

Stabilité de l'équation d'onde avec amortissement intermittent

Sujet proposé par G. Mazanti

guilherme.mazanti@polytechnique.edu

<http://www.cmap.polytechnique.fr/~mazanti>

Introduction

La propagation d'une onde dans un milieu dissipatif $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ à une vitesse unitaire peut être décrite par l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \Delta u(t, x) - \rho \frac{\partial u}{\partial t}(t, x), \quad t \geq 0, x \in \Omega, \quad (1)$$

où $\rho > 0$ est le coefficient d'amortissement du milieu Ω . L'objectif de ce projet est d'étudier une modification de (1) où le terme d'amortissement $\rho \frac{\partial u}{\partial t}(t, x)$ n'est pas actif à tout instant de temps. On s'intéresse donc à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \Delta u(t, x) - \alpha(t) \rho \frac{\partial u}{\partial t}(t, x), \quad t \geq 0, x \in \Omega, \quad (2)$$

où $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ est une fonction mesurable qui détermine l'activité du terme d'amortissement à chaque instant de temps. Pour plus de détails sur l'origine et l'intérêt de ce type de problème, voir l'Appendice A à la fin de ce document.

Plus précisément, le problème auquel on s'intéresse dans ce projet est

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \Delta u(t, x) - \alpha(t) \rho \frac{\partial u}{\partial t}(t, x), & t \geq 0, x \in \Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ u(t, x) = 0, & t \geq 0, x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3)$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ensemble ouvert borné à bord régulier, $\rho > 0$ et $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ est une fonction mesurable.

Dans un premier moment, on s'intéressera à l'étude théorique de ce problème dans le cas $\alpha(t) \equiv 1$, afin de montrer que le problème est bien posé et que toute solution converge exponentiellement vers zéro dans la norme de l'espace d'énergie. On fera ensuite des simulations numériques pour quelques types de signaux α .

1 Analyse théorique

On se restreint ici au cas $\alpha(t) \equiv 1$, i.e., au cas où le terme d'amortissement $\rho \frac{\partial u}{\partial t}(t, x)$ est toujours actif. On se propose de montrer dans ce cas que (3) est bien posé et que toute solution

converge exponentiellement, avec un taux de convergence uniforme, vers la solution identiquement nulle.

Question 1.1. Donner une formulation variationnelle pour (3) dans l'espace de Hilbert $H = L^2(\Omega)$ sous la forme

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle u(t), v \rangle_H + \rho \frac{d}{dt} \langle u(t), v \rangle_H + a(u(t), v) = 0, \quad \forall v \in V. \quad (4)$$

Préciser le choix de l'espace de Hilbert V .

Question 1.2. On s'intéresse maintenant à généraliser le Théorème 8.3.1 du cours pour pouvoir l'appliquer à la formulation variationnelle (4). On veut donc montrer le résultat suivant :

Théorème 1. Soient V et H deux espaces de Hilbert tels que $V \subset H$ avec injection compacte et V dense dans H . Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire symétrique continue et coercive dans V . Soient un temps final $T_f > 0$, une constante $b \in \mathbb{R}$ et une donnée initiale $(u_0, u_1) \in V \times H$. Alors le problème

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \langle u(t), v \rangle_H + 2b \frac{d}{dt} \langle u(t), v \rangle_H + a(u(t), v) = 0, & \forall v \in V, \\ u(0) = u_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = u_1, \end{cases} \quad (5)$$

a une unique solution $u \in \mathcal{C}([0, T_f]; V) \cap \mathcal{C}^1([0, T_f]; H)$. De plus, il existe une constante $C > 0$ (ne dépendant que de b , Ω et T_f) telle que

$$\|u\|_{\mathcal{C}([0, T_f]; V)} + \|u\|_{\mathcal{C}^1([0, T_f]; H)} \leq C(\|u_0\|_V + \|u_1\|_H). \quad (6)$$

