



# Théorèmes limites pour des processus de branchement et de coalescence spatiaux

Amandine Véber

Thèse sous la direction d'A. Etheridge et J.-F. Le Gall



# Plan de l'exposé

- 1 **Processus de branchement en milieu aléatoire**
  - Définitions
  - Probabilités d'atteinte pour des MBB parmi des obstacles mous
  - Convergence quenched de SMB parmi des obstacles durs
  
- 2 **Processus Lambda-Fleming-Viot spatial**
  - Présentation du modèle
  - Généalogies sur un grand tore



# 1. Processus de branchement spatiaux en milieu aléatoire



## Mouvement brownien branchant

Soit  $\alpha \geq 0$ . On part de  $n$  particules, disposées en  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ . Chacune, indépendamment des autres,

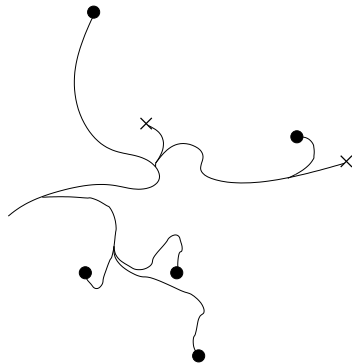
- se déplace dans  $\mathbb{R}^d$  selon la loi d'un mouvement brownien ;
- « branche » à taux 1, i.e. meurt et laisse à son emplacement un nombre aléatoire  $K_n$  de particules. On supposera que  $\mathbb{E}[K_n] = 1 - \frac{\alpha}{n}$  et  $\sigma_n^2 := \text{Var}(K_n) < \infty$ .

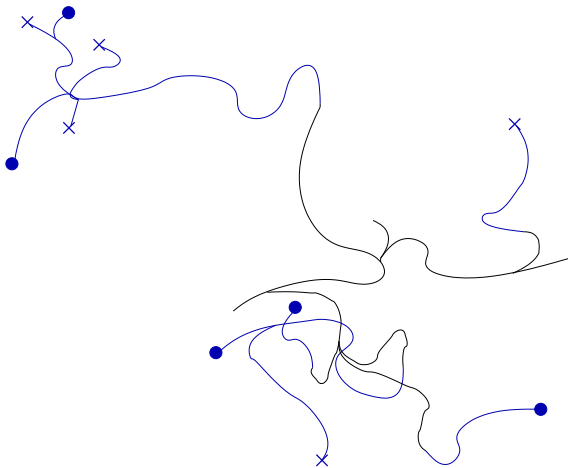
A chaque temps  $t \geq 0$ , on représente cette collection de particules par sa mesure empirique  $Z_t^n$  :

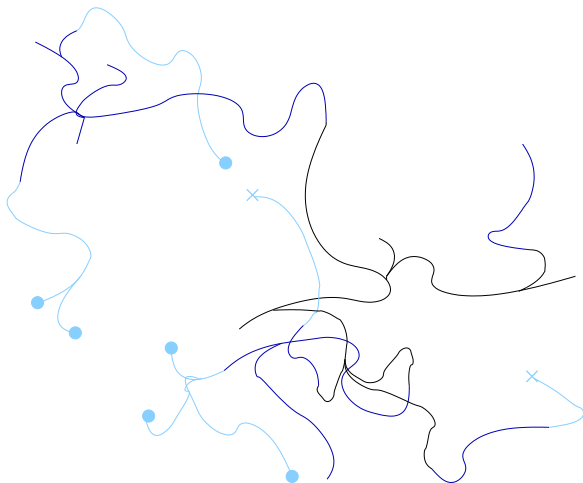
$$Z_t^n = \sum_{i \sim t} \delta_{\xi_i(t)}, \quad t \geq 0.$$

$Z^n := \{Z_t^n, t \geq 0\}$  est un processus markovien, à valeurs dans  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$ , appelé *mouvement brownien branchant*.













## Supermouvement brownien

A  $n \in \mathbb{N}$  fixé, on pose pour tout  $t \geq 0$

$$X_t^n := \frac{1}{n} \sum_{i \sim nt} \delta_{\xi_i(nt)/\sqrt{n}}, \quad \text{i.e.,} \quad \langle X_t^n, f \rangle = \frac{1}{n} \langle Z_{nt}^n, f(\cdot / \sqrt{n}) \rangle.$$

$\Rightarrow nX^n$  est un mouvement brownien branchant dont les particules branchent à taux  $n$ .

### Théorème

Supposons que  $X_0^n \rightarrow \mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d)$  et  $\sigma_n^2 \rightarrow \sigma^2 > 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Alors, le processus  $X^n$  converge en loi vers un supermouvement brownien de mécanisme de branchement  $\psi(u) = \alpha u + \frac{\sigma^2}{2} u^2$  et de valeur initiale  $\mu$ .



## Supermouvement brownien

Soit  $\psi$  une fonction de la forme  $\psi(u) = \alpha u + \beta u^2$ , avec  $\alpha, \beta \geq 0$ . On note  $\xi$  un mouvement brownien sur  $\mathbb{R}^d$  et sous  $P_x$ ,  $\xi_0 = x$  p.s.

### Définition

Le *supermouvement brownien de mécanisme de branchement*  $\psi$  est le processus markovien à valeurs dans  $\mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d)$  dont les noyaux de transition  $Q_t(\mu, d\nu)$  sont caractérisés par : pour tout  $\mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d)$  et toute fonction  $f \in \mathcal{B}_b^+(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\int Q_t(\mu, d\nu) e^{-\langle \nu, f \rangle} = e^{-\langle \mu, u(t, \cdot) \rangle},$$

où la fonction  $u(t, x)$  est l'unique solution positive de l'éq. intégrale

$$u(t, x) + E_x \left[ \int_0^t \psi(u(t-s, \xi_s)) ds \right] = E_x [f(\xi_t)].$$



## Interprétation

- Un supermouvement brownien  $X$  peut donc être vu comme une collection infinie de particules se déplaçant suivant la loi d'un mouvement brownien sur  $\mathbb{R}^d$  et branchant « à taux infini », indépendamment les unes des autres.
- Si  $A \subset \mathbb{R}^d$ ,  $X_t(A)$  est la masse de particules présentes dans  $A$  à l'instant  $t$ .
- Le paramètre  $\alpha$  correspond à un taux de meurtre ou d'érosion : si  $\beta = 0$ ,  $\langle X_t, 1 \rangle = e^{-\alpha t} \langle X_0, 1 \rangle$  pour tout  $t$ .
- Le paramètre  $\beta$  est la vitesse de la composante diffusive : si  $\alpha = 0$ ,  $Y := \langle X, 1 \rangle$  est une diffusion de Feller, solution de

$$dY_t = \sqrt{2\beta Y_t} dB_t,$$

où  $B$  est un mouvement brownien standard unidimensionnel.



## Interprétation

- Un supermouvement brownien  $X$  peut donc être vu comme une collection infinie de particules se déplaçant suivant la loi d'un mouvement brownien sur  $\mathbb{R}^d$  et branchant « à taux infini », indépendamment les unes des autres.
- Si  $A \subset \mathbb{R}^d$ ,  $X_t(A)$  est la masse de particules présentes dans  $A$  à l'instant  $t$ .
- Le paramètre  $\alpha$  correspond à un taux de meurtre ou d'érosion : si  $\beta = 0$ ,  $\langle X_t, 1 \rangle = e^{-\alpha t} \langle X_0, 1 \rangle$  pour tout  $t$ .
- Le paramètre  $\beta$  est la vitesse de la composante diffusive : si  $\alpha = 0$ ,  $Y := \langle X, 1 \rangle$  est une diffusion de Feller, solution de

$$dY_t = \sqrt{2\beta Y_t} dB_t,$$

où  $B$  est un mouvement brownien standard unidimensionnel.



