Ecole Polytechnique **Promotion 2014**

MAP 411 – Approximation numérique et optimisation.

Contrôle de connaissances. Durée : 3 heures.

Le 20 janvier 2016.

Sujet proposé par P. Moireau.

Exercice 1 : Étude du schéma de Newmark par méthode énergétique (8 pts)

On s'intéresse à l'approximation numérique par différences finies de l'équation des ondes. Cette équation s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x) \end{cases} \tag{1}$$

où l'inconnue est une fonction $u(x,t) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La vitesse $c \in R^*$ est une constante non nulle. Les fonctions u_0 et v_0 sont supposées régulières à support compact. On admet que ce problème admet une unique solution u suffisamment régulière qui, en tout temps, est à support compact.

Question 1.

Écrire le système du premier ordre vérifié par le couple $\left(u, v = \dfrac{\partial u}{\partial t}\right)$.

Question 2.

Démontrer que l'énergie

$$t \mapsto \mathcal{E}(t) = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx + c^2 \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx,$$

est constante au cours du temps.

Indication : A partir du système obtenu à la question 1, on pourra multiplier la seconde équation du système par v et intégrer sur $\mathbb{R}$.

On introduit un maillage uniforme de la droite réelle à l'aide d'un pas d'espace $h > 0$. On pose $x_j = jh$ pour $j \in \mathbb{Z}$. A chaque fonction $u(x)$ de $L^2(\mathbb{R})$, on associera alors une suite $u_h = (u_j)_j$ de carré sommable

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_j|^2 < +\infty.$$

et telle que

$$u(x_j) = u_j.$$

On notera $l^2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des suites de carré sommable. C'est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\forall u_h = (u_j)_j \in l^2(\mathbb{Z}), \quad \forall v_h = (v_j)_j \in l^2(\mathbb{Z}), \quad \langle u_h, v_h \rangle_{l^2} = \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} u_i v_j.$$

A partir de ces définitions, on définit le schéma dit de Newmark *par :*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{v_j^n + v_j^{n+1}}{2} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \Big(A_h\big(\frac{u_h^{n+1} + u_h^n}{2}\big)\Big)_j = 0, \tag{3}$$

où A_h est l'opérateur aux différences finies défini par

$$\forall w_h = (w_j)_j \in l^2(\mathbb{Z}), \quad (A_h w_h)_j = -\frac{c^2}{h}\left(\frac{w_{j+1} - w_j}{h} - \frac{w_j - w_{j-1}}{h}\right).$$

On admettra que ce schéma admet pour tout n et pour tout couple (u_h^n, v_h^n) un unique couple solution (u_h^{n+1}, v_h^{n+1}).

Question 3.

Montrer que ce schéma est consistant d'ordre 2 en temps et en espace.
Indication : on veillera à effectuer les développements autour du couple $u(jh, (n+\frac{1}{2})\Delta t)$ et $v(jh, (n+\frac{1}{2})\Delta t)$.

Question 4.

Démontrer que A_h est un opérateur symétrique et positif pour le produit scalaire $l^2(\mathbb{Z})$ c'est à dire

$$\forall v_h = (v_j)_j,\, w_h = (w_j)_j \in l^2(\mathbb{Z}), \quad \langle v_h, A_h w_h \rangle_{l^2} = \sum_j (A_h w_h)_j v_j = \langle w_h, A_h v_h \rangle_{l^2},$$

et

$$\forall u_h = (u_j)_j \in l^2(\mathbb{Z}), \quad \langle u_h, A_h u_h \rangle_{l^2} \geq 0.$$

Question 5.

On définit la suite

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto \mathcal{E}^n = \frac{1}{2}||v_h^n||_{l^2}^2 + \frac{1}{2}(u_h^n, A_h u_h^n)_{l^2}.$$

Démontrer que pour toute solution de (2-3)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{E}^{n+1} = \mathcal{E}^n.$$

Indication : on pourra procéder comme à la question 1 en multipliant (3), par une suites discrète bien choisie représentant v.

