Ecole Polytechnique **Promotion 2014**

MAP 411 – Approximation numérique et optimisation.

Contrôle de connaissances.

Le 20 janvier 2016.

Sujet proposé par P. Moireau.

Exercice 1 : Étude du schéma de Newmark par méthode énergétique (8 pts)

On s'intéresse à l'approximation numérique par différences finies de l'équation des ondes. Cette équation s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x) \end{cases} \tag{1}$$

où l'inconnue est une fonction $u(x,t) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La vitesse $c \in R^*$ est une constante non nulle. Les fonctions u_0 et v_0 sont supposées régulières à support compact. On admet que ce problème admet une unique solution u suffisamment régulière qui, en tout temps, est à support compact.

Question 1.

Écrire le système du premier ordre en temps vérifié par le couple $\left(u, v = \dfrac{\partial u}{\partial t}\right)$.

Corrigé de la question 1 :

Considérant la vitesse v donnée par $v = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, nous pouvons réécrire (1) sous la forme d'un système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}(x,t) - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}(x,t) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}(x,0) = \begin{bmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{2}$$

Question 2.

Démontrer que l'énergie

$$t \mapsto \mathcal{E}(t) = \int_{\mathbb{R}} \Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2 dx + c^2 \int_{\mathbb{R}} \Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2 dx,$$

est constante au cours du temps.
Indication : A partir du système obtenu à la question 1, on pourra multiplier la seconde équation du système par v et intégrer sur $\mathbb{R}$.

Corrigé de la question 2 :

En multipliant (1) par la vitesse $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ et on intégrant sur $\mathbb{R}$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 dx - c^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = 0.$$

La solution est supposée à support compact pour tout temps. Ainsi, en intégrant par partie le second terme de cette identité, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 dx + c^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 dx + c^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 dx = 0.$$

qui donne bien

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0.$$

On introduit un maillage uniforme de la droite réelle à l'aide d'un pas d'espace $h > 0$. On pose $x_j = jh$ pour $j \in \mathbb{Z}$. A chaque fonction $u(x)$ de $L^2(\mathbb{R})$, on associera alors une suite $u_h = (u_j)_j$ de carré sommable

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |u_j|^2 < +\infty.$$

et telle que

$$u(x_j) = u_j.$$

On notera $l^2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des suites de carré sommable. C'est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\forall u_h = (u_j)_j \in l^2(\mathbb{Z}), \quad \forall v_h = (v_j)_j \in l^2(\mathbb{Z}), \quad \langle u_h, v_h\rangle_{l^2} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} u_i v_i.$$

A partir de ces définitions, on définit le schéma dit de Newmark *par :*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{v_j^n + v_j^{n+1}}{2} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \Big(A_h\big(\frac{u_h^{n+1} + u_h^n}{2}\big)\Big)_j = 0, \tag{4}$$

où A_h est l'opérateur aux différences finies défini par

$$\forall w_h = (w_j)_j \in l^2(\mathbb{Z}), \quad (A_h w_h)_j = -\frac{c^2}{h}\left(\frac{w_{j+1} - w_j}{h} - \frac{w_j - w_{j-1}}{h}\right).$$

On admettra que ce schéma admet pour tout n et pour tout couple (u_h^n, v_h^n) un unique couple solution (u_h^{n+1}, v_h^{n+1}).

Question 3.

Montrer que ce schéma est consistant d'ordre 2 en temps et en espace.
Indication : on veillera à effectuer les développements autour du couple $u(jh, (n + \frac{1}{2})\Delta t)$ et $v(jh, (n + \frac{1}{2})\Delta t)$.