- a. Justifier l'existence d'une base hilbertienne $(\phi_k)_{k \geq 1}$ de H et d'une suite croissante $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ de nombres réels positifs tendant vers l'infini lorsque $k \rightarrow +\infty$ telles que, pour tout $k \geq 1$, on a $\phi_k \in V$ et

$$a(\phi_k, v) = \lambda_k \langle \phi_k, v \rangle_H, \quad \forall v \in V.$$

- b. On veut montrer d'abord la partie unicité du Théorème 1. On suppose qu'il existe une solution $u \in \mathcal{C}([0, T_f]; V) \cap \mathcal{C}^1([0, T_f]; H)$ de (5) et on l'écrit dans la base $(\phi_k)_{k \geq 1}$ de H comme $u(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(t) \phi_k$ avec $\alpha_k(t) = \langle u(t), \phi_k \rangle_H$. Donner l'équation différentielle satisfaite par α_k , en précisant bien ses conditions initiales, et la résoudre. On fera bien la différence entre les cas $\lambda_k < b^2$, $\lambda_k = b^2$ et $\lambda_k > b^2$. Conclure l'unicité de la solution de (5) en donnant une formule explicite pour celle-ci.
- c. On veut maintenant montrer la partie existence. Montrer que les fonctions $\alpha_k(t) \phi_k(x)$ trouvées dans **b** appartiennent bien à $\mathcal{C}([0, T_f]; V) \cap \mathcal{C}^1([0, T_f]; H)$.
- d. Montrer que, pour tout $k \geq 1$, on a

$$|\alpha_k'(t)|^2 + \lambda_k |\alpha_k(t)|^2 = |\alpha_k^1|^2 + \lambda_k |\alpha_k^0|^2 - 4b \int_0^t |\alpha_k'(s)|^2 ds, \quad (7)$$

où $\alpha_k^0 = \alpha_k(0)$ et $\alpha_k^1 = \alpha_k'(0)$. (Suggestion : Multiplier l'équation satisfaite par α_k par α_k' et intégrer en temps).

- e. En utilisant la formule explicite de α_k obtenue en **b**, montrer qu'il existe une constante $C > 0$, ne dépendant que de b et de la suite $(\lambda_k)_{k \geq 1}$, telle que, pour tout $k \geq 1$, on a

$$|\alpha'_k(t)| \leq C e^{2|b|t} (|\alpha_k^1| + \max\{|b|, \sqrt{\lambda_k}\} |\alpha_k^0|), \quad (8a)$$

$$\sqrt{\lambda_k} |\alpha_k(t)| \leq C e^{2|b|t} (|\alpha_k^1| + \sqrt{\lambda_k} |\alpha_k^0|). \quad (8b)$$

On pourra traiter les cas $\lambda_k < b^2$, $\lambda_k = b^2$ et $\lambda_k > b^2$ séparément.

- f. Combiner (7) et (8a) pour obtenir que

$$|\alpha'_k(t)|^2 + \lambda_k |\alpha_k(t)|^2 \leq C' e^{4|b|T_f} (|\alpha_k^1|^2 + \max\{b^2, \lambda_k\} |\alpha_k^0|^2) \quad (9)$$

pour une certaine constante $C' > 0$ ne dépendant que de b et de la suite $(\lambda_k)_{k \geq 1}$.

- g. Montrer l'existence d'une solution de (5). Pour cela, on pourra procéder comme dans la preuve du Théorème 8.3.1 du cours.

- h. Montrer l'estimation d'énergie (6) à partir de (9).

- i. Montrer que, si $b > 0$, on peut remplacer $e^{2|b|t}$ dans (8) par $e^{-\gamma t}$ pour une certaine constante $\gamma > 0$ ne dépendant que de b et de la suite $(\lambda_k)_{k \geq 1}$. En déduire que, dans ce cas, on a, pour tout $t \in [0, T_f]$,

$$\|u(t)\|_V^2 + \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_H^2 \leq C e^{-\gamma t} (\|u_0\|_V^2 + \|u_1\|_H^2), \quad (10)$$

où la constante $C > 0$ ne dépend que de b et de la suite $(\lambda_k)_{k \geq 1}$.

Question 1.3. En appliquant le Théorème 1, montrer que (4) est bien posé.

Question 1.4. Montrer qu'il existe $C, \gamma > 0$, dépendantes uniquement de $\rho > 0$ et Ω , telles que, pour toute donnée initiale $(u_0, u_1) \in V \times H$, la solution correspondante u de (4) satisfait

$$\|u(t)\|_V^2 + \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_H^2 \leq C e^{-\gamma t} (\|u_0\|_V^2 + \|u_1\|_H^2).$$

2 Simulation numérique

On veut maintenant faire une simulation numérique de (3) en dimension $N = 2$ à l'aide du logiciel FreeFem++. Pour cela, on écrit (3) sous la formulation variationnelle

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \langle u(t), v \rangle_H + \alpha(t) \rho \frac{d}{dt} \langle u(t), v \rangle_H + a(u(t), v) = 0, & \forall v \in V, \\ u(0) = u_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = u_1, \end{cases} \quad (11)$$

dans l'espace de Hilbert H , où la forme bilinéaire a et l'espace de Hilbert V sont ceux de la Question 1.1.

