ECOLE POLYTECHNIQUE
MAJEURE SeISM
Conception optimale de structures (G. Allaire)
Corrigé de l'examen écrit du 24 Mars 2004 (2 heures)

1 Optimisation paramétrique : 6 points

1. La formulation variationnelle de l'équation qui donne le déplacement u est : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega h\nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_\Omega f \phi \, dx \quad \forall \, \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Par définition le Lagrangien est la somme de la fonction objectif et de la formulation variationnelle de l'équation d'état considérée comme une contrainte. Donc, pour tout $(h, v, q) \in \mathcal{U}_{ad} \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, on a

$$\mathcal{L}(h, v, q) = \int_\Omega |\nabla v - \nabla u_0|^2 dx + \int_\Omega h\nabla v \cdot \nabla q \, dx - \int_\Omega f q \, dx.$$

La formulation variationnelle de l'équation adjointe est par définition donnée par

$$\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(h, u, p), \phi \rangle = 0 \quad \forall \, \phi \in H_0^1(\Omega),$$

ce qui est équivalent à

$$2 \int_\Omega \nabla(u - u_0) \cdot \nabla \phi dx + \int_\Omega h\nabla p \cdot \nabla \phi \, dx = 0 \quad \forall \, \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Par conséquent l'état adjoint $p \in H_0^1(\Omega)$ est solution de

$$\begin{cases} -\text{div}\,(h\nabla p) = 2\Delta(u - u_0) & \text{dans } \Omega, \\ p = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

2. La dérivée de la fonction objectif $J(h)$ est donnée, pour tout $k \in L^\infty(\Omega)$, par

$$\langle J'(h), k \rangle = \int_\Omega J'(h) k \, dx = \langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h}(h, u, p), k \rangle = \int_\Omega k \nabla u \cdot \nabla p \, dx.$$

Par conséquent, on a $J'(h) = \nabla u \cdot \nabla p$.

2 Optimisation géométrique : 7 points

1. La formulation variationnelle du problème s'obtient en multipliant l'équation par une fonction test ϕ, en intégrant par parties, et en utilisant les conditions aux limites. Tout calcul fait, la formulation variationnelle est : trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que
$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx + k \int_\Gamma u\phi \, ds = \int_{\Gamma_N} \phi \, ds \quad \forall \phi \in H^1(\Omega).$$
2. Le Lagrangien est la somme de la fonction objectif et de la formulation variationnelle, c'est-à-dire, pour tout $(\Omega, v, q) \in \mathcal{U}_{ad} \times H^1(\mathbb{R}^2) \times H^1(\mathbb{R}^2)$, on a
$$\mathcal{L}(\Omega, v, q) = \int_{\Gamma_N} v \, ds + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla q \, dx + k \int_\Gamma vq \, ds - \int_{\Gamma_N} q \, ds$$
(On a bien pris soin de définir les fonctions v et q sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et pas sur Ω pour avoir ainsi des variables indépendantes.) La formulation variationnelle de l'équation adjointe est
$$\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\Omega, u, p), \phi \rangle = 0 \quad \forall \phi \in H^1(\mathbb{R}^2),$$
ce qui est équivalent à
$$\int_{\Gamma_N} \phi \, ds + \int_\Omega \nabla \phi \cdot \nabla p \, dx + k \int_\Gamma \phi p \, ds = 0 \quad \forall \phi \in H^1(\mathbb{R}^2).$$
Par conséquent l'état adjoint $p \in H^1(\mathbb{R}^2)$ est solution de
$$\begin{cases} -\Delta p = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial n} = -1 & \text{sur } \Gamma_N, \\ \frac{\partial p}{\partial n} + kp = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$
ce qui implique que $p = -u$ (le problème est auto-adjoint).
3. Formellement la dérivée de forme s'obtient par
$$J'(\Omega)(\theta) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega, u, p)(\theta) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega, u, -u)(\theta).$$
Comme Γ_N est fixe et seul Γ peut varier, on en déduit
$$J'(\Omega)(\theta) = -\int_\Gamma \theta \cdot n \left(|\nabla u|^2 + k\frac{\partial u^2}{\partial n} + kHu^2 \right) ds,$$
où H est la courbure moyenne. Or $\frac{\partial u}{\partial n} = -ku$ sur Γ, donc
$$J'(\Omega)(\theta) = -\int_\Gamma \theta \cdot n \left(|\nabla u|^2 + ku^2(H - 2k) \right) ds.$$

3 Homogénéisation : 7 points

1. Le principe de minimisation de l'énergie permet d'écrire
$$-\frac{1}{2}\int_\Omega u\,dx = \min_{v\in H_0^1(\Omega)} \frac{1}{2}\int_\Omega A^*\nabla v\cdot\nabla v\,dx - \int_\Omega v\,dx,$$
donc le problème est équivalent à
$$\min_{(\theta,A^*)\in\mathcal{U}_{ad}}\ \min_{v\in H_0^1(\Omega)} \frac{1}{2}\int_\Omega A^*\nabla v\cdot\nabla v\,dx - \int_\Omega v\,dx + \ell\int_\Omega \theta\,dx.$$
On peut échanger l'ordre des minimisations, et à v et θ fixés il faut trouver le tenseur $A^*\in G_\theta$ qui minimise $A^*\nabla v\cdot\nabla v$. Grâce au cours, on sait qu'il suffit de prendre un laminé de rang 1 et de l'aligner avec ∇v de manière à ce qu'il soit de conductivité minimale dans cette direction. Autrement dit
$$\min_{A^*\in G_\theta} A^*\nabla v\cdot\nabla v \;=\; \lambda^-(\theta)|\nabla v|^2,$$
d'où le résultat.
2. Il suffit de calculer en tout point $x\in\Omega$ le minimum de
$$j(\theta)=\frac{1}{2}\lambda^-(\theta)|\nabla v|^2+\ell\theta$$
sur l'intervalle $[0,1]$. On remarque que j est convexe et admet un unique point de minimum en
$$\theta^*=\max\left(0,\min\left(1,|\nabla v|\sqrt{\frac{\alpha\beta}{2\ell(\beta-\alpha)}}-\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\right)\right).$$
Donc la minimisation de la fonction objectif est équivalente à
$$\min_{v\in H_0^1(\Omega)}\int_\Omega F(\nabla v)\,dx-\int_\Omega v\,dx$$
avec $F(\nabla v)=j(\theta^*)$, c'est-à-dire
$$F(\nabla v)=\begin{cases}\frac{\alpha}{2}|\nabla v|^2+\ell & \text{si } \theta^*=1\\ \frac{\beta}{2}|\nabla v|^2 & \text{si } \theta^*=0\\ |\nabla v|\sqrt{\frac{2\alpha\beta\ell}{\beta-\alpha}}-\frac{\alpha\ell}{\beta-\alpha} & \text{sinon}\end{cases}$$
qui est bien une fonction convexe car F est l'enveloppe convexe du minimum des deux paraboles $\frac{\alpha}{2}|\nabla v|^2+\ell$ et $\frac{\beta}{2}|\nabla v|^2$ (faire un dessin pour s'en convaincre). La fonctionnelle de v que l'on minimise est convexe et infinie à l'infini, donc elle admet un point de minimum ainsi que toutes ses formes équivalentes précédentes.