Corrigé de la question 3 :

Nous allons démontrer la consistance de chaque équation du système autour du couple

$$u(jh, (n + \tfrac{1}{2})\Delta t) \text{ et } v(jh, (n + \tfrac{1}{2})\Delta t).$$

On note pour simplifier $U_j^n = u(jh, n\Delta t)$ et $V_j^n = v(jh, n\Delta t)$.
Commençons par rappeler que

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= U_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{(\Delta t)^2}{8}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}\big((\Delta t)^3\big), \\ U_j^n &= U_j^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{(\Delta t)^2}{8}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}\big((\Delta t)^3\big), \end{aligned}$$

et des relations similaires pour V_j^{n+1} et V_j^n. Ainsi

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} - \frac{V_j^n + V_j^{n+1}}{2} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^{n+\frac{1}{2}} - V_j^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}\big(\Delta t^2\big).$$

Intéressons nous maintenant à un terme éventuel du type $A_h U_h^{n+\frac{1}{2}}$. On rapelle que

$$\begin{aligned} U_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} &= U_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{8}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}\big(h^3\big), \\ U_{j-1}^{n+\frac{1}{2}} &= U_j^{n+\frac{1}{2}} - \frac{h}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{8}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}\big(h^3\big), \end{aligned}$$

donc

$$(A_h U_h^{n+\frac{1}{2}})_j = -c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}\big(h^2\big).$$

En remarquant par ailleurs que, pour tout j,

$$\frac{U_j^{n+1} + U_j^n}{2} = U_j^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}\big(\Delta t^2\big),$$

on a donc

$$\Big(A_h\big(\frac{U_h^{n+1}+U_h^n}{2}\big)\Big)_j = -c^2\big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\big)_j^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}\big(\Delta t^2 + h^2\big).$$

Finalement on obtient

$$\frac{V_j^{n+1}-V_j^n}{\Delta t} + \Big(A_h\big(\frac{U_h^{n+1}+U_h^n}{2}\big)\Big)_j = \big(\frac{\partial v}{\partial t}\big)_j^{n+\frac{1}{2}} - c^2\big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\big)_j^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta t^2 + h^2).$$

Le schéma est donc d'ordre 2 en temps et en espace.

Question 4.

Démontrer que A_h est un opérateur symétrique et positif pour le produit scalaire $l^2(\mathbb{Z})$ c'est à dire

$$\forall v_h = (v_j)_j,\ w_h = (w_j)_j \in l^2(\mathbb{Z}), \quad \langle v_h, A_h w_h\rangle_{l^2} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} (A_h w_h)_j v_j = \langle w_h, A_h v_h\rangle_{l^2},$$

et

$$\forall u_h = (u_j)_j \in l^2(\mathbb{Z}), \quad \langle u_h, A_h u_h\rangle_{l^2} \geq 0.$$

Corrigé de la question 4 :

Pour démontrer la symétrie et la positivité on considère $\forall v_h = (v_j)_j,\ w_h = (w_j)_j \in l^2(\mathbb{Z})$,

$$\begin{aligned}\langle v_h, A_h w_h\rangle_{l^2} &= \sum_j -\frac{c^2}{h}\left[\frac{w_{j+1}-w_j}{h} - \frac{w_j - w_{j-1}}{h}\right] v_j \\ &= \frac{c^2}{h}\sum_j \left[-\frac{w_{j+1}-w_j}{h} v_j\right] + \frac{c^2}{h}\sum_j \left[\frac{w_j - w_{j-1}}{h} v_j\right].\end{aligned}$$

La sommation s'effectuant sur $\mathbb{Z}$, on peut alors décaler les indices dans la deuxième sommation afin d'obtenir

$$\begin{aligned}\langle v_h, A_h w_h\rangle_{l^2} &= \frac{c^2}{h}\sum_j \left[-\frac{w_{j+1}-w_j}{h} v_j\right] + \frac{c^2}{h}\sum_j \left[\frac{w_{j+1}-w_j}{h} v_{j+1}\right] \\ &= \frac{c^2}{h}\sum_j \left[-\frac{w_{j+1}-w_j}{h} v_j\right] + \frac{c^2}{h}\sum_j \left[\frac{w_{j+1}-w_j}{h} v_{j+1}\right] \\ &= c^2 \sum_j \left[\left(\frac{w_{j+1}-w_j}{h}\right)\left(\frac{v_{j+1}-v_j}{h}\right)\right].\end{aligned}$$

Question 5.