On veut discrétiser (11) en temps à l'aide du *schéma de Newmark* vu en cours. On choisit un pas de temps Δt , on pose $t_n = n\Delta t$ et on introduit trois suites u^n , \dot{u}^n et \ddot{u}^n définies par $u^0 = u_0$, $\dot{u}^0 = u_1$, $\ddot{u}^0 = \Delta u^0 - \alpha(0)\rho\dot{u}^0$ et, pour $n \geq 0$,

$$\begin{cases} \langle \ddot{u}^{n+1}, v \rangle_{\mathbb{H}} + \alpha(t_{n+1})\rho \langle \dot{u}^{n+1}, v \rangle_{\mathbb{H}} + a(u^{n+1}, v) = 0, & \forall v \in \mathbb{V}, \\ \dot{u}^{n+1} = \dot{u}^n + \Delta t (\delta \ddot{u}^{n+1} + (1 - \delta)\ddot{u}^n), \\ u^{n+1} = u^n + \Delta t \dot{u}^n + \frac{(\Delta t)^2}{2} (2\theta \ddot{u}^{n+1} + (1 - 2\theta)\ddot{u}^n). \end{cases} \quad (12)$$

À chaque instant de temps t_n , on résout (12) à l'aide de la méthode des éléments finis en utilisant FreeFem++.

Question 2.1. Choisir un domaine borné régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Écrire un code en FreeFem++ qui crée un maillage pour ce domaine et qui définit l'espace V_h d'éléments finis \mathbb{P}_1 sur ce maillage. Ce domaine Ω choisi sera fixé pour le reste de la simulation.

Le logiciel FreeFem++ implémente la méthode des éléments finis pour les problèmes sous forme variationnelle, ce qui n'est pas le cas de (12), qui est un problème à trois équations, dont une seule sous une formulation variationnelle.

Question 2.2. Écrire le problème (12) comme une unique formulation variationnelle. (*Suggestion* : Multiplier la deuxième et la troisième équations de (12) par des fonctions test v_2 et v_3 et intégrer, et faire ensuite la somme des trois formulations variationnelles obtenues pour n'avoir qu'une seule).

2.1 Simulation dans le cas $\alpha(t) \equiv 1$

Question 2.3. Faire une simulation du système (3) dans le cas $\alpha(t) \equiv 1$ à l'aide du schéma de Newmark (12). Pour cela, on choisira un temps final T_f , une valeur pour le coefficient $\rho > 0$, une condition initiale (u_0, u_1) , et on fera une boucle en temps où, à chaque instant t_n , on résout la formulation variationnelle trouvée dans la Question 2.2. On choisira sagement les paramètres $\delta \in [0, 1]$ et $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$ à l'aide du Lemme 8.7.1 du cours. On pourra visualiser la solution à l'aide de la commande `plot` de FreeFem++ avec l'option `dim=3` pour un graphique en dimension 3.

Question 2.4. Tracer dans un graphique l'évolution en temps de la norme $\|u(t)\|_{\mathbb{V}}^2 + \|\frac{du}{dt}(t)\|_{\mathbb{H}}^2$ de la solution approchée trouvée dans la question précédente. Vérifier que cette quantité satisfait bien (10). (*Suggestion* : Pour vérifier la convergence exponentielle vers zéro de la solution, on pourra tracer le graphique en échelle logarithmique).

2.2 Simulation dans le cas d'un signal à excitation persistante

On veut maintenant simuler (3) dans le cas où $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ n'est pas la fonction identiquement égale à 1. On s'intéressera ici aux signaux α à *excitation persistante* : pour $T \geq \mu > 0$, on dit que la fonction mesurable $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ est à *excitation persistante* avec constantes (T, μ) si, pour tout $t \geq 0$, on a

$$\int_t^{t+T} \alpha(s) ds \geq \mu.$$

On note par $\mathcal{G}(T, \mu)$ l'ensemble de ces signaux. Les systèmes où interviennent un ou plusieurs signaux à excitation persistante sont appelés *systèmes à excitation persistante*, et constituent un sujet de recherche actif. Pour plus de détails, voir l'Appendice B.

L'analyse théorique de (3) soumis à un signal à excitation persistante peut être trouvée dans [3], qui donne le résultat suivant.

