Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Analyse asymptotique spectrale de l'équation des ondes. Homogénéisation par ondes de Bloch

Grégoire ALLAIRE et Carlos CONCA

Résumé – Le but de cette Note et de la suivante est l'étude du comportement asymptotique du spectre de l'équation des ondes dans un milieu hétérogène périodique lorsque la période tend vers zéro. Dans cette première partie on introduit une méthode d'homogénéisation par ondes de Bloch qui nous permet de caractériser une partie du spectre de l'équation qui se concentre à l'origine et que les méthodes classiques d'homogénéisation ne captent pas lorsqu'on passe à la limite. Cette partie du spectre est connue sous le nom de *spectre de Bloch* et est formée de limites de suites renormalisées de valeurs propres dont l'ordre de grandeur est le carré de la période du milieu continu.

Asymptotic analysis of the wave equation spectrum. Bloch wave homogenization

Abstract – *This Note is devoted to the study of the asymptotic behaviour of the spectrum of the wave equation in a periodic heterogeneous medium as its period goes to zero. We introduce a method of Bloch wave homogenization that yields a characterization of part of the spectrum, concentrating near the origin, which cannot be obtained by classical homogenization methods. This part of the spectrum, the so-called* Bloch spectrum, *is made of limits of renormalized sequences of eigenvalues of the order of the square of the medium period.*

Abridged English Version – We consider the spectral problem for the wave equation in a bounded domain Ω occupied by a periodic heterogeneous medium, *i.e.*

$$-\operatorname{div}\left[A\left(x,\,\frac{x}{\varepsilon}\right)\operatorname{grad} v_\varepsilon\right] = \frac{1}{\lambda_\varepsilon}\, v_\varepsilon \quad \text{in } \Omega, \qquad v_\varepsilon = 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

where $A(x,\,y)$ is a smooth, coercive, symmetric, matrix which is Y-periodic in y (Y is the unit cube $[0,\,1]^N$). We denote by σ_ε the set of eigenvalues λ_ε. It is a discrete spectrum made of a countable sequence of eigenvalues converging to 0 [*see* (2) below]. As the period ε goes to 0, it is well-known that σ_ε converges to the spectrum σ of the homogenized problem

$$-\operatorname{div}\left[A^*(x)\operatorname{grad} v\right] = \frac{1}{\lambda}\, v \quad \text{in } \Omega, \qquad v = 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

where A^* is the usual homogenized matrix in the sense of [4]. However, this convergence result does not describe the asymptotic behavior of sequences of eigenvalues λ_ε that converge to 0.

We introduce a new method, called *Bloch wave homogenization method*, that allows to perform an asymptotic analysis of eigenvalues λ_ε converging to 0 as ε^2. It relies on a combination of the methods of two-scale convergence [2] and Bloch wave decomposition (*see* e.g. [9]). The goal of this series of Notes is to characterize the limit spectrum σ_∞ defined as the limit of $\varepsilon^{-2}\,\sigma_\varepsilon$ when ε goes to 0. We define a family of limit problems indexed by $x \in \bar{\Omega}$ and $\theta \in Y$ (θ is called the Bloch frequency)

$$-\operatorname{div}_y\left[A(x,\,y)\operatorname{grad}_y\left(v(y)\,e^{2\pi i\theta\cdot y}\right)\right] = \frac{1}{\lambda(x,\,\theta)}\, v(y)\, e^{2\pi i\theta\cdot y} \quad \text{in } Y,$$
$$y \mapsto v(y), \qquad Y\text{-periodic.}$$

Note présentée par Jacques-Louis LIONS.