## Obstacles aléatoires

On note  $\mathcal{K}_1$  l'ensemble des compacts de  $\mathbb{R}^d$  inclus dans  $\bar{B}(0, 1)$ , muni de la distance de Hausdorff. Soit  $\Theta$  une mesure finie sur  $\mathcal{K}_1$  et soit

$$\mathcal{N} := \sum_{i \in I} \delta_{(x_i, K_i)}$$

une mesure ponctuelle de Poisson sur  $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}_1$  d'intensité  $\lambda_d \otimes \Theta$  ( $\lambda_d =$  mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$ ).  $\mathcal{N}$  est définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ .

**Obstacles** : Pour tout  $\omega \in \Omega$ , on pose

$$\Gamma_\omega := \bigcup_{i \in I} (x_i + K_i)$$

*A noter* : Pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\mathbf{P}(x \in \Gamma_\omega) = \mathbf{P}(0 \in \Gamma_\omega) = 1 - e^{-\int_{\mathcal{K}_1} \lambda_d(K) \Theta(dK)} =: \kappa.$$

## Obstacles aléatoires

On note  $\mathcal{K}_1$  l'ensemble des compacts de  $\mathbb{R}^d$  inclus dans  $\bar{B}(0, 1)$ , muni de la distance de Hausdorff. Soit  $\Theta$  une mesure finie sur  $\mathcal{K}_1$  et soit

$$\mathcal{N} := \sum_{i \in I} \delta_{(x_i, K_i)}$$

une mesure ponctuelle de Poisson sur  $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}_1$  d'intensité  $\lambda_d \otimes \Theta$  ( $\lambda_d =$  mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$ ).  $\mathcal{N}$  est définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ .

**Obstacles** : Pour tout  $\omega \in \Omega$ , on pose

$$\Gamma_\omega := \bigcup_{i \in I} (x_i + K_i)$$

*A noter* : Pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\mathbf{P}(x \in \Gamma_\omega) = \mathbf{P}(0 \in \Gamma_\omega) = 1 - e^{-\int_{\mathcal{K}_1} \lambda_d(K) \Theta(dK)} =: \kappa.$$



# Notations

On notera

- $\mathbb{P}_x$  la mesure de probabilité sous laquelle un mouvement brownien part de  $x \in \mathbb{R}^d$  p.s. ;
- $\mathbb{P}_\mu$  la mesure de probabilité sous laquelle un mouvement brownien branchant ou un supermouvement brownien part de  $\mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d)$  p.s. ;
- $\mathbf{P}$  la mesure de probabilité sur l'espace de définition des obstacles.



## MBB parmi des obstacles mous

On fixe une réalisation  $\Gamma_\omega$  des obstacles et  $\varepsilon \geq 0$ . Le mouvement brownien branchant  $Z^{\omega, \varepsilon}$  sur  $\mathbb{R}^d$  ( $d \geq 1$ ) est défini de la manière suivante.

On part d'un nombre fini de particules, toutes en 0. Chacune, indépendamment des autres,

- se déplace dans  $\mathbb{R}^d$  selon la loi d'un mouvement brownien  $\xi^{\omega, \varepsilon}$  tué à taux  $\varepsilon$  dans  $\Gamma_\omega$  ;
- branche à taux 1 et donne naissance à un nombre aléatoire  $K$  de particules. On suppose  $\mathbb{E}[K] = 1$  et  $\sigma^2 := \text{Var}(K) < \infty$ .

A nouveau, on écrit

$$Z_t^{\omega, \varepsilon} = \sum_{i \sim t} \delta_{\xi_i^{\omega, \varepsilon}(t)}.$$





## Question

On veut comprendre l'influence des obstacles sur l'évolution du MBB lorsque  $\varepsilon$  est petit. Plus précisément :

- Combien de particules faut-il placer initialement en 0 pour qu'avec probabilité au moins  $1/2$ , l'une d'entre elle atteigne une distance  $R \gg 1$  de l'origine ?
- Autrement dit, quelle est la probabilité que  $Z^{\omega, \varepsilon}$  partant de  $\delta_0$  touche  $B(0, R)^c$  ?

Sans obstacle :

Théorème (Sawyer & Fleischman 1979)

On suppose  $d = 1$ . Il existe  $C > 0$  telle que, lorsque  $R \rightarrow \infty$ ,

$$\mathbb{P}_{\delta_0} [Z \text{ touche } B(0, R)^c] \sim \frac{C}{R^2}.$$



## Question

On veut comprendre l'influence des obstacles sur l'évolution du MBB lorsque  $\varepsilon$  est petit. Plus précisément :

- Combien de particules faut-il placer initialement en 0 pour qu'avec probabilité au moins  $1/2$ , l'une d'entre elle atteigne une distance  $R \gg 1$  de l'origine ?
- Autrement dit, quelle est la probabilité que  $Z^{\omega, \varepsilon}$  partant de  $\delta_0$  touche  $B(0, R)^c$  ?

**Sans obstacle :**

### Théorème (Sawyer & Fleischman 1979)

On suppose  $d = 1$ . Il existe  $C > 0$  telle que, lorsque  $R \rightarrow \infty$ ,

$$\mathbb{P}_{\delta_0} [Z \text{ touche } B(0, R)^c] \sim \frac{C}{R^2}.$$



## Probabilités d'atteinte *quenched*

Soit  $A$  un domaine de  $\mathbb{R}^d$ , de classe  $C^2$  et contenant 0. Si  $a \geq 0$ , on note  $u_{(a)} = (u_{(a)}(x), x \in A)$  l'unique solution positive du problème

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \Delta u = \frac{\sigma^2}{2} u^2 + au & \text{dans } A, \\ u|_{\partial A} = +\infty \end{cases}$$

*Rappels :*

- $\kappa = \mathbf{P}[0 \in \Gamma_\omega]$ ,
- Les particules de  $Z^{\omega, \varepsilon}$  sont tuées à taux  $\varepsilon$  dans  $\Gamma_\omega$ .

Théorème (Le Gall & V. 2009)

P-p.s., on a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{\varepsilon \geq 0} |R^2 \mathbb{P}_{\delta_0} [Z^{\omega, \varepsilon} \text{ touche } (RA)^c] - u_{(\kappa \varepsilon R^2)}(0)| = 0.$$



## Probabilités d'atteinte *quenched*

Soit  $A$  un domaine de  $\mathbb{R}^d$ , de classe  $C^2$  et contenant 0. Si  $a \geq 0$ , on note  $u_{(a)} = (u_{(a)}(x), x \in A)$  l'unique solution positive du problème

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \Delta u = \frac{\sigma^2}{2} u^2 + au & \text{dans } A, \\ u|_{\partial A} = +\infty \end{cases}$$

*Rappels :*

- $\kappa = \mathbf{P}[0 \in \Gamma_\omega]$ ,
- Les particules de  $Z^{\omega, \varepsilon}$  sont tuées à taux  $\varepsilon$  dans  $\Gamma_\omega$ .