Théorème 2. Soient $T \geq \mu > 0$. Alors il existe des constantes $C \geq 1$ et $\gamma > 0$ telles que, pour tout signal $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$ et toute donnée initiale $(u_0, u_1) \in V \times H$, la solution correspondante u de (11) satisfait

$$\|u(t)\|_V^2 + \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_H^2 \leq Ce^{-\gamma t} (\|u_0\|_V^2 + \|u_1\|_H^2).$$

Cela veut dire que, même si le terme d'amortissement n'agit pas toujours, on obtient tout de même une décroissance exponentielle de la solution, avec un taux de décroissance γ qui est uniforme dans la classe $\mathcal{G}(T, \mu)$.

Question 2.5. Choisir des constantes $T \geq \mu > 0$ et cinq signaux $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$. Modifier le programme de la Question 2.3 pour simuler le système (3) pour chacun des signaux α choisis. Pour cela, on choisira un temps final $T_f \geq 20T$ et on utilisera les mêmes valeurs de ρ , δ et θ et la même condition initiale (u_0, u_1) que dans la Question 2.3. (*Suggestion* : On pourra se restreindre à des signaux à excitation persistante périodiques. On choisira notamment des signaux qui valent 0 sur certains intervalles de temps. On pourra prendre notamment des signaux avec beaucoup de discontinuités et qui oscillent beaucoup).

Question 2.6. Pour chacun des signaux α choisis dans la question précédente, tracer dans un graphique l'évolution en temps de la norme $\|u(t)\|_V^2 + \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_H^2$ de la solution approchée trouvée. Vérifier si les résultats trouvés sont en accord avec le Théorème 2.

2.3 Simulation pour des signaux plus généraux

Le Théorème 2 affirme que la condition d'excitation persistante sur le signal α est suffisante pour garantir la convergence exponentielle des solutions de (3) vers l'origine. On pourrait aussi se demander s'il n'y auraient d'autres conditions plus générales sur α qui garantiraient une convergence (pas forcément exponentielle) des solutions de (3) vers l'origine. Le résultat suivant de [3] présente une telle condition.

Théorème 3. Soit $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ tel que

$$\int_{a_n}^{b_n} \alpha(t) dt \geq \eta(b_n - a_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

pour une certaine constante $\eta > 0$ et une suite d'intervalles disjoints $(]a_n, b_n[)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{R}_+ telle que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - a_n)^3 = +\infty.$$

Alors toute solution u de (11) satisfait $\|u(t)\|_V^2 + \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_H^2 \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Remarquons qu'on s'autorise ici à prendre des signaux qui valent 0 sur des intervalles de temps arbitrairement grands, et qui ne sont actifs que sur des intervalles de temps à chaque fois plus petits ; par exemple, on pourrait choisir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante avec $a_{n+1} - a_n > \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Ceci est bien plus général que les signaux à excitation persistante, mais la convergence vers l'origine peut ne plus être exponentielle.

Question 2.7. Choisir trois signaux α satisfaisant les conditions du Théorème 3, en précisant bien les valeurs de $\eta > 0$ et les suites $(]a_n, b_n[)_{n \in \mathbb{N}}$ choisies dans chaque cas. Simuler le système (3) pour chacun des signaux α choisis à l'aide du programme de la Question 2.5, avec les mêmes valeurs de ρ , δ et θ et la même condition initiale (u_0, u_1) , et en choisissant un temps final $T_f > 0$ adapté.

Question 2.8. Pour chacun des signaux α choisis dans la question précédente, tracer dans un graphique l'évolution en temps de la norme $\|u(t)\|_V^2 + \|\frac{du}{dt}(t)\|_H^2$ de la solution approchée trouvée. Vérifier si les résultats trouvés sont en accord avec le Théorème 3.

2.4 Amortissement sur une partie du domaine

On considère maintenant que le terme d'amortissement dans (3) n'agit pas sur tout le domaine, mais uniquement sur une partie $\omega \subset \Omega$. On s'intéresse ainsi au problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \Delta u(t, x) - \alpha(t)\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t}(t, x), & t \in \mathbb{R}_+, x \in \Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ u(t, x) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, x \in \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (13)$$

où $\omega \subset \Omega$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 et $\rho(x) = 0$ si $x \in \Omega \setminus \omega$, $\rho(x) = \rho > 0$ si $x \in \omega$.

Question 2.9. Modifier la formulation variationnelle (11) pour pouvoir traiter le cas de (13). Modifier aussi la formulation variationnelle discrétisée en temps de la Question 2.2.