0764-4442/95/03210293 $ 2.00 © Académie des Sciences

For each value of $(x, \theta) \in \bar{\Omega} \times Y$, it admits a spectrum made of a decreasing sequence of positive eigenvalues $\{ \lambda^k (x, \theta) \}_{k \geqq 1}$. Using the min-max principle, it is easily seen that each eigenvalue λ^k is a continuous function of (x, θ). Therefore, the so-called Bloch spectrum, *i.e.* the span of these eigenvalues as (x, θ) varies, is

$$\sigma_{\text{Bloch}} = \{ 0 \} \cup \bigcup_{k \geqq 1} [\min_{(x, \theta) \in \bar{\Omega} \times Y} \lambda^k (x, \theta), \max_{(x, \theta) \in \bar{\Omega} \times Y} \lambda^k (x, \theta)].$$

The main result of this Note is the following

THEOREM 1. – $\sigma_{\text{Bloch}} \subset \sigma_\infty = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-2} \sigma_\varepsilon$.

Usually σ_{Bloch} does not coincide with σ_∞. It is the purpose of a second Note to prove that they differ by a so-called "boundary layer" spectrum corresponding to sequences of eigenvectors v_ε concentrating on the boundary $\partial\Omega$. It turns out that ε^2 is a critical size for the order of magnitude of the eigenvalues, since any other scaling yields a simpler result.

THEOREM 2. – *Let* $a_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *be a sequence converging to* 0. *Assume that, either* $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1} a_\varepsilon = 0$, *or* $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1} a_\varepsilon = +\infty$. *Then* $\lim_{\varepsilon \to 0} (a_\varepsilon)^{-2} \sigma_\varepsilon = \mathbb{R}^+$.

A sketch of the proof of theorem 1 is given in section 3 of the french version of this Note. The interested reader is also refered to [3] where the Bloch wave homogenization method is applied to a different spectral problem.

---

1. INTRODUCTION. – L'étude de la propagation des ondes dans un milieu périodique hétérogène repose sur l'analyse de ses modes propres. Étant donné Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ occupé par un milieu hétérogène périodique de période $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, on cherche donc tous les couples $(\lambda_\varepsilon, v_\varepsilon) \in \mathbb{R}^+ \times H_0^1 (\Omega)$, $v_\varepsilon \not\equiv 0$, tels que

$$-\text{div} \left[A \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \text{grad}\, v_\varepsilon \right] = \frac{1}{\lambda_\varepsilon} v_\varepsilon \quad \text{dans } \Omega, \qquad v_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{1}$$

Les coefficients du milieu sont donnés par la matrice symétrique et coercive $A(x, y)$ que l'on suppose appartenir à $\mathcal{C}(\bar{\Omega}; L^\infty_\# (Y))$, *i.e.* continue dans la variable macroscopique x, et périodique dans la variable microscopique y appartenant à la période $Y = [0; 1]^N$.

Pour une période ε fixée, il est bien connu que l'étude du spectre de l'équation (1), c'est-à-dire de l'ensemble des valeurs propres λ_ε solutions de (1), est équivalente à l'étude du spectre de l'opérateur S_ε agissant dans $L^2(\Omega)$, défini, pour tout $f \in L^2(\Omega)$, par $S_\varepsilon f = u_\varepsilon$, où u_ε est la solution unique dans $H_0^1(\Omega)$ de

$$-\text{div} \left[A \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \text{grad}\, u_\varepsilon \right] = f \quad \text{dans } \Omega, \qquad u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

On démontre aisément que S_ε est un opérateur auto-adjoint compact de $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$. Son spectre, qu'on note σ_ε, est donc l'adhérence d'une suite dénombrable de valeurs propres positives qui tend vers 0, c'est-à-dire,

$$\sigma_\varepsilon = \{ 0 \} \cup \bigcup_{k \geqq 1} \{ \lambda_\varepsilon^k \} \qquad \text{avec} \quad \lambda_\varepsilon^1 \geqq \lambda_\varepsilon^2 \geqq \dots \geqq \lambda_\varepsilon^k \geqq \dots \to 0. \tag{2}$$

A chaque λ_ε^k on associe une fonction propre $v_\varepsilon^k \in L^2(\Omega)$ telle que $\| v_\varepsilon^k \|_{L^2(\Omega)} = 1$, et la famille $\{ v_\varepsilon^k \}_k$ est une base orthonormale de $L^2(\Omega)$.