### Théorème (Le Gall & V. 2009)

**P**-p.s., on a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{\varepsilon \geq 0} |R^2 \mathbb{P}_{\delta_0} [Z^{\omega, \varepsilon} \text{ touche } (RA)^c] - u_{(\kappa \varepsilon R^2)}(0)| = 0.$$



## Remarques

- 1 Si  $R^2\varepsilon \rightarrow a > 0$ , alors  $\mathbb{P}_{\delta_0}[Z^{\omega,\varepsilon} \text{ touche } (RA)^c] \sim u_{(\kappa a)}(0)/R^2$ .  
Même décroissance que dans le cas sans obstacle, mais la constante change.
- 2 Si  $R^2\varepsilon \rightarrow 0$ , le meurtre dans les obstacles ne se fait plus sentir et on retrouve le résultat sans obstacle (i.e.,  $u_{(0)}(0)/R^2$ ).
- 3 Si  $R^2\varepsilon \rightarrow +\infty$ , le taux de meurtre « effectif » devient infini. On peut montrer qu'il existe des constantes  $C_1, C_2 > 0$  telles que pour tout  $R \geq 1$  et  $\varepsilon \in [1/R^2, 1]$ ,

$$\mathbb{P}_{\delta_0}[Z^{\omega,\varepsilon} \text{ touche } (RA)^c] \geq C_1 \varepsilon e^{-R\sqrt{2\varepsilon}} \quad \forall \omega \in \Omega,$$

$$\mathbf{P} \otimes \mathbb{P}_{\delta_0}[Z^{\omega,\varepsilon} \text{ touche } (RA)^c] \leq e^{-C_2 R\sqrt{\varepsilon}}.$$



## Remarques

- 1 Si  $R^2\varepsilon \rightarrow a > 0$ , alors  $\mathbb{P}_{\delta_0}[Z^{\omega,\varepsilon} \text{ touche } (RA)^c] \sim u_{(\kappa a)}(0)/R^2$ .  
Même décroissance que dans le cas sans obstacle, mais la constante change.
- 2 Si  $R^2\varepsilon \rightarrow 0$ , le meurtre dans les obstacles ne se fait plus sentir et on retrouve le résultat sans obstacle (i.e.,  $u_{(0)}(0)/R^2$ ).
- 3 Si  $R^2\varepsilon \rightarrow +\infty$ , le taux de meurtre « effectif » devient infini. On peut montrer qu'il existe des constantes  $C_1, C_2 > 0$  telles que pour tout  $R \geq 1$  et  $\varepsilon \in [1/R^2, 1]$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\delta_0}[Z^{\omega,\varepsilon} \text{ touche } (RA)^c] &\geq C_1 \varepsilon e^{-R\sqrt{2\varepsilon}} \quad \forall \omega \in \Omega, \\ \mathbf{P} \otimes \mathbb{P}_{\delta_0}[Z^{\omega,\varepsilon} \text{ touche } (RA)^c] &\leq e^{-C_2 R\sqrt{\varepsilon}}. \end{aligned}$$



## Remarques

- 1 Si  $R^2\varepsilon \rightarrow a > 0$ , alors  $\mathbb{P}_{\delta_0}[Z^{\omega,\varepsilon} \text{ touche } (RA)^c] \sim u_{(\kappa a)}(0)/R^2$ .  
Même décroissance que dans le cas sans obstacle, mais la constante change.
- 2 Si  $R^2\varepsilon \rightarrow 0$ , le meurtre dans les obstacles ne se fait plus sentir et on retrouve le résultat sans obstacle (i.e.,  $u_{(0)}(0)/R^2$ ).
- 3 Si  $R^2\varepsilon \rightarrow +\infty$ , le taux de meurtre « effectif » devient infini. On peut montrer qu'il existe des constantes  $C_1, C_2 > 0$  telles que pour tout  $R \geq 1$  et  $\varepsilon \in [1/R^2, 1]$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\delta_0}[Z^{\omega,\varepsilon} \text{ touche } (RA)^c] &\geq C_1 \varepsilon e^{-R\sqrt{2\varepsilon}} \quad \forall \omega \in \Omega, \\ \mathbf{P} \otimes \mathbb{P}_{\delta_0}[Z^{\omega,\varepsilon} \text{ touche } (RA)^c] &\leq e^{-C_2 R\sqrt{\varepsilon}}. \end{aligned}$$



## Ingrédient de la preuve

On définit  $X^{\omega, \varepsilon}$  par : pour toute  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  et tout  $t \geq 0$ ,

$$\langle X_t^{\omega, \varepsilon}, f \rangle = \varepsilon \langle Z_{\varepsilon^{-1}t}^{\omega, \varepsilon}, f(\cdot \sqrt{\varepsilon}) \rangle.$$

$\Rightarrow \varepsilon^{-1} X^{\omega, \varepsilon}$  MBB dont les particules branchent à taux  $\varepsilon^{-1}$  et sont tuées à taux 1 dans  $\sqrt{\varepsilon} \Gamma_\omega$ .

*Condition initiale* : comme pour la convergence « classique », il faut de l'ordre de  $\varepsilon^{-1}$  particules au départ pour que  $X^{\omega, \varepsilon}$  survive pendant un temps d'ordre 1.

### Théorème d'homogénéisation (Le Gall & V. 2009)

P-p.s., lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  la loi de  $X^{\omega, \varepsilon}$  sous  $\mathbb{P}_{\lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor \delta_0}$  converge vers celle du supermouvement brownien  $X^\infty$ , de mécanisme de branchement  $\psi(u) = \frac{\sigma^2}{2} u^2 + \kappa u$  et de valeur initiale  $\delta_0$ .





## Ingrédient de la preuve

On définit  $X^{\omega, \varepsilon}$  par : pour toute  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  et tout  $t \geq 0$ ,

$$\langle X_t^{\omega, \varepsilon}, f \rangle = \varepsilon \langle Z_{\varepsilon^{-1}t}^{\omega, \varepsilon}, f(\cdot \sqrt{\varepsilon}) \rangle.$$

$\Rightarrow \varepsilon^{-1} X^{\omega, \varepsilon}$  MBB dont les particules branchent à taux  $\varepsilon^{-1}$  et sont tuées à taux 1 dans  $\sqrt{\varepsilon} \Gamma_\omega$ .

*Condition initiale* : comme pour la convergence « classique », il faut de l'ordre de  $\varepsilon^{-1}$  particules au départ pour que  $X^{\omega, \varepsilon}$  survive pendant un temps d'ordre 1.

### Théorème d'homogénéisation (Le Gall & V. 2009)

**P**-p.s., lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  la loi de  $X^{\omega, \varepsilon}$  sous  $\mathbb{P}_{\lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor \delta_0}$  converge vers celle du supermouvement brownien  $X^\infty$ , de mécanisme de branchement  $\psi(u) = \frac{\sigma^2}{2} u^2 + \kappa u$  et de valeur initiale  $\delta_0$ .



## Obstacles durs

Soit  $c : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction mesurable bornée.

Pour tout  $\varepsilon \in (0, 1/2)$ , on note  $\mathcal{N}_\varepsilon = \sum_{i \in I_\varepsilon} \delta_{x_i}$  une mesure ponctuelle de Poisson sur  $\mathbb{R}^d$  d'intensité  $s_d(\varepsilon)c(x)\lambda_d(dx)$ , où

$$s_d(\varepsilon) = \begin{cases} \ln(\varepsilon^{-1}) & \text{si } d = 2, \\ \varepsilon^{2-d} & \text{si } d \geq 3. \end{cases}$$

On suppose que toutes les mesures  $\mathcal{N}_\varepsilon$  sont définies sur un même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ .

**Obstacles** : Pour tout  $\omega \in \Omega$ , on pose

$$\Gamma_{\omega, \varepsilon} := \bigcup_{i \in I_\varepsilon} (x_i + \bar{B}(0, \varepsilon)) = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} \bar{B}(x_i, \varepsilon).$$

$\Rightarrow$  Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , le rayon des obstacles tend vers 0, mais leur densité tend vers  $+\infty$  (dans les régions où  $c > 0$ ).



## Obstacles durs

Soit  $c : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction mesurable bornée.

Pour tout  $\varepsilon \in (0, 1/2)$ , on note  $\mathcal{N}_\varepsilon = \sum_{i \in I_\varepsilon} \delta_{x_i}$  une mesure ponctuelle de Poisson sur  $\mathbb{R}^d$  d'intensité  $s_d(\varepsilon)c(x)\lambda_d(dx)$ , où

$$s_d(\varepsilon) = \begin{cases} \ln(\varepsilon^{-1}) & \text{si } d = 2, \\ \varepsilon^{2-d} & \text{si } d \geq 3. \end{cases}$$

On suppose que toutes les mesures  $\mathcal{N}_\varepsilon$  sont définies sur un même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ .

**Obstacles** : Pour tout  $\omega \in \Omega$ , on pose

$$\Gamma_{\omega, \varepsilon} := \bigcup_{i \in I_\varepsilon} (x_i + \bar{B}(0, \varepsilon)) = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} \bar{B}(x_i, \varepsilon).$$

$\Rightarrow$  Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , le rayon des obstacles tend vers 0, mais leur densité tend vers  $+\infty$  (dans les régions où  $c > 0$ ).



## SBM parmi des obstacles durs

On fixe  $\omega \in \Omega$ . Pour tout  $\varepsilon \in (0, 1/2)$ , on définit  $X^{\omega, \varepsilon}$  comme le supermouvement brownien de mécanisme de branchement  $\psi(u) = u^2$  et de déplacement sous-jacent la loi d'un mouvement brownien tué instantanément dans  $\Gamma_{\omega, \varepsilon}$ .

- Cette fois, « chaque particule brownienne » meurt dès qu'elle entre dans un obstacle.
- Ce n'est plus le temps passé dans les obstacles qui compte, mais le temps d'entrée dans une des boules de  $\Gamma_{\omega, \varepsilon}$ .

**Question :** Comportement de  $X^{\omega, \varepsilon}$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  ?



## Mouvement brownien parmi des obstacles durs

Pour tout  $\omega \in \Omega$  et  $\varepsilon \in (0, 1/2)$ , on note  $\xi^{\omega, \varepsilon}$  un mouvement brownien tué instantanément dans  $\Gamma_{\omega, \varepsilon}$ . On note aussi  $\xi$  un mouvement brownien standard (dans  $\mathbb{R}^d$ ), et on définit la *saucisse de Wiener* de rayon  $r$  le long de l'intervalle  $[s, t]$  par :

$$S_r(s, t) := \bigcup_{u \in [s, t]} (\xi_u + \bar{B}(0, r)).$$

On a alors

$$P_0[\xi^{\omega, \varepsilon} \text{ survit jusqu'en } t] = P_0[S_\varepsilon(0, t) \cap \mathcal{N}_\varepsilon = \emptyset].$$

En utilisant la structure des obstacles, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \otimes P_0[\xi^{\omega, \varepsilon} \text{ survit jusqu'en } t] &= E_0[\mathbf{P}[S_\varepsilon(0, t) \cap \mathcal{N}_\varepsilon = \emptyset]] \\ &= \exp \left\{ -s_d(\varepsilon) \int_{S_\varepsilon(0, t)} c(x) dx \right\}. \end{aligned}$$

## Le cas $c$ constante

Si la fonction  $c$  est constante, on a alors

$$\mathbf{P} \otimes \mathbf{P}_0 [\xi^{\omega, \varepsilon} \text{ survit jusqu'en } t] = \mathbf{E}_0 \left[ e^{-c s_d(\varepsilon) \lambda_d(S_\varepsilon(0, t))} \right].$$

Mais Kesten, Spitzer & Whitman (1965) ont montré que si  $d \geq 3$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s_d(\varepsilon) \lambda_d(S_\varepsilon(0, t)) = k_d t \quad \mathbf{P}_0\text{-p.s.},$$

où  $k_d = (d - 2)\pi^{d/2} / \Gamma(d/2)$  est la capacité newtonienne de la boule unité. Résultat analogue en dimension 2, avec  $k_2 = \pi$  (Le Gall 1986).

- Sous  $\mathbf{P} \otimes \mathbf{P}_0$ , le temps de vie de  $\xi^{\omega, \varepsilon}$  converge en loi vers une variable  $\mathcal{E}(ck_d)$ .
- On a envie de conclure qu'à environnement fixé,  $\xi^{\omega, \varepsilon}$  converge en loi vers un mouvement brownien tué de manière homogène à taux  $k_d c$  (plus d'obstacle à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ ).



## Le cas $c$ constante

Si la fonction  $c$  est constante, on a alors

$$\mathbf{P} \otimes \mathbf{P}_0 [\xi^{\omega, \varepsilon} \text{ survit jusqu'en } t] = \mathbf{E}_0 \left[ e^{-c s_d(\varepsilon) \lambda_d(S_\varepsilon(0, t))} \right].$$

Mais Kesten, Spitzer & Whitman (1965) ont montré que si  $d \geq 3$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s_d(\varepsilon) \lambda_d(S_\varepsilon(0, t)) = k_d t \quad \mathbf{P}_0\text{-p.s.},$$

où  $k_d = (d - 2)\pi^{d/2} / \Gamma(d/2)$  est la capacité newtonienne de la boule unité. Résultat analogue en dimension 2, avec  $k_2 = \pi$  (Le Gall 1986).

- Sous  $\mathbf{P} \otimes \mathbf{P}_0$ , le temps de vie de  $\xi^{\omega, \varepsilon}$  converge en loi vers une variable  $\mathcal{E}(ck_d)$ .
- On a envie de conclure qu'à environnement fixé,  $\xi^{\omega, \varepsilon}$  converge en loi vers un mouvement brownien tué de manière homogène à taux  $k_d c$  (plus d'obstacle à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ ).



## Convergence *quenched* de $X^{\omega, \varepsilon}$

On note  $X^*$  le SMB de mécanisme de branchement

$$\psi(u, x) = u^2 + k_d c(x)u.$$

### Théorème d'homogénéisation (V. 2009)

Soit  $\mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d)$ .

i Si  $(\varepsilon_n)$  est une suite décroissante telle que

$$\sum_{n \geq 1} |\ln \varepsilon_n|^{-1} < \infty \text{ si } d = 2, \quad \sum_{n \geq 1} \varepsilon_n |\ln \varepsilon_n| < \infty \text{ si } d \geq 3,$$

alors **P**-p.s., lorsque  $n \rightarrow \infty$  la loi de  $X^{\omega, \varepsilon_n}$  sous  $\mathbb{P}_\mu$  converge vers celle de  $X^*$  partant de  $\mu$ .

ii Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la loi de  $X^{\omega, \varepsilon}$  sous  $\mathbb{P}_\mu$  converge en **P**-probabilité vers la loi de  $X^*$  partant de  $\mu$ .





# Perspectives

- Relier les deux problèmes (obstacles durs et mous).
- Dans le cas des obstacles mous, rendre les obstacles de plus en plus rare : quel rapport entre la densité des obstacles et le taux de meurtre pour retrouver ce phénomène d'homogénéisation ?



## 2. Processus $\Lambda$ -Fleming-Viot spatial et généalogies associées



# Motivations

On veut décrire une population d'individus répartis sur  $\mathbb{R}^2$  (par exemple), dont chacun possède un type, une caractéristique. Les individus se reproduisent et transmettent leur type à leur descendants.

**Reproduction locale** : Les descendants naissent dans un voisinage de leur parent.

**Extinctions locales** : Les individus d'une zone plus ou moins étendue sont affectés et potentiellement tués par des événements touchant seulement cette zone.



## Modèle

Soit  $K$  l'espace des types, supposé compact. On note  $\Xi$  l'ensemble des fonctions mesurables  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}_1(K)$ .

**Interprétation :**  $\Phi(x)$  est la distribution du type d'un individu échantillonné au site  $x$ .

On fixe

- une mesure  $\sigma$ -finie  $\mu$  sur  $\mathbb{R}_+$ ,
- une collection  $\{\nu_r, r > 0\}$  de mesures de probabilité sur  $[0, 1]$ .

Soit  $\Pi$  un processus ponctuel de Poisson (PPP) sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$  d'intensité  $dt \otimes dz \otimes \mu(dr)$ .

## Modèle

Soit  $K$  l'espace des types, supposé compact. On note  $\Xi$  l'ensemble des fonctions mesurables  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}_1(K)$ .

**Interprétation :**  $\Phi(x)$  est la distribution du type d'un individu échantillonné au site  $x$ .

On fixe

- une mesure  $\sigma$ -finie  $\mu$  sur  $\mathbb{R}_+$ ,
- une collection  $\{\nu_r, r > 0\}$  de mesures de probabilité sur  $[0, 1]$ .