On définit la suite

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto \mathcal{E}^n = \frac{1}{2}||v_h^n||_{l^2}^2 + \frac{1}{2}(u_h^n, A_h u_h^n)_{l^2}.$$

Démontrer que pour toute solution de (3-4)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{E}^{n+1} = \mathcal{E}^n.$$

Indication : on pourra procéder comme à la question 1 en multipliant (4)*, par une suites discrète bien choisie représentant* v*.*

Corrigé de la question 5 :

En prenant le produit scalaire de l'expression (4) avec v_h on a

$$\frac{1}{2\Delta t}||v_h^{n+1}||_{l^2}^2 - ||v_h^n||_{l^2}^2 + \left\langle \frac{v_h^{n+1} + v_h^n}{2}, A_h\Big(\frac{u_h^{n+1} + u_h^n}{2}\Big) \right\rangle_{l^2} = 0.$$

De plus, par (3), on a

$$\frac{1}{2\Delta t}||v_h^{n+1}||_{l^2}^2 - ||v_h^n||_{l^2}^2 + \left\langle \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t}, A_h\Big(\frac{u_h^{n+1} + u_h^n}{2}\Big) \right\rangle_{l^2} = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2\Delta t}||v_h^{n+1}||_{l^2}^2 - ||v_h^n||_{l^2}^2 + \frac{1}{2\Delta t}\Big(\langle u_h^{n+1}, A_h u_h^{n+1}\rangle_{l^2} - \langle u_h^n, A_h u_h^n\rangle_{l^2}\Big) = 0,$$

soit le résultat escompté.

Question 6.

Démontrer que toute solution de (3-4) vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad ||v_h^n||_{l^2} \leq \sqrt{2\mathcal{E}^0},$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad ||u_h^n||_{l^2} \leq ||u_h^0||_{l^2} + n\Delta t\sqrt{2\mathcal{E}^0}.$$

Corrigé de la question 6 :

La conservation de l'énergie obtenue à la question précédente nous donne

$$\forall n,\ \frac{1}{2}||v_h^n||_{l^2}^2 \leq \mathcal{E}_n = \mathcal{E}_0,$$

soit la première inégalité de stabilité. Pour la stabilité de u_h^n, il suffit d'utiliser la relation (3) qui nous donne

$$||u_h^{n+1}||_{l^2} \leq ||u_h^n||_{l^2} + \frac{\Delta t}{2}\left[||v_h^n||_{l^2} + ||v_h^{n+1}||_{l^2}\right],$$

puis l'inégalité obtenue pour $||v_h^n||_{l^2}$:

$$||u_h^{n+1}||_{l^2} \leq ||u_h^n||_{l^2} + \Delta t\sqrt{2\mathcal{E}_0}.$$

Par récurrence, on obtient :

$$\forall n, \quad ||u_h^n||_{l^2} \leq ||u_h^0||_{l^2} + n\Delta t\sqrt{2\mathcal{E}_0}.$$

Question 7.

Que pouvez vous en conclure sur la convergence du schéma de Newmark ?

Corrigé de la question 7 :

Nous avons démontré la consistance et la stabilité donc en reprenant la démonstration du théorème de Lax 2.2.17, nous pouvons prouver la convergence du schéma de Newmark.

Exercice 2 : Pénalisation dans les problèmes aux limites (7 pts)

Soit $f \in C^1([0,1])$ *telle que*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

On considère l'espace $V = C^1([0,1])$*, muni du produit scalaire de* $L^2(0,1)$

$$\forall u, v \in V, \quad \langle u, v\rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^1 uv\,dx.$$

On cherche à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) & = f(x), \quad x \in (0,1) \\ u'(0) & = 0, \\ u'(1) & = 0. \end{cases} \tag{5}$$

où l'inconnue est une fonction $u \in C^2([0,1])$*. On admet que ce problème admet au moins une solution.*

Question 1.

Déterminer la formulation variationnelle associée à (5).