On fixe dans cette partie le domaine $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$, le disque unité, et $\omega =]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[\times \mathbb{R} \cap \Omega$, comme dans la Figure 1.

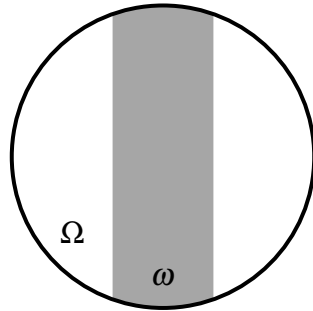


FIGURE 1 : Domaine Ω et région d'amortissement ω pour les Questions 2.10 et 2.11

Pour ce domaine¹, il est possible de montrer que, dans le cas $\alpha(t) \equiv 1$, toute solution de (13) converge exponentiellement vers l'origine, mais il n'y a pas de résultat sur la convergence vers l'origine des solutions de (13) pour des classes plus générales de signaux α .

1. Ce domaine satisfait ce qu'on appelle la *Condition Géométrique de Contrôle* (GCC, de l'anglais *Geometric Control Condition*) : pour tout point $x \in \Omega$, tout rayon lumineux issu de x suivant les lois de l'optique géométrique passe par ω en temps fini. Pour plus de détails, voir [1].

Question 2.10. Pour les cinq signaux $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$ choisis dans la Question 2.5, simuler la solution de (13) avec les mêmes valeurs de T_f, ρ, δ et θ et la même condition initiale (u_0, u_1) que dans la Question 2.5.

Question 2.11. Pour chacun des signaux α de la question précédente, tracer dans un graphique l'évolution en temps de la norme $\|u(t)\|_V^2 + \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_H^2$ de la solution approchée trouvée.

A Appendice : Systèmes à commutation

Les *systèmes hybrides* sont des systèmes dont le comportement est déterminé par l'interaction entre des dynamiques continues et discrètes. Tel est le cas, par exemple, d'un système de contrôle automatique de température d'une pièce, où la dynamique continue de la température à la fois dépend et influence l'état on/off du système de chauffage. La dynamique d'un moteur à combustion interne à quatre cycles est un autre exemple de système hybride, avec quatre états discrets, correspondant aux cycles du moteur, et des variables continues, telles que la température et la pression, dont la dynamique dépend du cycle du moteur à l'instant actuel et entraîne également des changements de cycle.

Les modèles par systèmes hybrides trouvent leur application dans plusieurs domaines, tels que le contrôle de systèmes mécaniques, le contrôle de processus industriels, l'industrie automobile, les systèmes électriques de puissance, le contrôle du trafic aérien, les processus chimiques, les systèmes de transport, parmi d'autres nombreuses applications. D'un point de vue théorique, la difficulté principale dans leur étude est le mélange des dynamiques continue et discrète.

Les *systèmes à commutation* correspondent au point de vue sur les systèmes hybrides où l'intérêt central est la dynamique continue. La variable discrète est vue comme des modes ou des sous-systèmes qui régissent la dynamique continue ; on ne s'intéresse donc pas spécifiquement à l'évolution de la variable discrète dans le temps, mais uniquement aux effets de cette évolution sur la dynamique continue. Typiquement, on considère donc une certaine classe d'évolutions discrètes possibles et on cherche à obtenir des propriétés sur la dynamique continue qui soient robustes par rapport à cette classe.

Dans le cas où α prend ses valeurs en $\{0, 1\}$ et est constante par morceaux, le système d'intérêt de ce projet (3) est un système à commutation : dans les intervalles de temps où α vaut 0, u est déterminée par l'équation non-amortie $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \Delta u(t, x)$, alors que, dans les intervalles de temps où α vaut 1, u est déterminée par l'équation amortie $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \Delta u(t, x) - \rho \frac{\partial u}{\partial t}(t, x)$. La commutation entre plusieurs sous-systèmes peut introduire de nouveaux phénomènes qui ne sont pas présents dans les sous-systèmes isolés, ce qui rend l'analyse de systèmes à commutation difficile, même si on se restreint au cadre plus simple de systèmes linéaires en dimension finie. Par exemple, il n'est pas très difficile de trouver deux matrices $A_0, A_1 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ayant des valeurs propres à partie réelle strictement négative et pour lesquelles le système $\dot{x}(t) = A_{\alpha(t)}x(t)$ admet une trajectoire dont la norme croît exponentiellement pour un certain choix de signal de commutation $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \{0, 1\}$; un tel couple de matrices est, par exemple, $A_0 = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}.$$