Soit  $\Pi$  un processus ponctuel de Poisson (PPP) sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$  d'intensité  $dt \otimes dz \otimes \mu(dr)$ .

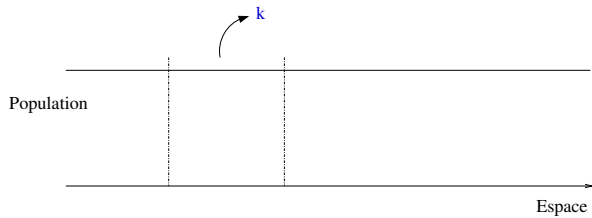


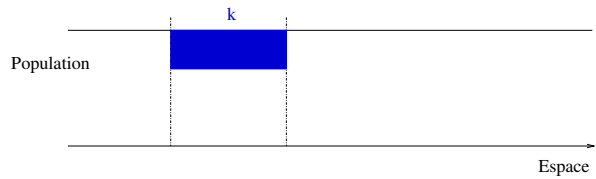
## Définition

Le processus  $\Lambda$ -Fleming-Viot spatial  $\{\Phi_t, t \geq 0\}$  est le processus (markovien) à valeurs dans  $\Xi$  qui évolue de la manière suivante. Si  $(t, x, r) \in \Pi$ , alors un paramètre  $u$  est choisi selon  $\nu_r$ , un point  $z$  est tiré uniformément dans  $B(x, r)$  et un type  $k$  est choisi selon  $\Phi_{t-}(z)$ . Pour tout  $y \in B(x, r)$ ,

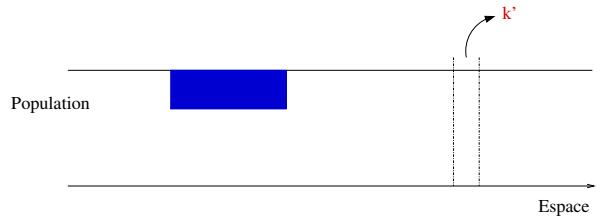
$$\Phi_t(y) = (1 - u)\Phi_{t-}(y) + u\delta_k,$$

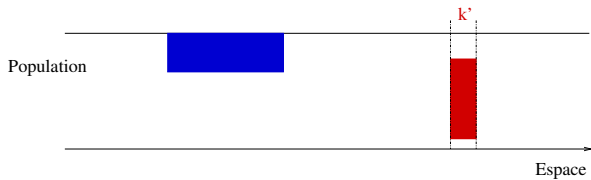
et  $\Phi_t(y') = \Phi_{t-}(y')$  si  $y' \notin B(x, r)$ .

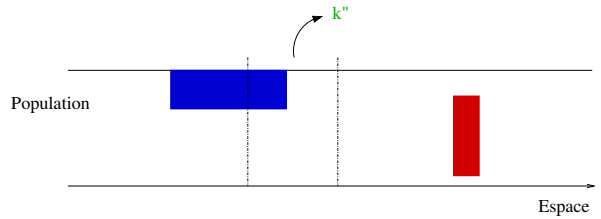
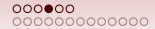


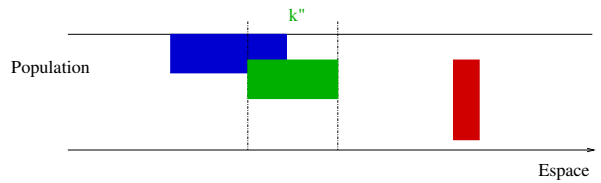












# Hypothèses

Pour pouvoir définir ce processus, on suppose :

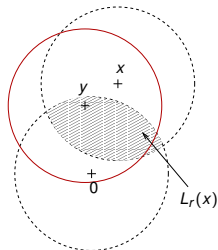
$$\int_0^\infty \int_0^1 ur^2 \nu_r(du) \mu(dr) < \infty.$$

⇒ Un « individu » donné est touché par un événement de reproduction à taux fini.

$$\int_{\mathbb{R}^2} (1 \wedge |x|^2) \left( \int_{|x|/2}^\infty \int_0^1 \frac{L_r(x)}{\pi r^2} u \nu_r(du) \mu(dr) \right) dx < \infty,$$

où  $L_r(x) = \text{Vol}(B(0, r) \cap B(x, r))$ .

⇒ Le déplacement spatial d'un lignage ancestral est un processus de Lévy.





## Existence

### Théorème (Barton, Etheridge & V. 2009)

Sous les hypothèses précédentes, le processus  $\Lambda$ -Fleming-Viot spatial existe et est unique en loi. Il a la propriété de Feller.

La preuve est une modification d'un résultat d'Evans. [*Coalescing Markov labelled partitions and a continuous sites genetics model with infinitely many types*, 1997]

**Idée** : Si on échantillonne  $n$  individus dans la population au temps présent et que l'on retrace leur histoire, on obtient un système de  $n$  processus de Lévy coalescents.

On utilise ensuite une relation de dualité fonctionnelle pour définir  $\Phi$  à partir de ces systèmes.



## Notations

Pour chaque  $L \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathbb{T}(L) \subset \mathbb{R}^2$  le tore de côté  $L$ . On fixe

- $\alpha \in (0, 1]$ .
- Une suite croissante  $(\rho_L)_{L \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $(0, \infty]$  et telle que  $\rho_L \rightarrow \infty$ .
- Deux mesures  $\sigma$ -finies  $\mu^S$  et  $\mu^B$  sur  $[0, \infty)$ , telles qu'il existe  $R^S, R^B < \infty$  bornant leur support.
- Deux collections  $\{\nu_r^S, r > 0\}$  et  $\{\nu_r^B, r > 0\}$  de probabilités sur  $[0, 1]$ .



## Notations

Pour chaque  $L \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathbb{T}(L) \subset \mathbb{R}^2$  le tore de côté  $L$ . On fixe

- $\alpha \in (0, 1]$ .
- Une suite croissante  $(\rho_L)_{L \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $(0, \infty]$  et telle que  $\rho_L \rightarrow \infty$ .
- Deux mesures  $\sigma$ -finies  $\mu^S$  et  $\mu^B$  sur  $[0, \infty)$ , telles qu'il existe  $R^S, R^B < \infty$  bornant leur support.
- Deux collections  $\{\nu_r^S, r > 0\}$  et  $\{\nu_r^B, r > 0\}$  de probabilités sur  $[0, 1]$ .





## Notations

Pour chaque  $L \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathbb{T}(L) \subset \mathbb{R}^2$  le tore de côté  $L$ . On fixe

- $\alpha \in (0, 1]$ .
- Une suite croissante  $(\rho_L)_{L \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $(0, \infty]$  et telle que  $\rho_L \rightarrow \infty$ .
- Deux mesures  $\sigma$ -finies  $\mu^S$  et  $\mu^B$  sur  $[0, \infty)$ , telles qu'il existe  $R^S, R^B < \infty$  bornant leur support.
- Deux collections  $\{\nu_r^S, r > 0\}$  et  $\{\nu_r^B, r > 0\}$  de probabilités sur  $[0, 1]$ .

# Notations

Pour chaque  $L \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathbb{T}(L) \subset \mathbb{R}^2$  le tore de côté  $L$ . On fixe

- $\alpha \in (0, 1]$ .
- Une suite croissante  $(\rho_L)_{L \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $(0, \infty]$  et telle que  $\rho_L \rightarrow \infty$ .
- Deux mesures  $\sigma$ -finies  $\mu^S$  et  $\mu^B$  sur  $[0, \infty)$ , telles qu'il existe  $R^S, R^B < \infty$  bornant leur support.
- Deux collections  $\{\nu_r^S, r > 0\}$  et  $\{\nu_r^B, r > 0\}$  de probabilités sur  $[0, 1]$ .

