ECOLE POLYTECHNIQUE
Programme d'Approfondissement SISM
Conception optimale de structures (G. Allaire)
Examen écrit du 18 Mars 2009 (2 heures)

1 Optimisation paramétrique : 10 points

On considère un problème de conduction de la chaleur dans un domaine plan mince, d'épaisseur h et de surface moyenne Ω (un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^2$), occupé par un fluide animé d'une vitesse plane donnée $V(x) : \Omega \mapsto \mathbb{R}^2$, supposée incompressible, $\mathrm{div} V = 0$ dans Ω, et vérifiant une condition de non glissement sur le bord $V = 0$ sur $\partial\Omega$. Pour un terme source $f \in L^2(\Omega)$, la température, supposée nulle sur le bord, est la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de

$$\left\{ \begin{array}{ll} V \cdot \nabla u - \mathrm{div}\,(h \nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{1}$$

(On a négligé l'épaisseur variable dans le terme de convection.) L'épaisseur $h(x)$ appartient à l'ensemble admissible

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ h \in L^\infty(\Omega)\ , \quad h_{max} \geq h(x) \geq h_{min} > 0 \text{ dans } \Omega\,, \int_\Omega h(x)\,dx = h_0|\Omega| \right\}.$$

On cherche à minimiser une moyenne pondérée de la température. On considère donc la fonction objectif

$$\inf_{h \in \mathcal{U}_{ad}} \left\{ J(h) = \int_\Omega h(x)|u(x)|^2\,dx \right\}.$$

1. Donner le Lagrangien du problème et en déduire la formulation variationnelle et le problème aux limites vérifiés par l'état adjoint .
2. Calculer la dérivée par rapport à h de la fonction objectif $J(h)$.
3. Si on avait choisi une autre fonction objectif,

$$\tilde{J}(h) = \int_\Omega f(x)\,u(x)\,dx,$$

   le problème serait-il auto-adjoint ?

2 Optimisation géométrique : 10 points

On considère l'optimisation d'une membrane, d'épaisseur constante, représentée par un domaine plan Ω (un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^2$). Le bord de ce domaine est divisé en trois parties de mesures non nulles, $\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D$.

Les bords Γ_D et Γ_N sont fixes et seul Γ peut varier. On introduit l'ensemble admissible des formes

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \Omega \subset \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (\Gamma_D \cup \Gamma_N) \subset \partial\Omega \right\}.$$

Le déplacement $u(x)$ de la membrane est la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma_N, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \end{cases} \tag{2}$$

où $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ est une force volumique et $g \in L^2(\Gamma_N)$ une force surfacique données. Soit $u_0(x) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ un déplacement cible. On considère la fonction objectif

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} \left\{ J(\Omega) = \int_\Gamma |u - u_0|^2 ds \right\},$$

où u est la solution de (2).

1. Donner le Lagrangien du problème et en déduire la formulation variationnelle et le problème aux limites vérifiés par l'état adjoint .
2. Calculer (formellement) la dérivée de forme de la fonction objectif.
3. Si pour une forme Ω on trouve que $u = u_0$ sur Γ, quelle est alors la valeur de la dérivée de forme ?