Dans cette Note on s'intéresse au comportement asymptotique du spectre σ_ε lorsque la période ε tend vers 0. Cette question a déjà été étudiée, en utilisant les techniques classiques d'homogénéisation de [4], dans les références [5], [7], [8] et [11]. Leur résultat est le suivant : la suite d'opérateurs S_ε converge uniformément vers un opérateur limite S défini, pour tout $f \in L^2(\Omega)$, par $Sf = u$, où u est la solution unique dans $H_0^1(\Omega)$ de

$$-\mathrm{div}\,[A^*(x)\,\mathrm{grad}\,u] = f \quad \text{dans } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

avec $A^*(x)$ la matrice homogénéisée habituelle. L'opérateur S est bien sûr auto-adjoint compact, et son spectre σ est égal à $\{0\} \cup \bigcup_{k \geq 1} \{\lambda^k\}$, où les valeurs propres sont rangées par ordre décroissant et $\lim_{k \to +\infty} \lambda^k = 0$. De la convergence uniforme de S_ε et du principe du min-max, les auteurs précédents en déduisent que, pour tout $k \geqq 1$, $\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_\varepsilon^k = \lambda^k$. De plus, pour toute suite v_ε^k, il existe une sous-suite pour laquelle il existe v^k, vecteur propre de S correspondant à la valeur propre λ^k, tel que $v_\varepsilon^k \to v^k$ dans $L^2(\Omega)$ fortement.

Ce résultat, obtenu à k fixé, permet de montrer que $\lim_{\varepsilon \to 0} \sigma_\varepsilon = \sigma$. Cependant, si on fait tendre à la fois ε vers 0 et k vers $+\infty$, on construit ainsi des suites $\{\lambda_\varepsilon^{k(\varepsilon)}\}$ qui convergent vers 0 et dont les vecteurs propres associés ne convergent pas fortement mais faiblement vers 0 dans $L^2(\Omega)$. L'opérateur homogénéisé S ne permet donc pas d'étudier le comportement asymptotique de ces suites. Dans le cas où A ne dépend que de la variable microscopique y, une façon simple de construire de telles suites est d'homogénéiser (1) de manière non-standard. Dans un premier temps, par le changement d'échelle $x \mapsto y = x/\varepsilon$, on transforme le problème (1) en

$$\text{(3)} \quad -\mathrm{div}_y\,[A(y)\,\mathrm{grad}_y\,w_\varepsilon(y)] = \frac{\varepsilon^2}{\lambda_\varepsilon}\,w_\varepsilon(y) \quad \text{dans } \varepsilon^{-1}\Omega, \qquad w_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \varepsilon^{-1}\partial\Omega,$$

puis, dans un deuxième temps, on étudie la convergence d'une extension de l'opérateur de Green associé à (3) dans $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^N))$. On vérifie aisément que l'opérateur limite sera défini dans $\mathbb{R}^N$ tout entier, et que cette technique permet d'étudier la limite de $\varepsilon^{-2}\sigma_\varepsilon$. Finalement, la résolution spectrale du problème limite est obtenue explicitement à l'aide d'une décomposition en ondes de Bloch (pour cette notion, *voir*, par exemple, [4] ou le tome IV de [9]). Cette méthode d'homogénéisation non-standard est développée *in extenso* dans le chapitre III de [6] (on pourra aussi consulter le chapitre VII de [10]).

Le but de cette Note est d'étudier le comportement asymptotique des suites de valeurs propres $\{\lambda_\varepsilon\}$ de (1) qui tendent vers 0. En particulier, nous introduisons une nouvelle méthode *d'homogénéisation par ondes de Bloch*, basée sur la notion de convergence à deux échelles [2] et sur les ondes de Bloch, qui permet de généraliser et de compléter les résultats de [6], brièvement évoqués ci-dessus.