## Notations

Pour chaque  $L \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathbb{T}(L) \subset \mathbb{R}^2$  le tore de côté  $L$ . On fixe

- $\alpha \in (0, 1]$ .
- Une suite croissante  $(\rho_L)_{L \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $(0, \infty]$  et telle que  $\rho_L \rightarrow \infty$ .
- Deux mesures  $\sigma$ -finies  $\mu^s$  et  $\mu^B$  sur  $[0, \infty)$ , telles qu'il existe  $R^s, R^B < \infty$  bornant leur support.
- Deux collections  $\{\nu_r^s, r > 0\}$  et  $\{\nu_r^B, r > 0\}$  de probabilités sur  $[0, 1]$ .



## Evolution à $L$ fixé

### Deux types d'événements :

**Petits év.** , donnés par un PPP  $\Pi_L^S$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{T}(L) \times \mathbb{R}_+$  d'intensité  $dt \otimes dx \otimes \mu^S$ . Si  $(t, x, r) \in \Pi_L^S$ , le centre de l'év. est  $x$ , son rayon  $r$  et la fraction d'individus remplacés est choisie selon  $\nu_r^S$ .

**Grands év.** , donnés par un PPP  $\Pi_L^B$  sur  $\mathbb{R} \times L^{-\alpha}\mathbb{T}(L) \times \mathbb{R}_+$  d'intensité  $\rho_L^{-1} dt \otimes dx \otimes \mu^B$ , indép. de  $\Pi_L^S$ . Si  $(t, x, r) \in \Pi_L^B$ , le centre de l'év. est  $L^\alpha x$ , son rayon  $L^\alpha r$  et la fraction d'individus remplacés est choisie selon  $\nu_r^B$ .

On supposera que les conditions nécessaires sur  $\mu^S, \mu^B, \nu_r^S$  et  $\nu_r^B$  sont remplies, et on note  $\mathcal{A}^L$  le système de processus de Lévy coalescents décrivant la généalogie de  $n$  individus.

## Evolution à $L$ fixé

### Deux types d'événements :

**Petits év.** , donnés par un PPP  $\Pi_L^S$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{T}(L) \times \mathbb{R}_+$  d'intensité  $dt \otimes dx \otimes \mu^S$ . Si  $(t, x, r) \in \Pi_L^S$ , le centre de l'év. est  $x$ , son rayon  $r$  et la fraction d'individus remplacés est choisie selon  $\nu_r^S$ .

**Grands év.** , donnés par un PPP  $\Pi_L^B$  sur  $\mathbb{R} \times L^{-\alpha}\mathbb{T}(L) \times \mathbb{R}_+$  d'intensité  $\rho_L^{-1} dt \otimes dx \otimes \mu^B$ , indép. de  $\Pi_L^S$ . Si  $(t, x, r) \in \Pi_L^B$ , le centre de l'év. est  $L^\alpha x$ , son rayon  $L^\alpha r$  et la fraction d'individus remplacés est choisie selon  $\nu_r^B$ .

On supposera que les conditions nécessaires sur  $\mu^S, \mu^B, \nu_r^S$  et  $\nu_r^B$  sont remplies, et on note  $\mathcal{A}^L$  le système de processus de Lévy coalescents décrivant la généalogie de  $n$  individus.



## Evolution à $L$ fixé

### Deux types d'événements :

**Petits év.** , donnés par un PPP  $\Pi_L^S$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{T}(L) \times \mathbb{R}_+$  d'intensité  $dt \otimes dx \otimes \mu^S$ . Si  $(t, x, r) \in \Pi_L^S$ , le centre de l'év. est  $x$ , son rayon  $r$  et la fraction d'individus remplacés est choisie selon  $\nu_r^S$ .

**Grands év.** , donnés par un PPP  $\Pi_L^B$  sur  $\mathbb{R} \times L^{-\alpha}\mathbb{T}(L) \times \mathbb{R}_+$  d'intensité  $\rho_L^{-1} dt \otimes dx \otimes \mu^B$ , indép. de  $\Pi_L^S$ . Si  $(t, x, r) \in \Pi_L^B$ , le centre de l'év. est  $L^\alpha x$ , son rayon  $L^\alpha r$  et la fraction d'individus remplacés est choisie selon  $\nu_r^B$ .

On supposera que les conditions nécessaires sur  $\mu^S, \mu^B, \nu_r^S$  et  $\nu_r^B$  sont remplies, et on note  $\mathcal{A}^L$  le système de processus de Lévy coalescents décrivant la généalogie de  $n$  individus.



## Question

On pose pour  $n \geq 2$

$$\Gamma(L, n) \equiv \left\{ \{x_1, \dots, x_n\} \in \mathbb{T}(L)^n : |x_i - x_j| \geq \frac{L}{\log L}, \forall i \neq j \right\},$$

$$\Gamma_{\mathcal{A}}(L, n) \equiv \left\{ \{(a_1, x_{a_1}), \dots, (a_k, x_{a_k})\} \text{ part. marq. de } \{1, \dots, n\} \right. \\ \left. \text{t.q. } \{x_{a_1}, \dots, x_{a_k}\} \in \Gamma(L, k) \right\}.$$

A quoi ressemble la généalogie de  $n$  individus échantillonnés au temps  $t = 0$  aux sites  $\{x_1, \dots, x_n\} \in \Gamma(L, n)$ , lorsque  $L \rightarrow \infty$  ?

# Convergence de $\mathcal{A}^L : \alpha < 1$

## Théorème (BEV 2009)

On suppose  $\alpha < 1$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $A_L \in \Gamma_{\mathcal{A}}(L, n)$  ayant exactement  $n$  blocs pour tout  $L$ . Alors,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}_{A_L}}(\{\text{bl}(\mathcal{A}^L(\omega_L t)), t \geq 0\}) \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\varphi_n}}(\mathcal{K}), \quad L \rightarrow \infty,$$

où  $\text{bl}(A)$  est la partition induite par la partition marquée  $A$ ,  $\mathcal{K}$  est le *coalescent de Kingman* et

$$\omega_L \equiv \begin{cases} \frac{(1-\alpha)\rho_L L^2 \log L}{2\pi\sigma_B^2 L^{2\alpha}} & \text{si } \frac{L^{2\alpha}}{\rho_L} \rightarrow \infty, \\ \frac{(1-\alpha)L^2 \log L}{2\pi(\sigma_S^2 + b\sigma_B^2)} & \text{si } \frac{L^{2\alpha}}{\rho_L} \rightarrow b \in [0, \infty) \text{ et } \frac{L^{2\alpha} \log L}{\rho_L} \rightarrow \infty, \\ \frac{L^2 \log L}{2\pi\sigma_S^2} & \text{si } \left(\frac{L^{4\alpha}}{\rho_L}\right)_{L \in \mathbb{N}} \text{ borne ou } \frac{L^2 \log L}{\rho_L} \rightarrow 0. \end{cases}$$





## Coalescent de Kingman

### Définition

Le coalescent de Kingman  $\mathcal{K}$  est le processus markovien à valeurs dans les partitions de  $\mathbb{N}$  tel que sa restriction aux partitions de  $\{1, \dots, n\}$  est aussi un processus markovien évoluant de la manière suivante : chaque paire de blocs fusionne à taux 1, indépendamment les unes des autres, jusqu'à atteindre l'état final  $\{1, \dots, n\}$ .

