

École Polytechnique. Promotion 2012.
Analyse Numérique et Optimisation, MAP 431
Contrôle Classant du 1^{er} Juillet 2014

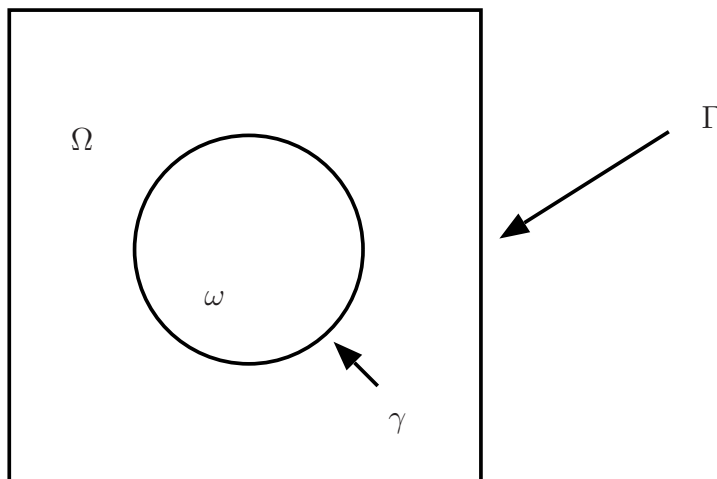
Le sujet se compose de deux problèmes indépendants. Il comporte huit pages en tout. Chaque problème est à rédiger sur des copies de couleurs distinctes, blanche pour le problème 1 et rose pour le problème 2.

Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction.

Il n'est pas nécessaire de tout faire pour obtenir la note maximale.

1 Formulations Variationnelles, noté sur 8 pts

Soit Ω un carré de \mathbf{R}^2 , et ω un disque fortement inclus dans Ω (c'est à dire que $\bar{\omega} \subset \Omega$, voir figure). On note Γ la frontière de Ω , et γ la frontière de ω . On considère $f \in L^2(\Omega \setminus \bar{\omega})$; on gardera la notation f pour désigner son prolongement par 0 sur le domaine Ω tout entier.



On s'intéresse au problème aux limites suivant, posé dans le domaine $\Omega \setminus \bar{\omega}$ situé entre le cercle et le carré :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \setminus \bar{\omega}, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \gamma. \end{cases} \quad (1)$$

On note

$$V = \{v \in H^1(\Omega \setminus \bar{\omega}), v|_{\Gamma} = 0\}.$$

On munit V de la norme $\|\cdot\|_V$ définie par

$$\|v\|_V^2 = \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} v^2 + \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} |\nabla v|^2.$$

On admet qu'il existe un opérateur de prolongement \mathcal{P} de V dans $H_0^1(\Omega)$:

$$\mathcal{P} : v \in V \mapsto w = \mathcal{P}(v) \in H_0^1(\Omega),$$

avec $w|_{\Omega \setminus \bar{\omega}} = v$, et

$$\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \leq M \|\nabla v\|_{L^2(\Omega \setminus \bar{\omega})}.$$

La démonstration de cette propriété fait l'objet de la Partie C (question 10).

Enfin, rappelons que, $\Omega \setminus \bar{\omega}$ et ω réalisant une partition de Ω , on a, pour toute fonction intégrable sur Ω ,

$$\int_{\Omega} g = \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} g + \int_{\omega} g.$$

Partie A. Étude d'une méthode de résolution itérative de (1)

Question 1. En utilisant l'inégalité de Poincaré sur $H_0^1(\Omega)$, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|v\|_{H^1(\Omega \setminus \bar{\omega})} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega \setminus \bar{\omega})} \quad \forall v \in V.$$

Question 2. Écrire la formulation variationnelle du problème (1), et montrer l'existence et l'unicité d'une solution à cette formulation variationnelle.

Montrer que cette solution w vérifie

$$\int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \nabla w \cdot \nabla v = \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

La résolution directe de ce problème par une méthode d'éléments finis nécessiterait la construction d'un maillage du domaine d'intérêt $\Omega \setminus \bar{\omega}$. Pour s'affranchir de cette difficulté, on cherche à se ramener à la résolution de problèmes posés sur le domaine Ω en entier, de géométrie plus simple. C'est cette démarche qui fait l'objet des questions suivantes.

