_2}, \overline{u_I} = \nu \overline{u_1} + (1-\nu)\overline{u_2}, \overline{p_I u_I} = \overline{p_I}\,\overline{u_I},$$

$$\alpha_{k\,j+1/2}^{\,n} = \alpha_{k\,j}^{\,n},$$

$$(\alpha u)_{k\,j}^{\,n+1} = (\alpha u)_{k\,j}^{\,n\flat} - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\overline{p_k}_j^{n\sharp} - \overline{p_I}_j^{n\sharp})(\alpha_{k\,j+1/2}^{\,n} - \alpha_{k\,j-1/2}^{\,n}),$$

$$(\alpha E)_{k\,j}^{\,n+1} = (\alpha E)_{k\,j}^{\,n\flat} - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\overline{(pu)_k}_j^{n\sharp} - \overline{(pu)_I}_j^{n\sharp})(\alpha_{k\,j+1/2}^{\,n} - \alpha_{k\,j-1/2}^{\,n}$$

Propriétés de l'algorithme

Théorème Supposons que l'on a $0 < {\alpha_1}_j^n < 1$, alors, sous condition CFL

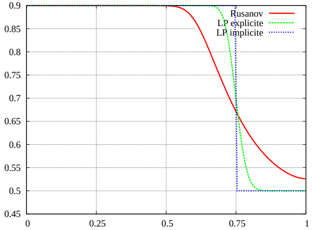
$$\frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{2a_k}{\max_{1\leq j\leq N}\left\{(<\overrightarrow{M}>_{k\,j-1}^{\;n} - <\overleftarrow{m}>_{k\,j}^{\;n})^+ - (<\overrightarrow{m}>_{k\,j}^{\;n} - <\overleftarrow{M}>_{k\,j+1}^{\;n})^-\right\}},$$
$$\text{pour } k = 1 \text{ et } k = 2;$$

où $<\overrightarrow{M}>_k$, $<\overleftarrow{m}>_k$, $<\overrightarrow{m}>_k$ et $<\overleftarrow{M}>_k$ sont définies explicitement au temps n et ne dépendent pas de Δt, on a

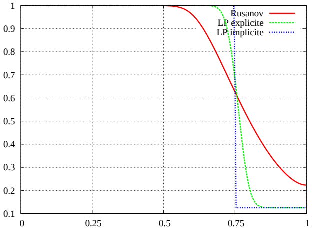
$$0 < {\alpha_1}_j^{n+1} < 1 \text{ et } 0 < {\alpha_2}_j^{n+1} < 1,$$
et
$$0 < {\rho_1}_j^{n+1} \text{ et } 0 < {\rho_2}_j^{n+1}.$$

De plus, le schéma peut s'écrire sous forme localement conservative pour les variables : $\alpha_1\rho_1$, $\alpha_2\rho_2$, $\alpha_1\rho_1 u_1 + \alpha_2\rho_2 u_2$, $\alpha_1\rho_1 E_1 + \alpha_2\rho_2 E_2$.

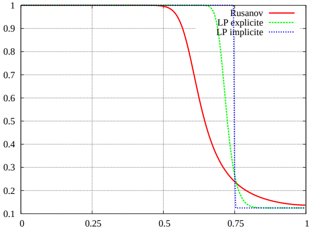
Test 1a - LP explicite, LP implicite, Rusanov pour $nx = 250$ mailles à $t = 0.025$ s (1/2)



α

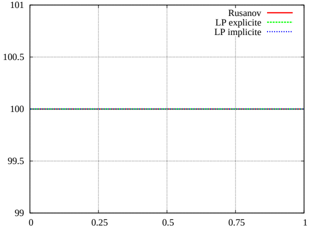


ρ_1

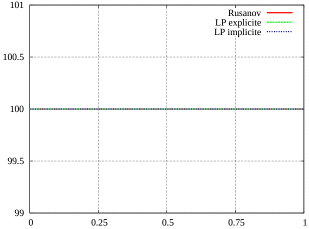


ρ_2

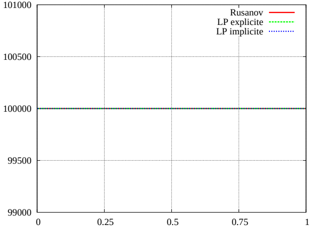
Test 1a - LP explicite, LP implicite, Rusanov pour $nx = 250$ mailles à $t = 0.025$ s (2/2)