Corrigé de la question 1 :

Soit u solution de (5). Alors pour tout $v \in V$ on a

$$\int_0^1 -u''(x)v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Par intégration par parties on a

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx - \Big[u'v'\Big]_0^1 = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

D'après les conditions aux limites donnée en (5), u est solution de la formulation variationelle suivante :

$$\forall v \in V, \quad \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Question 2.

Démontrer qu'il existe une infinité de solutions au problème (5).
Indication : On pourra notamment ajouter une constante sur une éventuelle solution du problème.

Corrigé de la question 2 :

Soit u une solution de (5), alors pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction

$$x \mapsto u(x) + c,$$

est aussi solution de (5).

Question 3.

Etablir qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall v \in V, \quad \|v\|_{L^2(0,1)} \leq c\Big(\|v'\|_{L^2(0,1)} + \Big|\int_0^1 v(x)\,dx\Big|\Big).$$

Indication : On pourra pour cela écrire

$$v(y) = \int_x^y v'(z)\,dz + v(x).$$

Corrigé de la question 3 :

Soit $v \in V$, on intègre l'identité

$$v(y) = \int_x^y v'(z)dz + v(x),$$

sur $[0,1]$ par rapport à la variable x, on obtient

$$v(y) = \int_0^1 \int_x^y v'(z)\,dz\,dx + \int_0^1 v(x)\,dx.$$

On en déduit donc par inégalité triangulaire puis par inégalité de Cauchy–Schwarz

$$|v(y)| \leq \int_0^1 |v'(x)|\,dx + \left|\int_0^1 v(x)\,dx\right| \leq \left(\int_0^1 |v'(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left|\int_0^1 v(x)\,dx\right|$$

Enfin par inégalité triangulaire sachant que $\|v'\|_{L^2(0,1)}$ et $\int_0^1 v(x)\,dx$ sont des contantes.

$$\|v\|_{L^2(0,1)} \leq \left(\|v'\|_{L^2(0,1)} + \left|\int_0^1 v(x)\,dx\right|\right).$$

Question 4.

Soit

$$V_m = \left\{ u \in C^1([0,1]) \;\Big|\; \int_0^1 u = 0 \right\}.$$

Démontrer qu'il existe au plus une solution $\bar{u} \in V_m$ du problème (5).

Corrigé de la question 4 :

Soit $\bar{u}_1 \in V_m$ et $\bar{u}_2 \in V_m$ deux solutions du problème (5). Alors $\tilde{u} = \bar{u}_1 - \bar{u}_2 \in V_m$ vérifie

$$\forall v \in V, \quad \int_0^1 \tilde{u}'(x)v'(x)\,dx = 0.$$

En considérant $v = \tilde{u} \in V_m \subset V$, on a alors

$$\int_0^1 |\tilde{u}'(x)|^2 \, dx = 0.$$

par ailleurs $\int_0^1 \tilde{u}(x) \, dx = 0$ donc d'après la question 3

$$\int_0^1 |\tilde{u}(x)|^2 \, dx = 0,$$

qui assure que $\tilde{u}$ est nulle, ce qu'il fallait démontrer.

Le problème (5) *est difficile à résoudre dans V_m par la méthode des éléments finis de Lagrange car les fonctions de bases ne sont pas dans V_m. Nous allons contourner cette difficulté en introduisant des problèmes alternatifs.*

Question 5.

Soit $\epsilon \in (0,1]$. On considère la formulation variationnelle

$$\forall v \in V, \quad \int_0^1 u_\epsilon' v' \, dx + \epsilon \int_0^1 u_\epsilon v \, dx = \int_0^1 f v \, dx. \tag{6}$$

où l'inconnue est $u_\epsilon \in V$. On suppose qu'il existe au moins une solution à (6).
a. Démontrer l'unicité de la solution $u_\epsilon \in V$.
b. Démontrer que $u_\epsilon \in V_m$
c. Démontrer qu'il existe c, indépendante de ϵ, telle que

$$\|u_\epsilon\|_{L^2(0,1)} \leq c \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Indication : On pourra utiliser la question 3 et s'inspirer du lemme de Céa