À partir d'une fonction initiale nulle $u_0 = 0$ dans $H_0^1(\Omega)$, on considère la suite de fonctions construites selon la relation de récurrence suivante

$$\int_{\Omega} \nabla u_{k+1} \cdot \nabla v = \int_{\omega} \nabla u_k \cdot \nabla v + \int_{\omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2)$$

Question 3.

a) Montrer que, pour $u_k \in H_0^1(\Omega)$ donné, le problème (2) se met sous la forme (on note ici u l'inconnue notée u_{k+1} précédemment)

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in W.$$

Montrer que W , $a(\cdot, \cdot)$, et $L(\cdot)$ vérifient les hypothèses du théorème de Lax Milgram. En déduire que la suite (u_k) de fonctions de $H_0^1(\Omega)$ est bien définie.

b) Montrer que, si la suite (u_k) converge dans H_0^1 vers une limite w , alors la restriction de w à $\Omega \setminus \bar{\omega}$ est la solution de la question 2.

On gardera la notation w pour désigner $\mathcal{P}w$, où w est la solution dont on a montré l'existence et l'unicité à la question 2. La fonction w est donc maintenant définie sur Ω tout entier. On introduit

$$e_k = u_k - w,$$

où u_k est le k -ième terme de la suite construite ci-dessus.

Question 4. Montrer que l'on a

$$\int_{\Omega} \nabla e_{k+1} \cdot \nabla v = \int_{\omega} \nabla e_k \cdot \nabla v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3)$$

Question 5.

a) Montrer que la suite $\|\nabla e_k\|_{L^2(\omega)}$ est décroissante.

b) Montrer que la suite $\|\nabla e_k\|_{L^2(\Omega \setminus \bar{\omega})}$ tend vers 0, et en déduire que la méthode converge.

Partie B. Vitesse de convergence de l'algorithme en dimension 1

On cherche maintenant à estimer la vitesse de convergence de cet algorithme. On se place pour cela dans un cadre simplifié, en dimension 1 d'espace.

Le domaine Ω est maintenant l'intervalle $] -1, 1[$, et $\omega =] -a, a[$, avec $0 < a < 1$. On note toujours f une fonction de $L^2(\Omega)$ nulle sur ω . Pour simplifier les calculs, on supposera que f est **impaire**, c'est à dire que $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \Omega =] -1, 1[$.

On définit comme précédemment, à partir de $u_0 = 0$, la suite (u_k) dans $H_0^1(\Omega)$ par

$$\int_{-1}^1 u'_{k+1} v' = \int_{-a}^a u'_k v' + \int_{-1}^1 f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On note w la solution du problème de départ dans ce cadre monodimensionnel : w est la solution du problème de Poisson sur $\Omega \setminus \bar{\omega}$ avec second membre f , conditions de Dirichlet homogènes en -1 et 1 , et conditions de Neuman homogènes en $-a$ et a . On garde la notation w pour désigner son prolongement affine sur $\omega =] -a, a[$. La fonction $w \in H_0^1(\Omega)$ vérifie donc

$$\int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} w' v' = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On note comme précédemment $e_k = u_k - w$, de telle sorte que

$$\int_{\Omega} e'_{k+1} v' = \int_{\omega} e'_k v' \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Question 6. Montrer que w est une fonction impaire, et montrer par récurrence que les fonctions e_k sont aussi impaires, pour tout $k \geq 0$.

Question 7. Montrer que, pour tout $k > 0$, e_k est continue sur $[-1, 1]$ et affine sur chacun des intervalles $] -1, a[$, $] -a, a[$, et $]a, 1[$. En déduire que e_k est entièrement définie par sa pente sur $\omega =] -a, a[$. On note α_k cette pente.