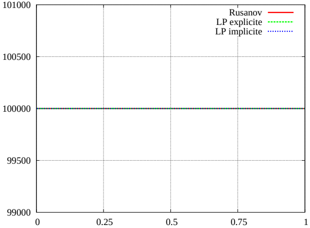
u_1



u_2

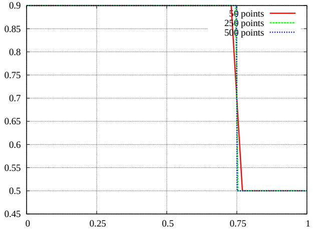


p_1

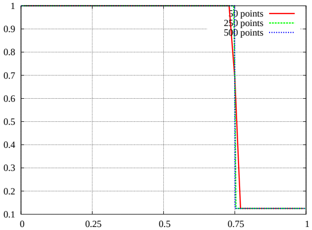


p_2

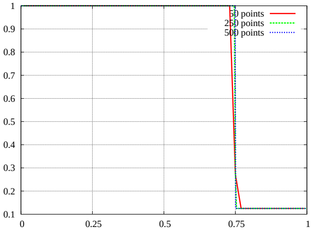
Test 1a - LP implicite pour différentes tailles de maillages à $t = 0.025$ s (1/2)



α_1

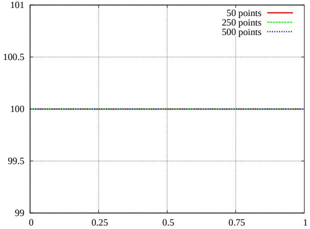


ρ_1

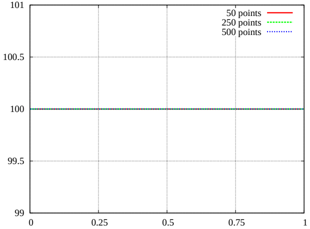


ρ_2

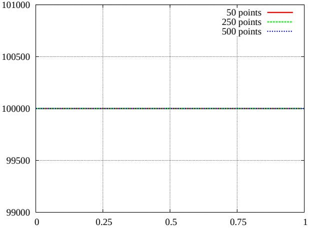
Test 1a - LP implicite pour différentes tailles de maillages à $t = 0.025$ s (2/2)



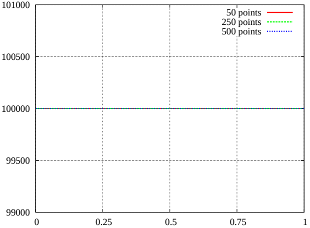
u_1



u_2



p_1

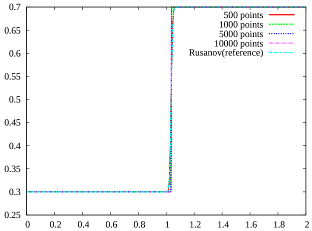


p_2

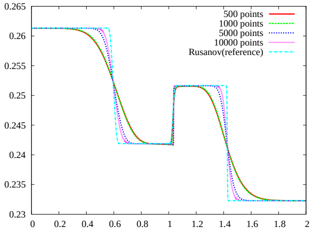
Test 1a - statistiques

Schéma	Mailles	Itéra°	dt (s)	Calcul (s)
Rusanov	250	4231	0.0000006	172.959
LP explicite	250	4297	0.0000006	818.999
LP implicite	50	13	0.0002	3.248
LP implicite	250	63	0.00004	15.629
LP implicite	500	126	0.00002	67.557

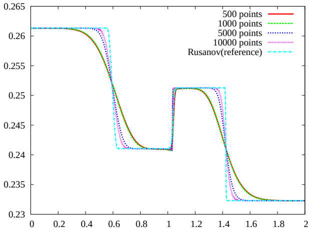
Test 2 - LP implicite pour différentes tailles de maillages à $t = 0.0015$ s (1/2)