B Appendice : Systèmes à excitation persistante

Notre étude de (3) est une étude de stabilité asymptotique de l'origine : on cherche à vérifier numériquement que, sous certaines hypothèses sur le signal α , toute solution de (3) converge vers la fonction nulle. Comme c'est le cas en général pour les systèmes à commutation, on s'intéresse à établir des propriétés qui soient vraies non pas pour un seul *signal de commutation* α fixé, mais pour toute une classe \mathcal{G} de signaux α . Dans les intervalles de temps où $\alpha(t) \equiv 0$, le terme d'amortissement n'agit pas et la norme $\|u(t)\|_V^2 + \|\frac{du}{dt}(t)\|_H^2$ de la solution de (3) est conservée. Il est ainsi intéressant d'inclure dans la classe \mathcal{G} des conditions qui garantissent que $\alpha(t)$ est actif assez souvent.

Parmi les choix possibles, la classe des signaux à *excitation persistante* a attiré beaucoup d'attention récemment [2, 3] : étant données des constantes $T \geq \mu > 0$, on dit que la fonction mesurable $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ est un signal à excitation persistante, et on écrit $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$, si, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_t^{t+T} \alpha(s) ds \geq \mu. \quad (14)$$

Cette condition d'excitation persistante garantit ainsi que, dans chaque fenêtre de temps de longueur T , le terme d'amortissement de (3) va agir sur le système, et donne même une certaine "quantification" de son action par la borne μ .

Les signaux à excitation persistante peuvent être utilisés pour représenter plusieurs phénomènes, tels que des problèmes de transmission de signaux dans un système de contrôle, entraînant une action intermittente de certains signaux ; des paramètres dépendants du temps qui affectent l'efficacité de certaines parties d'un système, entraînant l'application effective d'un terme multiplié par $\alpha(t)$; l'allocation des ressources de contrôle, choisissant d'agir sur le système uniquement dans des certaines fenêtres de temps ou jusqu'à une certaine valeur de la commande. Un exemple plus concret présenté en [4] est celui d'un vaisseau spatial contrôlé par des actionneurs magnétiques, qui peut être décrit par le système

$$\dot{\omega} = S(\omega)\omega + g(t)u$$

avec $\omega \in \mathbb{R}^3$ la variable d'état représentant l'orientation du vaisseau, u une variable de commande, $S(\omega)$ une matrice dépendante de ω et $g(t)$ une matrice dépendante du temps avec $\text{rg}(g(t)) < 3$ pour tout temps t et satisfaisant une condition d'excitation persistante similaire à (14).

La condition d'excitation persistante a son origine dans les problèmes d'identification et de contrôle adaptatif. Dans ce type de problème, on s'intéresse à la stabilité de systèmes du type $\dot{x} = -P(t)x$ avec $P(t)$ une matrice symétrique positive. Dans le cas où P est bornée et à dérivée bornée, la condition d'excitation persistante de $P(t)$, dans le sens où $\alpha(t) = \xi^T P(t) \xi$ est un signal à excitation persistante pour tout vecteur ξ unitaire et pour des constantes T, μ indépendantes de ξ , est une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité exponentielle globale de ce système.

L'intérêt récent par les systèmes à excitation persistante a permis d'obtenir plusieurs résultats, surtout concernant les problèmes de stabilité et stabilisation en dimension finie, mais il reste encore plusieurs questions ouvertes qui font de ce sujet un thème de recherche actif.

Références

- [1] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch. Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary. *SIAM J. Control Optim.*, 30(5) :1024–1065, 1992.
- [2] Y. Chitour, G. Mazanti, and M. Sigalotti. Stabilization of persistently excited linear systems. In J. Daafouz, S. Tarbouriech, and M. Sigalotti, editors, *Hybrid Systems with Constraints*, chapter 4. Wiley-ISTE, London, UK, 2013.
- [3] F. Hante, M. Sigalotti, and M. Tucsnak. On conditions for asymptotic stability of dissipative infinite-dimensional systems with intermittent damping. *Journal of Differential Equations*, 252(10) :5569–5593, 2012.
- [4] M. Lovera and A. Astolfi. Global spacecraft attitude control using magnetic actuators. In *Advances in dynamics and control*, volume 2 of *Nonlinear Syst. Aviat. Aerosp. Aeronaut. Astronaut.*, pages 1–13. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.