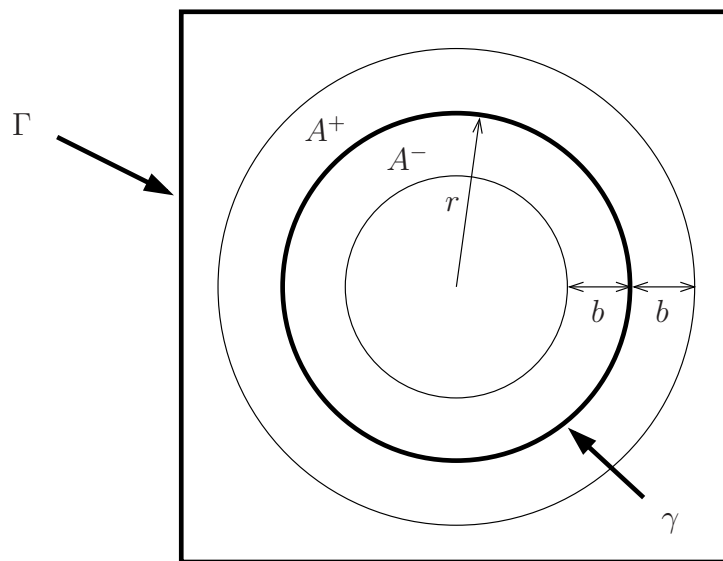
Question 8. Exprimer $\|e'_k\|_{L^2(\Omega)}$ en fonction de α_k .

Question 9. Exprimer α_{k+1} en fonction de α_k , et en déduire que la méthode converge géométriquement.

Partie C. Construction de l'opérateur de prolongement \mathcal{P}

Cette partie porte sur la construction de l'opérateur de prolongement \mathcal{P} dont on a admis l'existence au début du problème. On suppose pour simplifier les notations que le carré est maintenant centré en l'origine du repère, qui est aussi le centre du cercle γ , donc le rayon est $r > 0$. On choisit $0 < b < r$ tel que le cercle de rayon $r + b$ soit fortement inclus dans le carré. On note A^- (resp. A^+) le domaine situé entre γ et le cercle de rayon $r - b$ (resp. $r + b$) :

$$A^- = \{x \in \mathbf{R}^2, r - b < |x| < r\}, \quad A^+ = \{x \in \mathbf{R}^2, r < |x| < r + b\}.$$



Question 10.

a) Construire un difféomorphisme (bijection C^1 et d'inverse C^1) Ψ qui envoie $\overline{A^-}$ sur $\overline{A^+}$, et tel que $\Psi(x) = x$ pour tout $x \in \gamma$. (On pourra se placer en coordonnées polaires.)

b) Soit v une fonction de V (défini en préambule), continûment différentiable sur $\overline{\Omega} \setminus \omega$. Construire à l'aide de Ψ une fonction $w \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega \setminus \overline{\omega})},$$

pour une constante $C > 0$.

c) Conclure.

2 Optimisation (copies roses, noté sur 12 pts)

Les parties A et B sont indépendantes.

Dans la partie A, il n'est pas nécessaire de répondre aux Questions 3,4,5,6 pour traiter les Questions 7 et suivantes.

Il est possible d'invoquer un résultat du cours pour répondre à certaines questions commençant par "Montrer que ...".

Notations :

Pour $x, y \in \mathbf{R}^N$, on note $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^N x_i y_i$ le produit scalaire euclidien et $|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ la norme euclidienne associée.

Pour $t \in \mathbf{R}$, on note t_+ sa partie positive :

$$t_+ := \max(t, 0) = \begin{cases} t & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Partie A, dimension finie

Soit $N \geq 1$ un entier et $y \in \mathbf{R}^N$. Nous introduisons la fonction $J_y : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$J_y(x) := \frac{1}{2}|x - y|^2.$$

D'autre part, on introduit l'ensemble

$$\Delta_N := \left\{ x \in \mathbf{R}^N \text{ tel que } x_i \geq 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq N \text{ et } \sum_{i=1}^N x_i = 1 \right\}.$$

L'objet de cette partie est de produire un algorithme pour le calcul du minimiseur de J_y dans Δ_N .

Question 1. Montrer que Δ_N est un ensemble convexe fermé de \mathbf{R}^N .

Question 2. Montrer que le problème d'optimisation $\min \{J_y(x) : x \in \Delta_N\}$ admet une unique solution qu'on notera x^* .