α_1

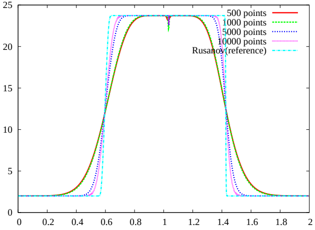


ρ_1

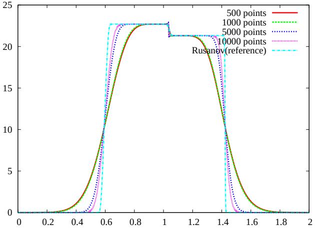


ρ_2

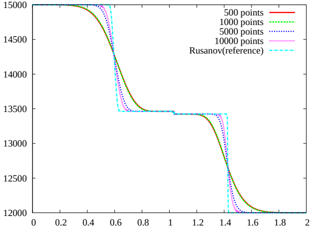
Test 2 - LP implicite pour différentes tailles de maillages à $t = 0.0015$ s (2/2)



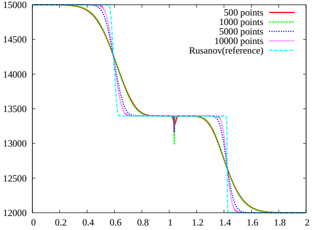
u_1



u_2

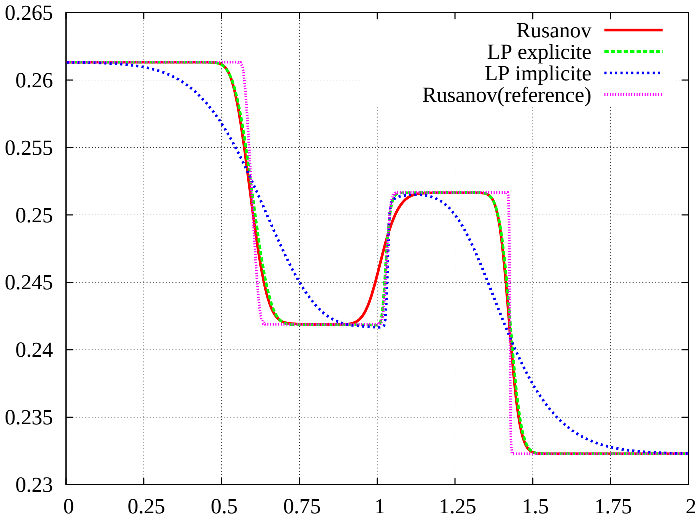


p_1

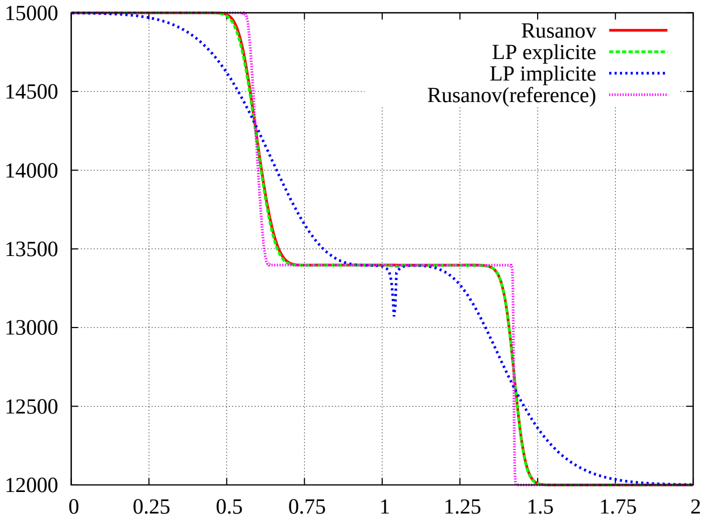


p_2

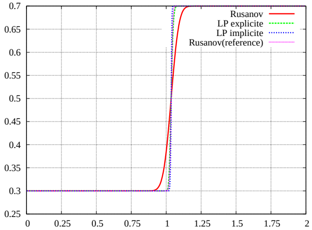
Test 2 - LP explicite, LP implicite, Rusanov pour $nx = 500$ mailles à $t = 0.2$ s (1/4) : ρ_1



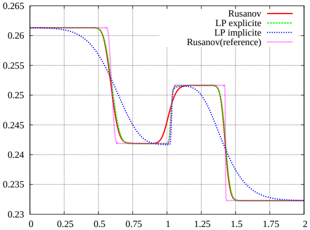
Test 2 - LP explicite, LP implicite, Rusanov pour $nx = 500$ mailles à $t = 0.2$ s (2/4) : p_2