Corrigé de la question 5 :

a. Soit $\bar{u}_1 \in V$ et $\bar{u}_2 \in V$ deux solutions du problème (6). Alors $\tilde{u} = \bar{u}_1 - \bar{u}_2 \in V$ vérifie

$$\forall v \in V, \quad \int_0^1 \tilde{u}' v' \, dx + \epsilon \int_0^1 \tilde{u} v \, dx = 0.$$

En considérant $v = \tilde{u} \in V$, on a alors notamment

$$\int_0^1 |\tilde{u}(x)|^2 \, dx = 0$$

qui assure que $\tilde{u}$ est nulle, ce qu'il fallait démontrer.

b. On injecte la fonction test $v = 1$, dans (6) pour obtenir

$$\epsilon \int_0^1 u_\epsilon(x)\, dx = 0.$$

Donc $u_\epsilon \in V$ avec $\int_0^1 u_\epsilon(x)\, dx = 0$ qui implique que $u_\epsilon \in V_m$.
c. On choisit cette fois $v = u_\epsilon$ comme fonction test. On obtient alors que

$$\int_0^1 |u'_\epsilon|^2\, dx \leq \int_0^1 f u_\epsilon\, dx \leq \|f\|_{L^2(0,1)} \|u_\epsilon\|_{L^2(0,1)},$$

Ainsi

$$\|u'_\epsilon\|^2_{L^2(0,1)} \leq \|f\|_{L^2(0,1)} \|u_\epsilon\|_{L^2(0,1)}.$$

D'après la question 3, on sait qu'il existe c indépendant de ϵ tel que

$$\|u_\epsilon\|^2_{L^2(0,1)} \leq c\|u'_\epsilon\|^2_{L^2(0,1)},$$

qui implique donc que

$$\|u_\epsilon\|_{L^2(0,1)} \leq c\|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Question 6.

Démontrer que, pour tout $\epsilon \in (0, 1]$,

$$\forall v \in V, \quad \int_0^1 (\bar{u}' - u'_\epsilon) v'\, dx = \epsilon \int_0^1 u_\epsilon v\, dx.$$

Corrigé de la question 6 :

On a d'une part

$$\forall v \in V, \quad \int_0^1 u'_\epsilon v'\, dx + \epsilon \int_0^1 u_\epsilon v\, dx = \int_0^1 f v\, dx,$$

et d 'autre part

$$\forall v \in V, \quad \int_0^1 \bar{u}' v'\, dx = \int_0^1 f v\, dx.$$

Donc par soustraction,

$$\forall v \in V, \quad \int_0^1 (\bar{u}' - u'_\epsilon) v'\, dx - \epsilon \int_0^1 u_\epsilon v\, dx = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Question 7.

Démontrer qu'il existe c telle que pour tout $\epsilon \in (0,1]$

$$\|\bar{u} - u_\epsilon\|_{L^2(0,1)} \leq c\epsilon \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Corrigé de la question 7 :

En prenant comme fonction test dans la question 6, $v = \bar{u} - u_\epsilon \in V$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\|\bar{u}' - u_\epsilon'\|^2_{L^2(0,1)} \leq \epsilon \|u_\epsilon\|_{L^2(0,1)} \|\bar{u} - u_\epsilon\|_{L^2(0,1)}.$$

On a par ailleurs $\bar{u} - u_\epsilon \in V_m$. D'après la question 3, on sait qu'il existe c indépendant de ϵ tel que

$$\|\bar{u} - u_\epsilon\|^2_{L^2(0,1)} \leq c\|\bar{u}' - u_\epsilon'\|^2_{L^2(0,1)},$$

et d'après la question 5, on sait que

$$\|u_\epsilon\|_{L^2(0,1)} \leq c\|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Tout ceci implique que

$$\|\bar{u} - u_\epsilon\|_{L^2(0,1)} \leq c^2\epsilon \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Exercice 3 : Approche variationnelle en assimilation de données (5 pts)