Question 3. Soit $x, y \in \mathbf{R}^N$ et soit σ une permutation de l'ensemble $\{1, \dots, N\}$ (c'est-à-dire que $\sigma : \{1, \dots, N\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$ est une bijection). Nous définissons $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbf{R}^N$ par

$$\hat{x}_i = x_{\sigma(i)}, \quad \hat{y}_i = y_{\sigma(i)} \quad \text{pour } i = 1, \dots, N.$$

Montrer que $x \in \Delta_N \iff \hat{x} \in \Delta_N$. Montrer que $J_y(x) = J_{\hat{y}}(\hat{x})$. Conclure.

Nous supposons à partir de maintenant $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_N$.

Question 4. Montrer que si $y_i = y_{i+1}$ pour un indice $1 \leq i < N$, alors $x_i^* = x_{i+1}^*$. Montrer qu'on a aussi $x_1^* \leq x_2^* \leq \dots \leq x_N^*$.

Question 5. Montrer que x^* est l'unique élément de Δ_N qui vérifie

$$\langle y - x^*, x - x^* \rangle \leq 0 \quad \text{pour tout } x \in \Delta_N.$$

Question 6. En déduire qu'on a $y_1 - x_1^* \leq y_2 - x_2^* \leq \dots \leq y_N - x_N^*$.

Question 7. Montrer que les contraintes sont qualifiées au point x^* .

Question 8. Montrer qu'il existe des réels $\lambda^* \in \mathbf{R}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_N \geq 0$ tels que

$$x_i^* - y_i = -\lambda^* + \lambda_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, N.$$

Question 9. Montrer que pour $i = 1, \dots, N$, on a $x_i^* = (y_i - \lambda^*)_+$.

Question 10. Montrer que λ^* satisfait à l'identité :

$$1 - \sum_{i=1}^N (y_i - \lambda^*)_+ = 0.$$

Soit $G : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction définie par $G(t) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [(y_i - t)_+]^2 + t$. On notera \mathcal{M} l'ensemble des minimiseurs de G .

Rappelons qu'on a supposé $y_1 \leq \dots \leq y_N$. Pour $i = 1, \dots, N$, on note $I_i :=]y_{i-1}, y_i]$ avec la convention $y_0 := -\infty$.

Question 11. Montrer que G est convexe, de classe C^1 et est infinie à l'infini.

Question 12. Montrer que $\mathcal{M} \neq \emptyset$.

Question 13. Montrer que $\mathcal{M} \subset]-\infty, y_N] = \bigcup_{i=1}^N I_i$. En déduire que \mathcal{M} contient un seul élément qu'on notera t^* .

Question 14. Soit $i \in \{1, \dots, N\}$. En supposant que $t^* \in I_i$, donner une formule explicite pour t^* de la forme $t^* = g_i(y)$.

Question 15. Soit $i \in \{1, \dots, N\}$. Montrer l'équivalence

$$g_i(y) \in I_i \iff t^* \in I_i$$

Question 16. Donner un algorithme pratique pour le calcul de λ^* et x^* .

Question 17. Application : calculer la projection de $y = (3, 2, 1)$ sur Δ_3 .

Partie B, dimension infinie

Soit $I =]0, 1[$, nous rappelons que si $u \in H^1(I)$ alors u admet un représentant continu sur \bar{I} qu'on note encore u . De plus, nous avons l'estimation,

$$\max_{x \in \bar{I}} |u(x)| \leq 2 \|u\|_{H^1(I)}.$$

Nous introduisons l'ensemble

$$K := \{u \in H^1(I) : u \text{ est croissante sur } I\}.$$

Nous admettrons que si $u \in H^1(I)$, alors on a

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t) dt \quad \text{pour } x \in I,$$

Réciproquement, la fonction définie par

$$u(x) := c + \int_0^x g(t) dt,$$

avec $g \in L^2(I)$ et $c \in \mathbf{R}$, est un élément de $H^1(I)$ tel que $u' = g$.

Nous voyons ainsi que

$$K = \{u \in H^1(I) : u' \geq 0 \text{ presque partout sur } I\}.$$

Finalement, soit $f \in L^2(I)$ et soit $J : H^1(I) \rightarrow \mathbf{R}$ la fonctionnelle définie par

$$J(u) := \frac{1}{2} \int_I (u'(x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_I (u(x) - f(x))^2 dx.$$

Le but de cette partie est de produire un algorithme itératif pour le calcul du minimiseur de J dans K .

Question 18. Montrer que K est un convexe fermé de $H^1(I)$.