Question 6.

Démontrer que toute solution de (2-3) vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad ||v_h^n||_{l^2} \leq \sqrt{2\mathcal{E}^0},$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad ||u_h^n||_{l^2} \leq ||u_h^0||_{l^2} + n\Delta t\sqrt{2\mathcal{E}^0}.$$

Question 7.

Que pouvez vous en conclure sur la convergence du schéma de Newmark ?

Exercice 2 : Pénalisation dans les problèmes aux limites (7 pts)

Soit $f \in C^1([0,1])$ telle que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

On considère l'espace $V = C^1([0,1])$, muni du produit scalaire de $L^2(0,1)$

$$\forall u, v \in V, \quad \langle u, v\rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^1 uv\,dx.$$

On cherche à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) & = f(x), \quad x \in (0,1) \\ u'(0) & = 0, \\ u'(1) & = 0. \end{cases} \tag{4}$$

où l'inconnue est une fonction $u \in C^2([0,1])$. On admet que ce problème admet au moins une solution.

Question 1.

Déterminer la formulation variationnelle associée à (4).

Question 2.

Démontrer qu'il existe une infinité de solutions au problème (4).
Indication : On pourra notamment ajouter une constante sur une éventuelle solution du problème.

Question 3.

Etablir qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall v \in V, \quad \|v\|_{L^2(0,1)} \leq c\Big(\|v'\|_{L^2(0,1)} + \Big|\int_0^1 v(x)\,dx\Big|\Big).$$

Indication : On pourra pour cela écrire

$$v(y) = \int_x^y v'(z)\,dz + v(x).$$

Question 4.

Soit

$$V_m = \left\{ u \in C^1([0,1]) \,\Big|\, \int_0^1 u = 0 \right\}.$$

Démontrer qu'il existe au plus une solution $\bar{u} \in V_m$ du problème (4).

Le problème (4) est difficile à résoudre dans V_m par la méthode des éléments finis de Lagrange car les fonctions de bases ne sont pas dans V_m. Nous allons contourner cette difficulté en introduisant des problèmes alternatifs.

Question 5.

Soit $\epsilon \in (0,1]$. On considère la formulation variationnelle

$$\forall v \in V, \quad \int_0^1 u_\epsilon' v' \, dx + \epsilon \int_0^1 u_\epsilon v \, dx = \int_0^1 f v \, dx. \tag{5}$$

où l'inconnue est $u_\epsilon \in V$. On suppose qu'il existe au moins une solution à (5).
a. Démontrer l'unicité de la solution $u_\epsilon \in V$.
b. Démontrer que $u_\epsilon \in V_m$
c. Démontrer qu'il existe c, indépendante de ϵ, telle que

$$\|u_\epsilon\|_{L^2(0,1)} \leq c \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Indication : On pourra utiliser la question 3 et s'inspirer du lemme de Céa

Question 6.

Démontrer que, pour tout $\epsilon \in (0,1]$,

$$\forall v \in V, \quad \int_0^1 (\bar{u}' - u_\epsilon') v' \, dx = \epsilon \int_0^1 u_\epsilon v \, dx.$$

Question 7.

Démontrer qu'il existe c telle que pour tout $\epsilon \in (0,1]$

$$\|\bar{u} - u_\epsilon\|_{L^2(0,1)} \leq c \epsilon \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Exercice 3 : Approche variationnelle en assimilation de données (5 pts)