2. PRINCIPAUX RÉSULTATS. – On définit tout d'abord la « Γ-limite » dans $\mathbb{R}^+$ des ensembles $\varepsilon^{-2}\sigma_\varepsilon$, à savoir $\sigma_\infty = \{\lambda \in \mathbb{R}^+ \mid \exists\, \lambda_\varepsilon \in \sigma_\varepsilon \text{ tel que } \varepsilon^{-2}\lambda_\varepsilon \to \lambda\}$. Pour caractériser σ_∞, on introduit une famille d'opérateurs limites $S_{x,\theta}$ indicée par la variable macroscopique $x \in \bar{\Omega}$ et par la variable fréquentielle de Bloch $\theta \in [0, 1[^N$. Chacun de ses opérateurs $S_{x,\theta}$ appartient à $\mathcal{L}(L^2_\#(Y))$ et est défini, pour tout $\varphi(y) \in L^2_\#(Y)$, par $S_{x,\theta}\varphi = u_0$, où u_0 est la solution unique dans $H^1_\#(Y)$ de

$$\text{(4)} \qquad -\mathrm{div}_y\,[A(x, y)\,\mathrm{grad}_y\,(u^0(y)\,e^{2\pi i\theta\cdot y})] = \varphi(y)\,e^{2\pi i\theta\cdot y} \quad \text{dans } Y.$$

Dans le cas $\theta = 0$, il faut se restreindre aux fonctions à moyenne nulle pour donner un sens à (4). Pour chaque valeur des paramètres θ et x, $S_{x,\theta}$ est un opérateur auto-adjoint et compact dont le spectre $\sigma_{x,\theta}$ est l'adhérence d'une suite décroissante de valeurs propres positives qui tend vers 0, c'est-à-dire, $\sigma_{x,\theta} = \{0\} \cup \bigcup_{k \geqq 1} \{\lambda^k(x, \theta)\}$. A l'aide du principe du min-max, et grâce à la continuité en x de la matrice $A(x, y)$, il est facile de montrer que, pour k fixé, la valeur propre $\lambda^k(x, \theta)$ est une fonction continue de $(x, \theta) \in \bar{\Omega} \times Y$. On définit alors le spectre de Bloch σ_{Bloch} comme la réunion de tous les spectres $\sigma_{x,\theta}$, autrement dit

$$\sigma_{\mathrm{Bloch}} = \{0\} \cup \bigcup_{k \geqq 1} [\min_{(x,\theta) \in \bar{\Omega} \times Y} \lambda^k(x, \theta), \max_{(x,\theta) \in \bar{\Omega} \times Y} \lambda^k(x, \theta)].$$

Le résultat principal de cette Note est le suivant :

THÉORÈME 1. – $\sigma_{\mathrm{Bloch}} \subset \sigma_\infty = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-2} \sigma_\varepsilon$.

Ce résultat indique que, lorsque ε tend vers 0, la partie du spectre de S_ε de l'ordre de grandeur de ε^2 a tendance à se densifier et à former un spectre continu ayant une structure de bandes. La méthode d'homogénéisation par ondes de Bloch, introduite dans la section suivante pour démontrer le théorème 1, permet en fait d'obtenir des résultats plus forts, comme la convergence des familles spectrales. En général, il n'y a pas égalité entre σ_∞ et σ_{Bloch}. Dans une deuxième Note, nous montrerons que σ_∞ est la réunion de σ_{Bloch} et d'un spectre σ_{bord}, dit de « couche limite », constitué des limites de suites $\{\varepsilon^{-2} \lambda_\varepsilon\}$ où λ_ε est valeur propre de (1) associée à un vecteur propre v_ε qui se concentre sur le bord de $\partial\Omega$ lorsque ε tend vers 0.

Dans ce qui précède, l'ordre de grandeur en ε^2 des valeurs propres λ_ε peut s'interpréter comme une taille critique. En effet, l'étude des suites de σ_ε, convergeant vers 0 avec une vitesse différente de ε^2, conduit à un résultat beaucoup plus simple.

THÉORÈME 2. – *Soit* $a_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *une suite qui converge vers* 0 *lorsque* ε *tend vers* 0. *On suppose que, soit* $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1} a_\varepsilon = 0$, *soit* $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1} a_\varepsilon = +\infty$. *Alors on a* $\lim_{\varepsilon \to 0} (a_\varepsilon)^{-2} \sigma_\varepsilon = \mathbb{R}^+$.