Autrement dit, les taux de transition de  $\mathcal{K}$  sur les partitions de  $\{1, \dots, n\}$  sont donnés par : pour tout  $\pi \neq \pi'$ ,

$$q(\pi \rightarrow \pi') = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi' \subset_2 \pi, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

# Convergence of $\mathcal{A}^L : \alpha = 1$

## Théorème (BEV 2009)

On suppose  $\psi_L = cL$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{T}(1)$  distincts et  $(A_L)_{L \geq 1}$  comme précédemment.

i Si  $\rho_L L^{-2} \rightarrow b \in [0, \infty)$ ,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\varphi_n(Lx)}} \left( \left\{ \frac{1}{L} \mathcal{A}^L(\rho_L t), t \geq 0 \right\} \right) \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\varphi_n(x)}} (\bar{\mathcal{A}}^{\infty, b, c}).$$

ii Si  $\rho_L L^{-2} \rightarrow \infty$  et  $\frac{2\pi\sigma_S^2 \rho_L}{L^2 \log L} \rightarrow \beta \in [0, \infty)$ ,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}_{A_L}} \left( \left\{ \text{bl}(\mathcal{A}^L(\rho_L t)), t \geq 0 \right\} \right) \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\varphi_n}} (\Lambda^{\beta, c}).$$

iii Sinon, si on pose  $\omega_L = \frac{L^2 \log L}{2\pi\sigma_S^2}$ ,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}_{A_L}} \left( \left\{ \text{bl}(\mathcal{A}^L(\omega_L t)), t \geq 0 \right\} \right) \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\varphi_n}} (\mathcal{K}).$$

# Convergence of $\mathcal{A}^L : \alpha = 1$

## Théorème (BEV 2009)

On suppose  $\psi_L = cL$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{T}(1)$  distincts et  $(A_L)_{L \geq 1}$  comme précédemment.

i Si  $\rho_L L^{-2} \rightarrow b \in [0, \infty)$ ,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\varphi_n(L\mathbf{x})}} \left( \left\{ \frac{1}{L} \mathcal{A}^L(\rho_L t), t \geq 0 \right\} \right) \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\varphi_n(\mathbf{x})}} (\bar{\mathcal{A}}^{\infty, b, c}).$$

ii Si  $\rho_L L^{-2} \rightarrow \infty$  et  $\frac{2\pi\sigma_S^2 \rho_L}{L^2 \log L} \rightarrow \beta \in [0, \infty)$ ,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}_{A_L}} \left( \left\{ \text{bl}(\mathcal{A}^L(\rho_L t)), t \geq 0 \right\} \right) \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\varphi_n}} (\Lambda^{\beta, c}).$$

iii Sinon, si on pose  $\omega_L = \frac{L^2 \log L}{2\pi\sigma_S^2}$ ,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}_{A_L}} \left( \left\{ \text{bl}(\mathcal{A}^L(\omega_L t)), t \geq 0 \right\} \right) \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\varphi_n}} (\mathcal{K}).$$

# Convergence of $\mathcal{A}^L : \alpha = 1$

## Théorème (BEV 2009)

On suppose  $\psi_L = cL$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{T}(1)$  distincts et  $(A_L)_{L \geq 1}$  comme précédemment.

i Si  $\rho_L L^{-2} \rightarrow b \in [0, \infty)$ ,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\varphi_n(Lx)}} \left( \left\{ \frac{1}{L} \mathcal{A}^L(\rho_L t), t \geq 0 \right\} \right) \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\varphi_n(x)}} (\bar{\mathcal{A}}^{\infty, b, c}).$$

ii Si  $\rho_L L^{-2} \rightarrow \infty$  et  $\frac{2\pi\sigma_S^2 \rho_L}{L^2 \log L} \rightarrow \beta \in [0, \infty)$ ,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}_{A_L}} \left( \left\{ \text{bl}(\mathcal{A}^L(\rho_L t)), t \geq 0 \right\} \right) \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\varphi_n}} (\Lambda^{\beta, c}).$$

iii Sinon, si on pose  $\omega_L = \frac{L^2 \log L}{2\pi\sigma_S^2}$ ,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}_{A_L}} \left( \left\{ \text{bl}(\mathcal{A}^L(\omega_L t)), t \geq 0 \right\} \right) \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\varphi_n}} (\mathcal{K}).$$

# Convergence of $\mathcal{A}^L : \alpha = 1$

## Théorème (BEV 2009)

On suppose  $\psi_L = cL$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{T}(1)$  distincts et  $(A_L)_{L \geq 1}$  comme précédemment.

i Si  $\rho_L L^{-2} \rightarrow b \in [0, \infty)$ ,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\varphi_n(Lx)}} \left( \left\{ \frac{1}{L} \mathcal{A}^L(\rho_L t), t \geq 0 \right\} \right) \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\varphi_n(x)}} (\bar{\mathcal{A}}^{\infty, b, c}).$$

ii Si  $\rho_L L^{-2} \rightarrow \infty$  et  $\frac{2\pi\sigma_S^2 \rho_L}{L^2 \log L} \rightarrow \beta \in [0, \infty)$ ,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}_{A_L}} \left( \left\{ \text{bl}(\mathcal{A}^L(\rho_L t)), t \geq 0 \right\} \right) \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\varphi_n}} (\Lambda^{\beta, c}).$$

iii Sinon, si on pose  $\omega_L = \frac{L^2 \log L}{2\pi\sigma_S^2}$ ,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}_{A_L}} \left( \left\{ \text{bl}(\mathcal{A}^L(\omega_L t)), t \geq 0 \right\} \right) \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\varphi_n}} (\mathcal{K}).$$



## Processus limites

### Définition

Soit  $b \geq 0, c > 0$ .  $\bar{\mathcal{A}}^{\infty, b, c}$  est le processus markovien sur les partitions marquées (les marques appartenant à  $\mathbb{T}(1)$ ) défini de la manière suivante :

- Entre les grands év., l'étiquette de chaque bloc évolue selon la loi d'un mouvement brownien de vitesse  $b\sigma_s^2$  sur  $\mathbb{T}(1)$ , indépendamment des autres étiquettes.
- Les blocs sautent et fusionnent à cause des grands év. de reproduction (d'intensité  $dt \otimes dx \otimes \mu^B(dr)$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{T}(1/c) \times [0, \sqrt{2}/2]$ ).



## Processus limites

### Définition

Soit  $\beta \geq 0, c > 0$ .  $\Lambda^{\beta, c}$  est un coalescent à collisions multiples sur les partitions de  $\mathbb{N}$ , i.e. un processus markovien tel que sa restriction aux partitions de  $\{1, \dots, n\}$  est aussi markovienne, et dont les taux de transition sont associés à une mesure finie  $\Lambda$  sur  $[0, 1]$  par les relations :

$$q(\pi \rightarrow \pi') = \int_0^1 v^{k-2} (1-v)^{m-k} \Lambda(dv)$$

si  $\pi$  a  $m$  blocs et  $\pi' \subset_k \pi$  ( $k \geq 2$ ).

Ici,  $q(\pi \rightarrow \pi')$  est donné par  $(V_r = \text{Vol}(B_{\mathbb{T}(1)}(0, r)))$

$$c^{-2} \int_0^\infty \int_0^1 (V_{cr}u)^k (1 - V_{cr}u)^{m-k} \nu_r^B(du) \mu^B(dr) + \beta \delta_{\{k=2\}}.$$



## Temps de rencontre de 2 lignages

Soit  $(\ell^L)_{L \geq 1}$  une suite de processus de Lévy telle que pour chaque  $L$ ,  $\ell^L$  évolue sur  $\mathbb{T}(L)$  et  $\ell^L(1)$  a une matrice de covariance de la forme  $\sigma_L^2 \text{Id}$ . On suppose que

- il existe  $\sigma^2 > 0$  tel que  $\sigma_L^2 \rightarrow \sigma^2$  quand  $L \rightarrow \infty$  ;
- $\mathbb{E}_0 [|\ell^L(1)|^4]$  est borné indépendamment de  $L$ .

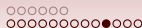
$T(R, \ell) \equiv$  temps d'entrée de  $\ell$  dans  $B(0, R)$ .