Soit A une matrice de taille de n, i.e. $A \in M_n(\mathbb{R})$, $f \in \mathbb{R}^n, T \in \mathbb{R}^{+*}$, *On considère la classe de systèmes dynamiques :*

$$\begin{cases} y_\zeta'(t) = A y_\zeta(t) + f, & \forall t \in [0,T] \\ y_\zeta(0) = \zeta, \end{cases} \tag{6}$$

qui pour tout donnée initiale $\zeta \in \mathbb{R}^n$ admet (d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz) une unique solution $y_\zeta \in C^1([0,T],\mathbb{R}^n)$. On note par ailleurs $S(\cdot) : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ la résolvante de ce système définie par

$$\begin{cases} S'(t) = AS(t), & \forall t > 0 \\ S(0) = Id. \end{cases}$$

On rappelle que $S(\cdot)$ est donné par l'exponentielle matricielle

$$S(t) = \exp(tA) = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

Soit y_ξ une solution particulière issue de la donnée initiale ξ supposée inconnue. La solution y_ξ a fait l'objet de mesures au cours du temps notées $z \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)$ avec typiquement $m \leq n$. Notre objectif est de proposer une estimation $\hat{\zeta}$ de ξ à partir des données z. Pour ce faire, nous modélisons le processus de mesure à chaque instant par une application linéaire $y \in \mathbb{R}^n \mapsto z = Cy \in \mathbb{R}^m$ où $C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ est une matrice à m lignes et n colones. Ainsi on a

$$\forall t \in [0,T], \quad z(t) = Cy_\xi(t).$$

avec pour autant C non inversible.
L'estimation sera faite au sens des moindres carrés en cherchant le minimum de la fonctionnelle $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\zeta \mapsto J(\zeta) = \frac{\alpha}{2}\|\zeta\|^2 + \frac{\beta}{2}\int_0^T \|z(t) - Cy_\zeta(t)\|^2\, dt.$$

On admet que cette fonctionnelle admet un minimum et qu'il est atteint en $\hat{\zeta} = \operatorname{argmin}_{\zeta\in\mathbb{R}^n} J$.

Question 1

Démontrer que J est une fonctionnelle strictement convexe. En déduire que $\hat{\zeta}$ est unique.

Question 2

On note $v_h \in C^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ la solution du système

$$\begin{cases} v_h' = Av_h, & \forall t \in [0,T] \\ v_h(0) = h. \end{cases} \tag{7}$$

a. Démontrer que $\partial_\zeta\, y_\zeta$, la dérivée au sens de Fréchet d'une solution y_ζ de (6) par rapport à ζ, est donnée par

$$\partial_\zeta\, y_\zeta(h) = v_h.$$

Indication : on pourra appliquer simplement la définition de la différentielle en considérant les dynamiques de $y_{\zeta+h}$ et y_ζ.
b. Soit $D(\zeta,t) = \|z - Cy_\zeta(t)\|^2$. Démontrer que

$$\partial_\zeta\, D(\zeta,t)(h) = (z - Cy_\zeta(t))^\intercal C v_h,$$

où $^\intercal$ dénote la transposition.

Question 3

On note p_ζ, la solution du système

$$\begin{cases} p_\zeta'(t) + A^\mathsf{T} p_\zeta(t) = -C^\mathsf{T}\big(z(t) - Cy_\zeta(t)\big), & \forall t \in [0,T] \\ p_\zeta(T) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

a. Démontrer que

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad \partial_\zeta\, J(\zeta)(h) = \alpha\zeta^\mathsf{T} h - \beta \int_0^T \big(z(t) - Cy_\zeta(t)\big)^\mathsf{T} C v_h \, dt.$$

b. En déduire par l'utilisation de la dynamique de p_ζ que

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad \partial_\zeta\, J(\zeta)(h) = \alpha\zeta^\mathsf{T} h - \beta p_\zeta(0)^\mathsf{T} h.$$

c. Ecrire la dynamique couplée de $(\hat{y}, \hat{p}) = (y_{\hat{\zeta}}, p_{\hat{\zeta}})$ associé au minimisant $\hat{\zeta}$.
d. Pour quelle raison ce système n'est pas aisé à résoudre.

Question 4

A partir des méthodes de minimisation que vous avez étudiées, décrire en quelques lignes un algorithme permettant de calculer $\hat{y}$.