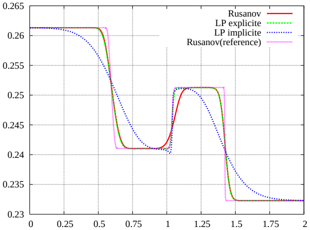
Test 2 - LP explicite, LP implicite, Rusanov pour $nx = 500$ mailles à $t = 0.2$ s (3/4)



α_1

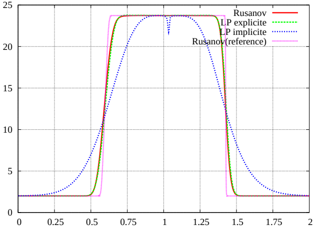


ρ_1

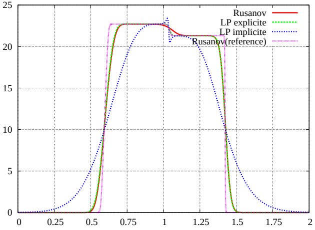


ρ_2

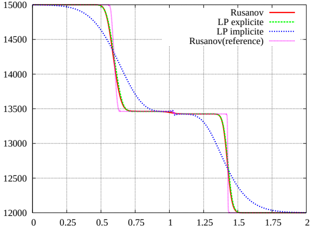
Test 2 - LP explicite, LP implicite, Rusanov pour $nx = 500$ mailles à $t = 0.2$ s (4/4)



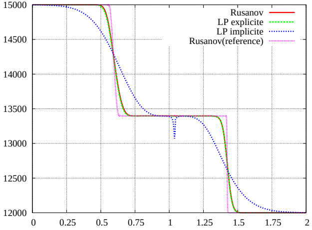
u_1



u_2



p_1

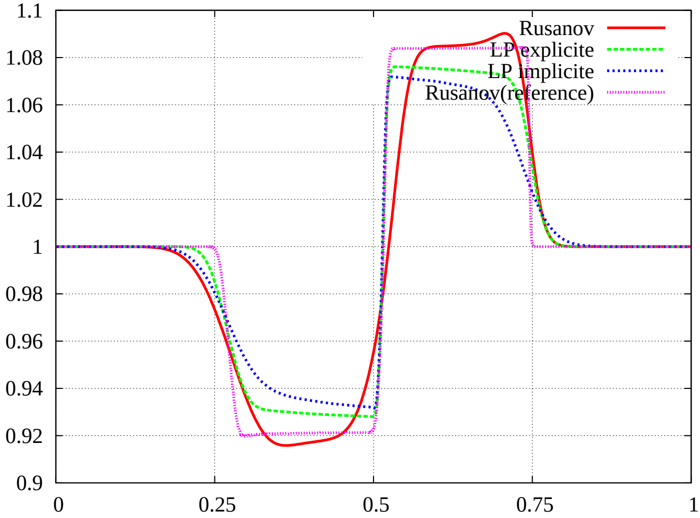


p_2

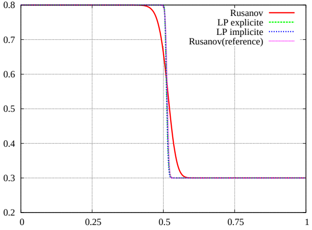
Test 2 - Statistiques

Schéma	Mailles	Itéra°	dt (s)	Calcul (s)
Rusanov	250	138	0.0000109	7.612
Rusanov	500	275	0.0000055	11.557
Rusanov	1000	550	0.0000027	31.466
LP explicite	250	138	0.0000109	24.471
LP explicite	500	276	0.0000055	99.98
LP explicite	1000	551	0.0000027	205.078
LP implicite	250	6	0.0002769	4.884
LP implicite	500	11	0.0001549	9.801
LP implicite	1000	20	0.0000787	49.068
LP implicite	5000	94	0.0000165	1752.339
LP implicite	10000	184	0.0000083	10322.515