### Lemme

Si  $(d_L)_{L \geq 1}$  satisfait  $d_L \geq 1$  pour tout  $L$  et  $\frac{\log d_L}{\log L} \rightarrow \gamma \in [0, 1)$ , alors

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \sup_{t \geq 0} \sup_{x_L \in \Gamma(L, 1)} \left| \mathbb{P}_{x_L} \left[ T(d_L, \ell^L) > \frac{(1 - \gamma)L^2 \log L}{\pi \sigma^2} t \right] - e^{-t} \right| = 0.$$





## Le cas $\alpha < 1$ : 2 lignages

On note  $\xi_1^L$  et  $\xi_2^L$  les déplacements spatiaux de chaque lignage avant qu'ils ne fusionnent, et  $X^L(t) = \xi_1^L(t) - \xi_2^L(t)$ ,  $t \geq 0$ .

$X^L$  a la même loi que  $\xi^L(2t)$  jusqu'à son temps d'entrée  $T_L$  dans  $B(0, 2R^B L^\alpha)$ .

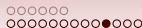
On applique le lemme précédent

- à  $\ell^L(t) = \frac{1}{L^\alpha} X^L(\rho_L t)$  si  $\rho_L \ll L^{2\alpha}$ .

$$\Rightarrow T_L \propto \frac{(1 - \alpha)\rho_L L^2 \log L}{2\pi\sigma_B^2 L^{2\alpha}}.$$

- à  $\ell^L(t) = \frac{1}{L^\alpha} X^L(L^{2\alpha} t)$  si  $\rho_L^{-1} L^{2\alpha} \rightarrow b \in [0, \infty)$ .

$$\Rightarrow T_L \propto \frac{(1 - \alpha)L^2 \log L}{2\pi(\sigma_S^2 + b\sigma_B^2)}.$$



## Le cas $\alpha < 1$ : 2 lignages

On note  $\xi_1^L$  et  $\xi_2^L$  les déplacements spatiaux de chaque lignage avant qu'ils ne fusionnent, et  $X^L(t) = \xi_1^L(t) - \xi_2^L(t)$ ,  $t \geq 0$ .

$X^L$  a la même loi que  $\xi^L(2t)$  jusqu'à son temps d'entrée  $T_L$  dans  $B(0, 2R^B L^\alpha)$ .

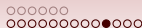
On applique le lemme précédent

- à  $\ell^L(t) = \frac{1}{L^\alpha} X^L(\rho_L t)$  si  $\rho_L \ll L^{2\alpha}$ .

$$\Rightarrow T_L \propto \frac{(1 - \alpha)\rho_L L^2 \log L}{2\pi\sigma_B^2 L^{2\alpha}}.$$

- à  $\ell^L(t) = \frac{1}{L^\alpha} X^L(L^{2\alpha} t)$  si  $\rho_L^{-1} L^{2\alpha} \rightarrow b \in [0, \infty)$ .

$$\Rightarrow T_L \propto \frac{(1 - \alpha)L^2 \log L}{2\pi(\sigma_S^2 + b\sigma_B^2)}.$$



## Le cas $\alpha < 1$ : 2 lignages

On note  $\xi_1^L$  et  $\xi_2^L$  les déplacements spatiaux de chaque lignage avant qu'ils ne fusionnent, et  $X^L(t) = \xi_1^L(t) - \xi_2^L(t)$ ,  $t \geq 0$ .

$X^L$  a la même loi que  $\xi^L(2t)$  jusqu'à son temps d'entrée  $T_L$  dans  $B(0, 2R^B L^\alpha)$ .

On applique le lemme précédent

- à  $\ell^L(t) = \frac{1}{L^\alpha} X^L(\rho_L t)$  si  $\rho_L \ll L^{2\alpha}$ .

$$\Rightarrow T_L \propto \frac{(1 - \alpha)\rho_L L^2 \log L}{2\pi\sigma_B^2 L^{2\alpha}}.$$

- à  $\ell^L(t) = \frac{1}{L^\alpha} X^L(L^{2\alpha} t)$  si  $\rho_L^{-1} L^{2\alpha} \rightarrow b \in [0, \infty)$ .

$$\Rightarrow T_L \propto \frac{(1 - \alpha)L^2 \log L}{2\pi(\sigma_S^2 + b\sigma_B^2)}.$$



## $\alpha < 1$ : temps de coalescence de deux lignages

$t_L$  = temps de fusion des deux lignages.

### Proposition

On suppose  $f(L) \rightarrow \infty$ .

i Si  $\rho_L \ll L^{2\alpha} \log L$  et  $\rho_L \ll L^{2\alpha} \log f(L)$ , alors

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \sup_{A_L} \mathbb{P}_{A_L} [t_L > f(L)\rho_L] = 0,$$

où le supremum est pris sur les  $A_L = \{(\{1\}, x_1^L), (\{2\}, x_2^L)\}$  tels que  $|x_1^L - x_2^L| \leq 2R^B L^\alpha$ .

ii

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \sup_{A'_L} \mathbb{P}_{A'_L} [t_L > f(L)] = 0,$$

où le sup. est cette fois sur les  $A'_L$  tels que  $|x_1^L - x_2^L| \leq 2R^s$ .



## Conclusion pour $\rho_L \ll L^{2\alpha} \log L$

- Les deux derniers résultats donnent la bonne échelle de temps à considérer.
- On montre ensuite que lorsque deux lignages fusionnent, les autres sont à distance  $\mathcal{O}(L)$  les uns des autres.
- Par symétrie, chaque paire de lignages a la même probabilité d'être la première à se rencontrer et fusionner.

On en conclut que les fusions ne peuvent être que binaires, sur l'échelle de temps  $\omega_L$  et qu'à la limite l'espace ne joue plus de rôle, d'où le coalescent de Kingman comme limite.



## Conclusion pour $\rho_L \ll L^{2\alpha} \log L$

- Les deux derniers résultats donnent la bonne échelle de temps à considérer.
- On montre ensuite que lorsque deux lignages fusionnent, les autres sont à distance  $\mathcal{O}(L)$  les uns des autres.
- Par symétrie, chaque paire de lignages a la même probabilité d'être la première à se rencontrer et fusionner.

On en conclut que les fusions ne peuvent être que binaires, sur l'échelle de temps  $\omega_L$  et qu'à la limite l'espace ne joue plus de rôle, d'où le coalescent de Kingman comme limite.



## Conclusion pour $\rho_L \ll L^{2\alpha} \log L$

- Les deux derniers résultats donnent la bonne échelle de temps à considérer.
- On montre ensuite que lorsque deux lignages fusionnent, les autres sont à distance  $\mathcal{O}(L)$  les uns des autres.
- Par symétrie, chaque paire de lignages a la même probabilité d'être la première à se rencontrer et fusionner.

On en conclut que les fusions ne peuvent être que binaires, sur l'échelle de temps  $\omega_L$  et qu'à la limite l'espace ne joue plus de rôle, d'où le coalescent de Kingman comme limite.



## Conclusion pour $\rho_L \ll L^{2\alpha} \log L$

- Les deux derniers résultats donnent la bonne échelle de temps à considérer.
- On montre ensuite que lorsque deux lignages fusionnent, les autres sont à distance  $\mathcal{O}(L)$  les uns des autres.
- Par symétrie, chaque paire de lignages a la même probabilité d'être la première à se rencontrer et fusionner.

On en conclut que les fusions ne peuvent être que binaires, sur l'échelle de temps  $\omega_L$  et qu'à la limite l'espace ne joue plus de rôle, d'où le coalescent de Kingman comme limite.





## Perspectives

- Les grands événements réduisent la taille effective de la population locale. **Comment distinguer leur effet d'autres scénarios** (sélection, bottlenecks) ? *Travail en cours avec A. Etheridge.*
- Processus  $\Lambda$ -Fleming-Viot spatial avec deux types et des rayons d'événements bornés : peut-on retrouver les résultats de **convergence vers le support du supermouvement brownien** obtenus par Cox, Durrett & Perkins (2000) pour le modèle du votant ?  
Comportement du processus lorsque la distribution des rayons a une queue lourde ? *Travail en cours avec A. Etheridge et N. Berestycki.*
- Rajouter des mutations, de la sélection (*travail en cours avec A. Etheridge et F. Yu*), un déplacement des individus, ...



Merci pour votre attention !