3. HOMOGÉNÉISATION PAR ONDES DE BLOCH. – Pour étudier les valeurs propres de l'ordre de grandeur de ε^2, on commence par réécrire (1) sous la forme : trouver $(\mu_\varepsilon, v_\varepsilon) \in \mathbb{R}^+ \times H_0^1(\Omega)$, $v_\varepsilon \not\equiv 0$, tels que

$$(5) \qquad -\varepsilon^2 \operatorname{div}\left[A\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \operatorname{grad} v_\varepsilon\right] + v_\varepsilon = \frac{1}{\mu_\varepsilon} v_\varepsilon \quad \text{dans } \Omega, \qquad v_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Cette transformation de (1) en (5) laisse invariant les vecteurs propres, et change les valeurs propres λ_ε^k en $\mu_\varepsilon^k = \lambda_\varepsilon^k / (\varepsilon^2 + \lambda_\varepsilon^k)$, ce qui permet d'avoir $\mu_\varepsilon \sim 1$ si $\lambda_\varepsilon \sim \varepsilon^2$.

On associe à (5) un nouvel opérateur $\tilde{S}_\varepsilon \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ défini par $\tilde{S}_\varepsilon f = u_\varepsilon$ solution unique dans $H_0^1(\Omega)$ de

$$(6) \qquad -\varepsilon^2 \operatorname{div}\left[A\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \operatorname{grad} u_\varepsilon\right] + u_\varepsilon = f \quad \text{dans } \Omega, \qquad u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

On montre facilement que u_ε, qui a tendance à osciller lorsque ε tend vers 0, ne converge que faiblement vers sa limite, f, dans $L^2(\Omega)$. Afin d'obtenir des résultats de convergence forte, nous allons prolonger l'opérateur $\tilde{S}_\varepsilon$ en plongeant l'espace $L^2(\Omega)$ dans un espace de fonctions « oscillantes » à deux échelles. Pour tout entier $K \geqq 1$, on note KY le cube $[0, K]^N$, et on définit un prolongement $S_\varepsilon^K \in \mathcal{L}(L^2(\Omega; L_\#^2(KY)))$ par $S_\varepsilon^K = E_\varepsilon^K \tilde{S}_\varepsilon P_\varepsilon^K$, où P_ε^K et E_ε^K sont respectivement un opérateur de projection de $L^2(\Omega; L_\#^2(KY))$ sur

$L^2(\Omega)$ et un opérateur d'extension de $L^2(\Omega)$ à $L^2(\Omega;\, L^2_\#(KY))$. Afin que S^K_ε soit encore auto-adjoint, on impose que P^K_ε et E^K_ε soient adjoints l'un de l'autre. Pour que les opérateurs $\tilde{S}_\varepsilon$ et S^K_ε aient le même spectre, noté $\tilde{\sigma}_\varepsilon$, on impose de plus que le produit $P^K_\varepsilon\, E^K_\varepsilon$ soit l'identité dans $L^2(\Omega)$. Ces conditions sont satisfaites pour le choix suivant

$$\forall \varphi \in L^2(\Omega;\, L^2_\#(KY)),\quad (P^K_\varepsilon\, \varphi)(x) = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \chi^\varepsilon_i(x)\,(K\varepsilon)^{-N} \int_{Y^\varepsilon_i} \varphi\left(x',\, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx',$$

$$\forall f \in L^2(\Omega),\quad (E^K_\varepsilon\, f)(x,\, y) = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \chi^\varepsilon_i(x)\, f(x^\varepsilon_i + \varepsilon\, y),$$

où la famille $(Y^\varepsilon_i)_{1 \leqq i \leqq n(\varepsilon)}$ est un recouvrement de Ω en pavés du type $[0;\, K\,\varepsilon]^N$, χ^ε_i est la fonction caractéristique du pavé Y^ε_i et x^ε_i est son origine.