Question 19. Montrer que J est différentiable et calculer sa différentielle (on notera $\langle J'(u); v \rangle$ la différentielle de J au point $u \in H^1(I)$ dans la direction $v \in H^1(I)$).

Question 20. Montrer que J admet un unique minimiseur dans K qu'on notera u_* .

Pour $u \in H^1(I)$, nous définissons l'application linéaire $L_u : H^1(0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ par

$$L_u(v) := \int_I u'(x)v'(x) dx + \int_I (u(x) - f(x))v(x) dx.$$

Question 21. Soit $u \in K$. Montrer qu'on a l'équivalence suivante : u est le minimiseur de J dans K si et seulement si

$$\forall v \in H^1(I) \quad u + v \in K \implies L_u(v) \geq 0.$$

En déduire que $L_{u_*}(1) = 0$.

Question 22. Nous introduisons le sous-espace

$$V = \left\{ v \in H^1(I) : \int_I v(x) dx = 0 \right\}$$

et nous admettons que l'application bilinéaire

$$\langle v; w \rangle_V := \int_I v'(x)w'(x) dx$$

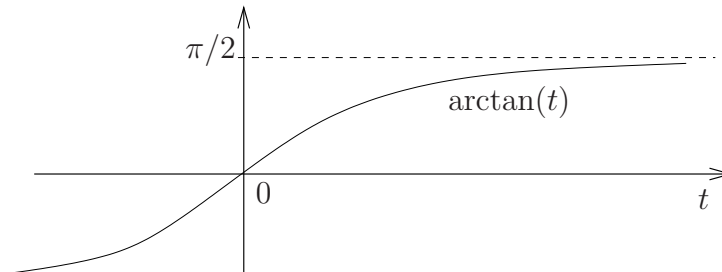
définit un produit scalaire sur V équivalent au produit scalaire usuel de $H^1(I)$.

En déduire qu'il existe $\lambda_\star \in L^2(I)$ tel que

$$L_{u_\star}(v) = \int_I \lambda_\star(x)v'(x) dx \quad \text{pour tout } v \in H^1(I).$$

Question 23. Montrer qu'on a $\lambda_\star \geq 0$ presque partout sur I .

Question 24. Nous rappelons que la fonction $t \mapsto \arctan(t)$ est régulière, impaire et strictement croissante sur \mathbf{R} avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan(t) = \pi/2$ (voir figure).



Pour $x \in I$, nous posons $\varphi(x) := (2/\pi) \arctan(u'_\star(x))$. Nous admettons que par construction, $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}$ est mesurable.

Montrer que $u_\star - w \in K$ où $w : I \rightarrow \mathbf{R}$ est définie par

$$w(x) := \int_0^x u'_\star(t)\varphi(t) dt.$$

En déduire que le produit $\lambda_\star u'_\star$ s'annule presque partout sur I .

Nous introduisons maintenant le Lagrangien $\mathcal{L} : H^1(I) \times L^2(I, \mathbf{R}_+) \rightarrow \mathbf{R}$ défini par

$$\mathcal{L}(u, \lambda) = J(u) - \int_I \lambda(t)u'(t) dt.$$

Question 25. Montrer que (u_\star, λ_\star) est un point selle de \mathcal{L} dans $H^1(I) \times L^2(I, \mathbf{R}_+)$, i.e :

$$\mathcal{L}(u_\star, \mu) \leq \mathcal{L}(u_\star, \lambda_\star) \leq \mathcal{L}(v, \lambda_\star) \quad \forall v \in H^1(I), \forall \mu \in L^2(I, \mathbf{R}_+).$$

Question 26. Montrer que, réciproquement, si (u, λ) est un point selle de \mathcal{L} dans $H^1(I) \times L^2(I, \mathbf{R}_+)$ alors $u = u_\star$ et $\lambda = \lambda_\star$.

Indications : Montrer d'abord que $u \in K$, puis que $\lambda u' \equiv 0$. Enfin, montrer que L_u satisfait la condition de la question 21 et conclure.

Question 27. Proposer un algorithme itératif pour calculer le minimiseur de J dans K .

Un algorithme utilisable en pratique nécessiterait de discrétiser le problème. Nous laissons de côté cet aspect. On ne cherchera pas à établir la convergence de l'algorithme.