Schéma numérique pour l'équation du télégraphe

Sujet proposé par X. Blanc
blanc@ann.jussieu.fr

1 Présentation du problème

L'équation dite du télégraphe, ou équation de la chaleur hyperbolique, s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial t} + \dfrac{1}{\varepsilon}\operatorname{div}(F) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial t} + \dfrac{1}{\varepsilon}\nabla E + \dfrac{\kappa}{\varepsilon^2}F = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où $E = E(x,t) \in \mathbb{R}$ représente une énergie, $F = F(x,t) \in \mathbb{R}^d$ un flux d'énergie. Les variables sont $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ la position, et $t \geq 0$ le temps. La dimension sera soit $d = 1$ soit $d = 2$. Le paramètre κ est une fonction de x, et $\varepsilon > 0$ est une constante.

Ce système, pour être bien posé, doit être complété par une condition initiale $E_0(x), F_0(x)$:

$$E(x,0) = E_0(x), \quad F(x,0) = F_0(x). \tag{2}$$

On applique également des conditions de bord. Dans le cas présent, on utilisera soit des conditions de bord de Dirichlet, soit des conditions de bord de Neumann :

$$E(x,t) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \partial\Omega, \tag{3}$$

ou bien

$$F(x,t) \cdot n = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \partial\Omega, \tag{4}$$

où n désigne la normale extérieur au domaine Ω.

Comme son nom l'indique, cette équation modélise la propagation d'un signal dans un fil métallique (c'est le cas $d = 1$). Elle peut également modéliser un transfert de chaleur à très haute énergie, ou bien sur des temps très courts. Dans ce dernier cas, le paramètre $\varepsilon > 0$ est petit, et le système devient singulier.

2 Étude théorique

2.1 Existence et unicité

On suppose dans cette partie que κ est constant, et que les solutions considérées sont suffisamment régulières pour que tous les termes considérés aient un sens.

Question 1. Démontrer qu'il est possible d'éliminer F du système, et de se ramener à l'équation suivante :

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \kappa \frac{\partial E}{\partial t} - \Delta E = 0. \tag{5}$$

Donner les conditions initiales correspondantes. Dans le cas des conditions aux limites de Neumann (4), quelles sont les conditions aux limites pour (5) ?

Question 2. Utiliser le changement de variable $u(x,t) = E(x,t)e^{\lambda t}$, avec λ bien choisi, pour obtenir l'équation

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u - \frac{\kappa^2}{4\varepsilon^2} u = 0.$$

On admettra que cette équation, avec les conditions initiales définies ci-dessus et des conditions de bord de type (3) ou (4), est bien posée (voir le théorème 8.3.1 et la remarque 8.3.3 du polycopié).

Question 3. Quantités conservées par l'équation.

3.a En multipliant la première équation de (1) par E et la deuxième par F, démontrer que les conditions de bord (3) ou (4) impliquent

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega \left(E^2(x,t) + |F|^2(x,t)\right) dx\right) + \frac{\kappa}{\varepsilon^2}\int_\Omega |F(x,t)|^2 dx = 0.$$

En déduire que la quantité

$$\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(E^2(x,t) + |F|^2(x,t)\right) dx,$$

est une fonction décroissante de t.

3.b Dans le cas de conditions de Neumann, utiliser une méthode similaire pour démontrer que l'énergie du système, à savoir

$$\mathcal{E}(t) = \int_\Omega E(x,t) dx,$$

est constante.

3.c Dans le cas des conditions de Dirichlet, démontrer que le flux total, à savoir

$$\mathcal{F}(t) = \int_\Omega F(x,t) dx,$$

vérifie $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(0)e^{-\frac{\kappa t}{\varepsilon^2}}$.

Question 4. Ecrire une formulation variationnelle du système (1) avec les conditions de bord (3) d'une part, et les conditions (4) d'autre part.

3 Schéma numérique

On constate que, formellement, quand $\varepsilon \to 0$, l'équation (5) "converge" vers une équation de la chaleur. Comme, en pratique, ε peut être très petit, il est important d'utiliser des schémas qui préservent cette propriété.

3.1 Discrétisation en temps

Question 5. On discrétise en temps (mais pas en espace) le système (1). On utilisera les notations usuelles : $\Delta t > 0$ est le pas de temps, $E^n(x)$ est un approximation de $E(n\Delta t, x)$ et $F^n(x)$ est un approximation de $F(n\Delta t, x)$.

5.a Pour une discrétisation explicite, donner le système correspondant.

5.b Dans le cas d'une discrétisation implicite, éliminer F^{n+1} de l'équation vérifiée par E^{n+1} pour obtenir le système

$$\begin{cases} E^{n+1} - \dfrac{\Delta t^2}{\varepsilon^2} \operatorname{div}\left(\kappa \nabla E^{n+1}\right) = E^n - \dfrac{\Delta t}{\varepsilon} \operatorname{div}\left(\kappa F^n\right). \\ F^{n+1} = \kappa F^n - \kappa \dfrac{\Delta t}{\varepsilon} \nabla E^{n+1}. \end{cases} \tag{6}$$

Question 6. Etude de stabilité. On se place en dimension 1, et on suppose que $\Omega = \mathbb{R}$, et que κ est une constante.

6.a Dans le cas du schéma explicite, appliquer la transformée de Fourier au schéma. En déduire une condition de stabilité.

6.b Faire le même travail sur le schéma (6), et en déduire que ce schéma est inconditionnellement stable.

Question 7. Ecrire les formulations variationnelles correspondant, d'une part, au schéma explicite, et d'autre part au schéma (6).