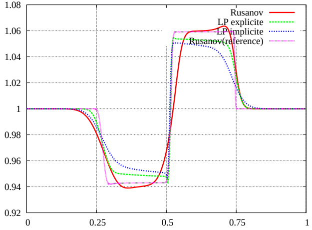
Test 3 - LP explicite, LP implicite, Rusanov pour $nx = 500$ mailles à $t = 0.2$ s (1/3) : p_1



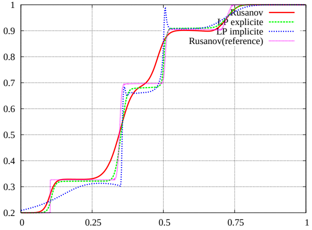
Test 3 - LP explicite, LP implicite, Rusanov pour $nx = 500$ mailles à $t = 0.2$ s (2/3)



α_1

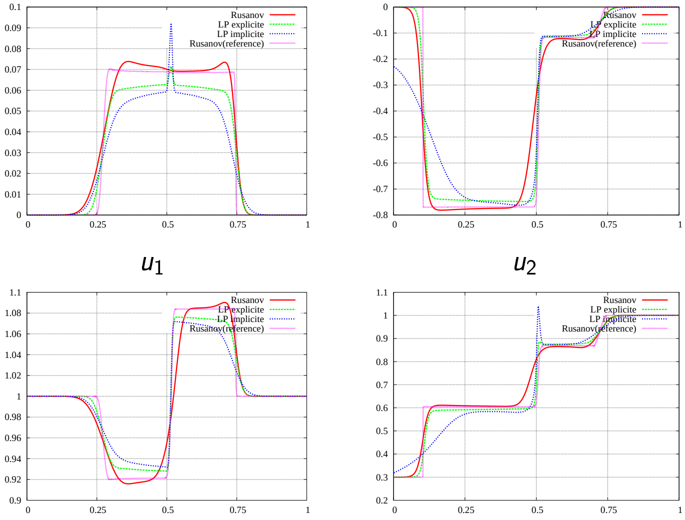


ρ_1



ρ_2

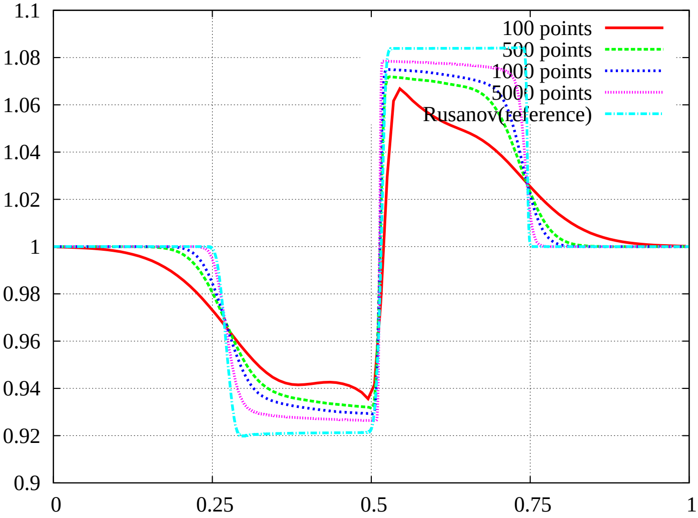
Test 3 - LP explicite, LP implicite, Rusanov pour $nx = 500$ mailles à $t = 0.2$ s (3/3)



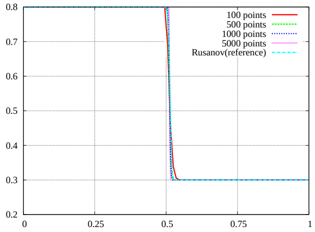
u_1 u_2

p_1 p_2

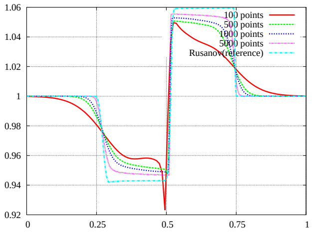
Test 3 - LP implicite pour différentes tailles de maillages à $t = 0.2$ s (1/3) : p_1



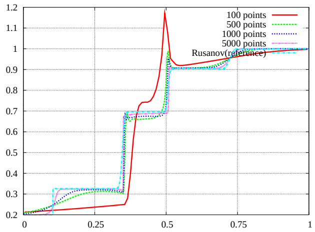
Test 3 - LP implicite pour différentes tailles de maillages à $t = 0.2$ s (2/3)