Soit A une matrice de taille de n, i.e. $A \in M_n(\mathbb{R})$, $f \in \mathbb{R}^n, T \in \mathbb{R}^{+*}$, *On considère la classe de systèmes dynamiques :*

$$\begin{cases} y_\zeta'(t) = Ay_\zeta(t) + f, \quad \forall t \in [0,T] \\ y_\zeta(0) = \zeta, \end{cases} \tag{7}$$

qui pour tout donnée initiale $\zeta \in \mathbb{R}^n$ admet (d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz) une unique solution $y_\zeta \in C^1([0,T], \mathbb{R}^n)$. On note par ailleurs $S(\cdot) : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ la résolvante de ce système définie par

$$\begin{cases} S'(t) = AS(t), \quad \forall t > 0 \\ S(0) = Id. \end{cases}$$

On rappelle que $S(\cdot)$ est donné par l'exponentielle matricielle

$$S(t) = \exp(tA) = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

Soit y_ξ une solution particulière issue de la donnée initiale ξ supposée inconnue. La solution y_ξ a fait l'objet de mesures au cours du temps notées $z \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ avec typiquement $m \leq n$. Notre objectif est de proposer une estimation $\hat{\zeta}$ de ξ à partir des données z. Pour ce faire, nous modélisons le processus de mesure à chaque instant par une application linéaire $y \in \mathbb{R}^n \mapsto z = Cy \in \mathbb{R}^m$ où $C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ est une matrice à m lignes et n colones. Ainsi on a

$$\forall t \in [0,T], \quad z(t) = Cy_\xi(t).$$

avec pour autant C non inversible.
L'estimation sera faite au sens des moindres carrés en cherchant le minimum de la fonctionnelle $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\zeta \mapsto J(\zeta) = \frac{\alpha}{2}\|\zeta\|^2 + \frac{\beta}{2}\int_0^T \|z(t) - Cy_\zeta(t)\|^2\, dt.$$

On admet que cette fonctionnelle admet un minimum et qu'il est atteint en $\hat{\zeta} = \operatorname{argmin}_{\zeta \in \mathbb{R}^n} J$.

Question 1

Démontrer que J est une fonctionnelle strictement convexe. En déduire que $\hat{\zeta}$ est unique.

Corrigé de la question 1.

On a pour tout t

$$y_\zeta(t) = S(t)\zeta.$$

Ainsi

$$J(\zeta) = \frac{\alpha}{2}\|\zeta\|^2 + \frac{\beta}{2}\int_0^T \|z(t) - CS(t)\zeta(t)\|^2\, dt,$$

est une fonction quadratique de ζ et positive donc J est convexe. De plus $\zeta \mapsto \|\zeta\|^2$ est strictement convexe donc J est strictement convexe. D'après la proposition 4.1.6, $\hat{\zeta}$ est unique.

Question 2

On note $v_h \in C^1([0,T], \mathbb{R}^n)$ la solution du système

$$\begin{cases} v_h' = Av_h, & \forall t \in [0,T] \\ v_h(0) = h. \end{cases} \tag{8}$$

a. Démontrer que $\partial_\zeta\, y_\zeta$, la dérivée au sens de Fréchet d'une solution y_ζ de (7) par rapport à ζ, est donnée par

$$\partial_\zeta\, y_\zeta(h) = v_h.$$

Indication : on pourra appliquer simplement la définition de la différentielle en considérant les dynamiques de $y_{\zeta+h}$ et y_ζ.

b. Soit $D(\zeta,t)=\|z-Cy_\zeta(t)\|^2$. Démontrer que

$$\partial_\zeta\, D(\zeta,t)(h)=-2(z-Cy_\zeta(t))^\intercal Cv_h,$$

où $^\intercal$ dénote la transposition.