THÉORÈME 3. – *La suite S^K_ε converge fortement vers un opérateur limite S^K, au sens où, pour tout $\varphi(x,\, y) \in L^2(\Omega;\, L^2_\#(KY))$, $S^K_\varepsilon\, \varphi$ converge fortement vers $S^K\, \varphi$ dans $L^2(\Omega;\, L^2_\#(KY))$, et $S^K\, \varphi = u^K$ est la solution unique dans $L^2(\Omega;\, H^1_\#(KY))$ de*

$$(7) \qquad -\mathrm{div}_y\,[A(x,\, y)\,\mathrm{grad}_y\, u^K] + u^K = \varphi \quad dans \quad \Omega \times KY.$$

De plus, l'opérateur S^K est auto-adjoint, mais pas compact dans $L^2(\Omega;\, L^2_\#(KY))$.

La convergence de S^K_ε vers S^K ne peut être uniforme puisque S^K_ε est compact, mais pas S^K. On doit donc se contenter de déduire du théorème 3 un résultat de semicontinuité inférieur du spectre qui se démontre aisément.

COROLLAIRE 4. – *Soit σ_K le spectre de S^K. Pour tout entier $K \geqq 1$, $\sigma_K \subset \lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{\sigma}_\varepsilon$.*

Preuve du théorème 3. – Soit une suite $\psi_\varepsilon(x,\, y)$ qui converge faiblement vers $\psi(x,\, y)$ dans $L^2(\Omega;\, L^2_\#(KY))$. Pour tout $\varphi \in L^2(\Omega;\, L^2_\#(KY))$, il faut montrer que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \int_{KY} (S^K_\varepsilon\, \varphi)\, \psi_\varepsilon\, dx\, dy = \int_\Omega \int_{KY} (S^K\, \varphi)\, \psi\, dx\, dy.$$

Or, par définition de S^K_ε, on a

$$(8) \quad \frac{1}{K^N} \int_\Omega \int_{KY} (S^K_\varepsilon\, \varphi)\, \psi_\varepsilon\, dx\, dy = \int_\Omega (\tilde{S}_\varepsilon\, P^K_\varepsilon\, \varphi)\, ((E^K_\varepsilon)^*\, \psi_\varepsilon)\, dx = \int_\Omega u_\varepsilon\, (P^K_\varepsilon\, \psi_\varepsilon)\, dx,$$

où u_ε est la solution de (6) avec $f = P^K_\varepsilon\, \varphi$. A l'aide de la notion de convergence à deux échelles [2], on peut montrer que la suite u_ε converge fortement à deux échelles vers u^K solution de (7), tandis que la suite $P^K_\varepsilon\, \psi_\varepsilon$ converge faiblement à deux échelles vers ψ. On peut alors passer à la limite dans (8) pour obtenir

$$\frac{1}{K^N} \int_\Omega \int_{KY} u^K\, \psi\, dx\, dy = \frac{1}{K^N} \int_\Omega \int_{KY} (S^K\, \varphi)\, \psi\, dx\, dy,$$

ce qui démontre le résultat (*voir* [3] pour une démonstration complète dans un cas voisin).

Pour expliciter le spectre limite σ_K, on utilise une décomposition en ondes de Bloch de $L^2_\#(KY)$ [1] qui permet de factoriser l'opérateur S^K.

LEMME 5. – *Pour toute fonction $\varphi(y) \in L^2_\#(KY)$ il existe une unique famille $\{\varphi_j(y)\} \in L^2_\#(Y)^{K^N}$, où j est un multi-indice dont chacune des N composantes* *appartient à* $\{0, \ldots, K-1\}$, *telle que*

$$\varphi(y) = \sum_{0 \leqq j \leqq K-1} \varphi_j(y)\, e^{2\pi i (j \cdot y/K)} \quad et \quad \frac{1}{K^N} \int_{KY} |\varphi|^2 \, dy = \sum_{0 \leqq j \leqq K-1} \int_Y |\varphi_j|^2 \, dy.$$

Cette décomposition définit une isométrie unitaire $\mathcal{B}$ *de* $L^2_\#(KY)$ *dans* $L^2_\#(Y)^{K^N}$.