α_1

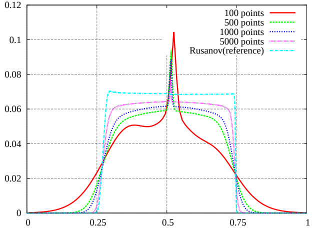


ρ_1

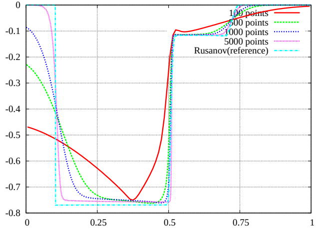


ρ_2

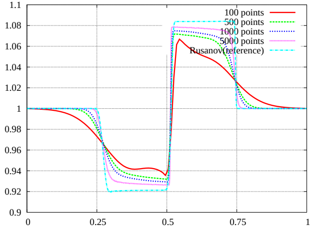
Test 3 - LP implicite pour différentes tailles de maillages à $t = 0.2$ s (3/3)



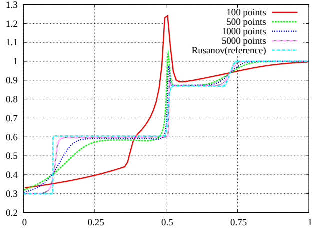
u_1



u_2



p_1



p_2

Test 3 : Statistiques

Schéma	Mailles	Itéra°	dt (s)	Calcul (s)
Rusanov	250	658	0.0003043	22.403
Rusanov	500	1315	0.0001521	63.121
Rusanov	1000	2630	0.0000761	144.602
LP explicite	250	659	0.0003043	107.656
LP explicite	500	1317	0.0001521	433.843
LP explicite	1000	2631	0.0000761	1156.948
LP implicite	100	14	0.0125722	3.29
LP implicite	250	37	0.0051841	14.453
LP implicite	500	75	0.0026228	29.975
LP implicite	1000	151	0.0013139	118.485
LP implicite	5000	758	0.0002639	14192.245

Conclusion

Cas Euler on a retrouvé les résultats de l'article, et choisi une interprétation du Lagrange Projection qui peut être élargie au cas diphasique,

Conclusion

Cas Euler on a retrouvé les résultats de l'article, et choisi une interprétation du Lagrange Projection qui peut être élargie au cas diphasique,
Cas Baer Nunziato on dispose désormais d'un algorithme :

- semi-implicite à grands pas de temps qui conserve la positivité de la densité,
- conservatif pour les grandeurs souhaitées,
- qui donne des résultats prometteurs.

Conclusion

Cas Euler on a retrouvé les résultats de l'article, et choisi une interprétation du Lagrange Projection qui peut être élargie au cas diphasique,

Cas Baer Nunziato on dispose désormais d'un algorithme :

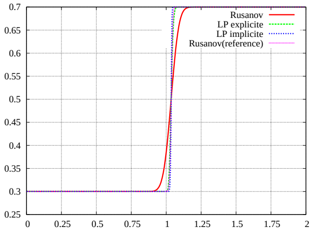
- semi-implicite à grands pas de temps qui conserve la positivité de la densité,
- conservatif pour les grandeurs souhaitées,
- qui donne des résultats prometteurs.

Ouvertures : passage à des cas tests plus réalistes et pertinents pour le CEA

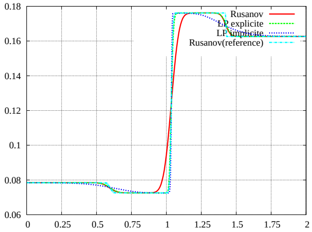
- conditions aux limites variées,
- positivité de l'énergie interne,
- passage en deux dimensions.

Merci !