Corrigé de la question 2.

a. On a

$$\begin{cases} y'_{\zeta+h}=Ay_{\zeta+h}, & \forall t\in[0,T] \\ y_{\zeta+h}(0)=\zeta+h. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} y'_{\zeta}=Ay_{\zeta}, & \forall t\in[0,T] \\ y_{\zeta}(0)=\zeta. \end{cases}$$

Donc par soustraction $y_{\zeta+h}-y_\zeta$ est solution de (8). Par unicité de la solution de (8) on a donc

$$\partial_\zeta\, y_\zeta(h)=v_h.$$

b. Le résultat d'obtient directement par composition des différentielles sachant que

$$\partial_x\|x\|(h)=2x^\intercal h.$$

Question 3

On note p_ζ, la solution du système

$$\begin{cases} p'_\zeta(t)+A^\intercal p_\zeta(t)=-C^\intercal\big(z(t)-Cy_\zeta(t)\big), & \forall t\in[0,T] \\ p_\zeta(T)=0. \end{cases} \tag{9}$$

a. Démontrer que

$$\forall h\in\mathbb{R}^n,\quad \partial_\zeta\, J(\zeta)(h)=\alpha\zeta^\intercal h-\beta\int_0^T\big(z(t)-Cy_\zeta(t)\big)^\intercal Cv_h\,dt.$$

b. En déduire par l'utilisation de la dynamique de p_ζ que

$$\forall h\in\mathbb{R}^n,\quad \partial_\zeta\, J(\zeta)(h)=\alpha\zeta^\intercal h-\beta p_\zeta(0)^\intercal h.$$

c. Ecrire la dynamique couplée de $(\hat y,\hat p)=(y_{\hat\zeta},p_{\hat\zeta})$ associé au minimisant $\hat\zeta$.
d. Pour quelle raison ce système n'est pas aisé à résoudre.

Corrigé de la question 3.

a. La différentielle est la somme de la différentielle de la norme et de la différentielle calculée à la question précédente

$$\partial_\zeta J(\zeta)(h) = \alpha\zeta^\intercal h - \beta \int_0^T \big(z(t) - Cy_\zeta(t)\big)^\intercal C v_h \, ds.$$

b. Par définition de l'adjoint on a

$$\begin{aligned}
\partial_\zeta J(\zeta)(h) &= \alpha\zeta^\intercal h + \beta \int_0^T \big(p'_\zeta(t) + A^\intercal p_\zeta(t)\big)^\intercal v_h \, dt \\
&= \alpha\zeta^\intercal h + \beta \int_0^T p_\zeta'^\intercal v_h + p_\zeta^\intercal A v_h \, dt \\
&= \alpha\zeta^\intercal h + \beta \Big[p_\zeta^\intercal v_h\Big]_0^T - \beta \int_0^T p_\zeta^\intercal v'_h + \beta \int_0^T p_\zeta^\intercal A v_h \, dt \\
&= \alpha\zeta^\intercal h - \beta p_\zeta(0)^\intercal h.
\end{aligned}$$

c. On a donc pour le système associé au minimisant $\hat{\zeta}$.

$$\begin{cases}
\hat{y}'(t) = A\hat{y}(t) + f, \quad \forall t \in [0,T] \\
\hat{p}'(t) + A^\intercal \hat{p}(t) = -C^\intercal\big(z(t) - C\hat{y}(t)\big), \quad \forall t \in [0,T] \\
\hat{y}(0) = \frac{\beta}{\alpha}\hat{p}(0), \\
\hat{p}(T) = 0.
\end{cases}$$

d. C'est un système différentiel en temps avec des conditions initiales et finales et non pas un simple problème de Cauchy.

Question 4

A partir des méthodes de minimisation que vous avez étudiées, décrire en quelques lignes un algorithme permettant de calculer $\hat{y}$.

Corrigé de la question 4.

On applique une méthode de gradient à pas de constant par exemple. A l'itération $k = 0$, $\zeta_k = 0$. A chaque itération, étant donnée une valeur calculée de ζ_k, on calcule y_{ζ_k} de 0 à T. Puis p_{ζ_k} de T à 0. On en déduit $\nabla_\zeta J(\zeta_k)$ nécessaire à la méthode de gradient permettant de calculer ζ_{k+1}.