THÉORÈME 6. – *L'opérateur* S^K *se diagonalise en* $S^K = \mathcal{B}^* T^K \mathcal{B}$ *avec* $T^K = \mathrm{diag}\,[(T_{j/K})_{0 \leqq j \leqq K-1}]$, *où, pour chaque fréquence de Bloch* $\theta = j/K$, T_θ *est défini dans* $\mathcal{L}(L^2(\Omega; L^2_\#(Y)))$ *par* $T_\theta \varphi = u^0$, *avec* $u^0(x, y)$ *la solution unique dans* $L^2(\Omega; H^1_\#(Y))$ *de*

$$-\mathrm{div}_y\,[A(x, y)\,\mathrm{grad}_y\,(u^0\, e^{2\pi i \theta \cdot y})] + u^0\, e^{2\pi i \theta \cdot y} = \varphi\, e^{2\pi i \theta \cdot y} \quad dans \quad \Omega \times Y.$$

On reconnaît dans les opérateurs T_θ une transformation simple des opérateurs $S_{x,\theta}$ définis dans la deuxième section. Pour finir la démonstration du théorème 1, il suffit de prouver la continuité en (x, θ) des valeurs propres de $S_{x,\theta}$, et de remarquer que, lorsque K tend vers l'infini, l'ensemble discret des fréquences de Bloch j/K devient dense dans Y. La démonstration complète sera donnée dans un prochain article. Signalons cependant que cette méthode d'homogénéisation par ondes de Bloch a déjà été appliquée à un problème spectral légèrement différent dans [3] où on trouvera des démonstrations complètes.

Note remise le 5 avril 1995, acceptée le 15 mai 1995.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] F. AGUIRRE et C. CONCA, Eigenfrequencies of a tube bundle immersed in a fluid, *Appl. Math. Optim.*, 18, 1988, p. 1-38.

[2] G. ALLAIRE, Homogenization and two-scale convergence, *SIAM J. Math. Anal.*, 23, 1992, p. 1482-1518.

[3] G. ALLAIRE et C. CONCA, Bloch wave homogenization for a spectral problem in fluid-solid structures, *Arch. Rational Mech. Anal.* (à paraître).

[4] A. BENSOUSSAN, J.-L. LIONS et G. PAPANICOLAOU, *Asymptotic analysis for periodic structures*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[5] L. BOCCARDO et P. MARCELLINI, Sulla convergenza delle soluzioni di disequazioni variazionali, *Ann. Mat. Pura Appl.* 4, 1977, p. 137-159.

[6] C. CONCA, J. PLANCHARD et M. VANNINATHAN, *Fluids and periodic structures*, Collection RMA, J. Wiley et Masson, Paris (à paraître).

[7] S. KESAVAN, Homogenization of elliptic eigenvalue problems, *Appl. Math. Optim.*, 5, 1979, Part I, p. 153-167; Part II, p. 197-216.

[8] O. OLEINIK, A. S. SHAMAEV et G. A. YOSIFIAN, On the limiting behaviour of a sequence of operators defined in different Hilbert's spaces, *Uspekhi Math. Nauk*, 44, 1989, p. 157-158.

[9] M. REED et B. SIMON, *Methods of modern mathematical physics*, Academic Press, New York, 1978.

[10] J. SÁNCHEZ-HUBERT et E. SÁNCHEZ-PALENCIA, *Vibration and coupling of continuous systems. Asymptotic methods*, Springer Verlag, New York, 1989.

[11] M. VANNINATHAN, Homogenization of eigenvalue problems in perforated domains, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 90, 1981, p. 239-271.

G. A. : Commissariat à l'Énergie Atomique,
DRN/DMT/SERMA, CE Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette, France
et Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris-VI, 75232 Paris, France;
C. C. : Universidad de Chile,
Departamento de Ingeniería Matemática, Casilla 170/3, Correo 3, Santiago, Chile.