3.2 Discrétisation en espace

On considère, en plus de la discrétisation en espace, la discrétisation sur un espace d'éléments finis. On appelle $(\chi_j)_{1 \le j \le N_E}$ la base d'éléments finis utilisée pour discrétiser E, et $(\phi_j)_{1 \le j \le N_F}$ celle utilisée pour discrétiser F.

Question 8.

8.a Ecrire la formulation variationnelle discrète en espace correspondant au schéma explicite.

8.b Même question pour la discrétisation en espace de (6).

8.c Dans chaque cas, vérifier que, quand $\varepsilon \to 0$, le schéma converge vers la discrétisation de l'équation de diffusion sur E :

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \operatorname{div}\left(\frac{1}{\kappa} \nabla E\right) = 0.$$

Pour cela, on admettra que la solution peut se développer en puissance de ε quand $\varepsilon \to 0$:

$$E^n = E_0^n + \varepsilon E_1^n + \dots, \quad F^n = F_0^n + \varepsilon F_1^n + \dots$$

4 Implémentation numérique

4.1 Dimension un

Question 9.

9.a Avec Scilab, écrire une discrétisation en différences finies du problème explicite. On utilisera des conditions aux bord de Dirichlet (3), et des différences finies centrées pour calculer les approximations des dérivées. Le domaine spatial est supposé être le segment $\Omega =]0, 1[$. On n'utilisera que la version implicite du schéma, avec des conditions au bord de Dirichlet (3).

9.b On suppose que $\kappa = \pi$, $\varepsilon = 0.5$. Vérifier que le couple E, F défini par

$$E(x,t) = \sin(\pi x)(1 + 2\pi t)e^{-2\pi t},$$

$$F(x,t) = -2\pi \cos(\pi x) t e^{-2\pi t},$$

est solution du système. Quelles sont les données initiales correspondantes ? Utiliser le programme de la question précédente pour étudier la convergence du schéma en norme L^2 quand $\Delta x \to 0$. On utilisera un pas de temps fixe à $\Delta t = 10^{-6}$, et des pas d'espaces respectivement de $\Delta x = 0.1$, $\Delta x = 0.05$, $\Delta x = 0.025$, $\Delta x = 0.0125$. On calculera l'erreur relative en norme L^2 d'espace au temps final $T = 0.5$. Quel est l'ordre du schéma en espace ?

9.c On suppose maintenant que $\kappa = 0$ et $\varepsilon = 1$. On définit la fonction E_0 par

$$E_0(x) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{4}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vérifier que le couple E, F défini par

$$E(x,t) = \frac{1}{2} \left(E_0(x-t) + E_0(x+t) \right),$$

$$F(x,t) = \frac{1}{2} \left(E_0(x-t) - E_0(x+t) \right).$$

est solution du système avec conditions de Dirichlet au bord pour $t < \frac{3}{4}$. Quelles sont les données initiales correspondantes ? Utiliser le programme de la question précédente pour étudier la convergence du schéma en norme L^2. On utilisera les mêmes valeurs de Δx et Δt qu'à la question précédente. Quel est l'ordre de convergence en Δx ? Superposer la courbe de la solution exacte et de la solution numérique au temps $T = 0.5$. Que constate-t-on ?

4.2 Dimension deux

Question 10. Avec FreeFem++, écrire un programme qui calcule la solution du système (1) avec les conditions de Dirichlet aux bords sur $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$. Ici encore, on utilisera uniquement le schéma implicite en temps. L'inconnue E sera discrétisée à l'aide d'éléments finis P^1 et l'inconnue F avec des éléments finis P^0. Les conditions aux bords seront des conditions de Dirichlet (3).

Question 11. On suppose que $\kappa = 2\pi$, $\varepsilon^2 = 0.5$. Vérifier que le couple E, F défini par

$$E(x,y,t) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)(1+2\pi t)e^{-2\pi t},$$

$$F(x,y,t) = -\sqrt{2}\pi \begin{pmatrix} \cos(\pi x)\sin(\pi y) \\ \sin(\pi x)\cos(\pi y) \end{pmatrix} te^{-2\pi t},$$

est solution du système. Quelles sont les données initiales correspondantes ? Utiliser le programme de la question précédente pour étudier la convergence du schéma en norme L^2 quand $\Delta x \to 0$. On utilisera un pas de temps fixe à $\Delta t = 10^{-6}$, et des pas d'espaces respectivement de $\Delta x = 0.1$, $\Delta x = 0.05$, $\Delta x = 0.025$, $\Delta x = 0.0125$. On calculera l'erreur relative en norme L^2 d'espace au temps final $T = 0.5$ Quel est l'ordre du schéma en espace ?

Question 12. On considère maintenant le cas test suivant : le domaine est $\Omega =]0,5[\times]0,5[$, $\varepsilon = 1$ et le coefficient κ vaut

$$\kappa(x,y) = \begin{cases} 100 & \text{si } (x,y) \in [1,2]\times[1,2], \\ 100 & \text{si } (x,y) \in [1,2]\times[3,4], \\ 100 & \text{si } (x,y) \in [3,4]\times[2,3], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On résout l'équation (1) avec des conditions au bord de Neumann non homogène : on remplace (3) par

$$F(x,t)\cdot n = \begin{cases} 10^4 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, un flux de chaleur entrant est imposé sur le bord gauche. Un front de chaleur va donc se propager de la gauche vers la droite, en étant perturbé par les carrés opaques (zones où $\kappa = 100$).

12.a Ecrire la formulation variationnelle discrète du problème correspondant.

12.b Adapter le code FreeFem++ pour calculer la solution de ce problème avec comme donne initale $E = 0$ et $F = 0$. Afficher la solution à différents temps : $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$, $t = 4$, $t = 5$, $t = 6$. On utilisera une discrétisation spatiale correspondant à $\Delta x = 5 \times 10^{-2}$ set un pas de temps égal à $\Delta t = 10^{-2}$.