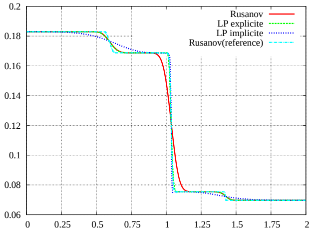
Test 2 - Variables conservatives pour $nx = 500$ mailles à $t = 0.2$ s (1/2)



α_1

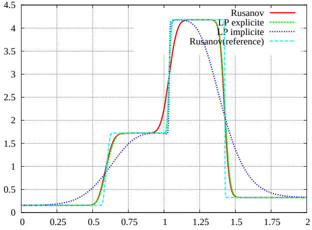


$\alpha_1 \rho_1$

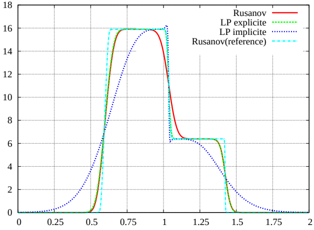


$\alpha_2 \rho_2$

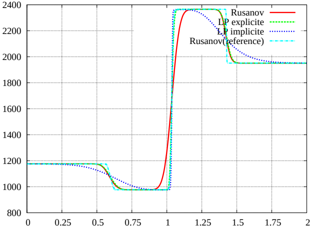
Test 2 - Variables conservatives pour $nx = 500$ mailles à $t = 0.2$ s (2/2)



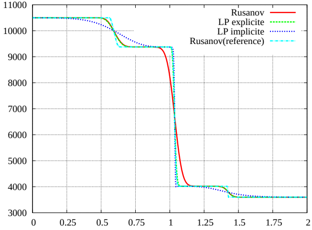
$\alpha_1 \rho_1 u_1$



$\alpha_2 \rho_2 u_2$

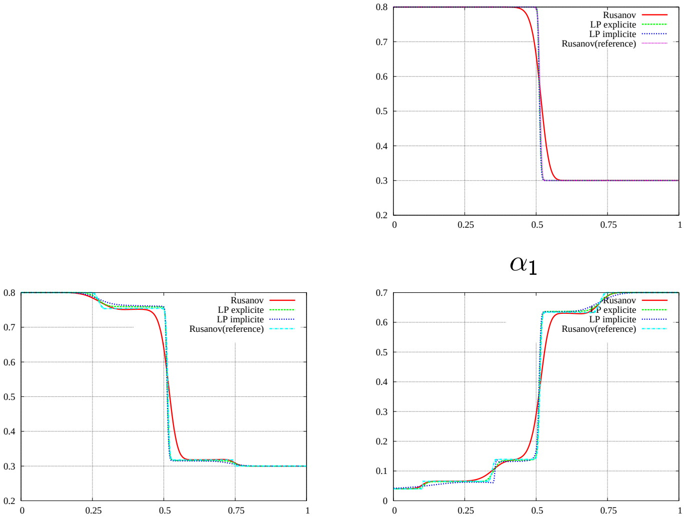


$\alpha_1 \rho_1 E_1$



$\alpha_2 \rho_2 E_2$

Test 3 - Variables conservatives pour $nx = 500$ mailles à $t = 0.2$ s (1/2)

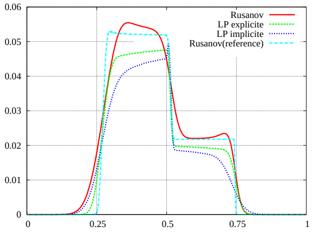


α_1

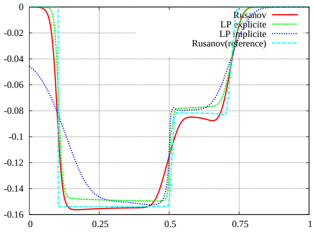
$\alpha_1 \rho_1$

$\alpha_2 \rho_2$

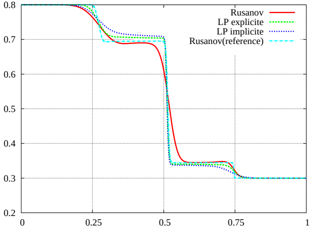
Test 3 - Variables conservatives pour $nx = 500$ mailles à $t = 0.2$ s (2/2)



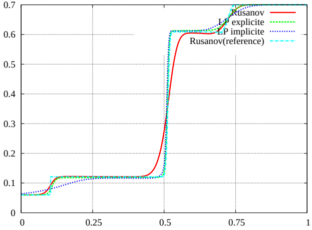
$\alpha_1 \rho_1 u_1$



$\alpha_2 \rho_2 u_2$



$\alpha_1 \rho_1 E_1$



$\alpha_2 \rho_2 E_2$