Transport et diffusion

G. ALLAIRE

Cours no. 8 — le 01/II/2016

Calcul critique (fin)

- ☞ Calcul critique
  - ➸ Problèmes à sources
  - ➸ Analyse de sensibilité
- ☞ Calcul numérique de la criticité

(1) Calcul critique

- But: montrer que la criticité est utile pour résoudre d'autres problèmes.
- Cadre: pour éviter des questions techniques délicates on travaille sur une **version matricielle** des problèmes.

Problème critique:

$$A\psi = \frac{1}{k} F\psi \,,$$

où F est la matrice de fission et A est la matrice de diffusion ou de transport.

Hypothèses: A inversible, A^{-1} et F positifs, $K = A^{-1}F$ strictement positif.

Le Théorème de Perron-Frobenius affirme que K admet une plus grande valeur propre réelle et simple $k_{\rm eff}$.

Problème à source: étant donné b, trouver la solution u de

$$Au = Fu + b\,.$$

Proposition. Il existe une unique solution u si et seulement si 1 n'est pas valeur propre (automatique si le milieu est sous-critique).

Si le milieu est sous-critique, $k_{\text{eff}} < 1$, alors on a le principe du maximum, c'est-à-dire que $b \geq 0$ implique que $u \geq 0$.

Si le milieu est sur-critique, $k_{\text{eff}} > 1$, alors $b \geq 0$, n'implique pas que $u \geq 0$.

Remarque. La violation du principe du maximum dans le cas sur-critique est évidemment non physique, mais pas surprenante. En effet, dans ce cas le problème d'évolution n'a pas de limite stationnaire.

Preuve. Avec la notation $K = A^{-1}F$ l'équation est équivalente à

$$(\,\mathrm{Id} - K)u = A^{-1}b$$

et l'alternative de Fredholm dit qu'il existe une solution unique si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de K.

Lorsque $k_{\text{eff}} < 1$, on sait grâce au Théorème de Perron-Frobenius que $\rho(K) = k_{\text{eff}} < 1$ et donc la série suivante converge

$$(\,\mathrm{Id} - K)^{-1} = \sum_{p \geq 0} K^p.$$

Comme K est positif (A^{-1} aussi), on en déduit que $b \geq 0$ implique $u \geq 0$.

Preuve (suite). Supposons maintenant que $k_{\text{eff}} > 1$. Ecrivons alors le problème critique adjoint

$$A^*\psi^* = \frac{1}{k_{\text{eff}}} F^*\psi^* \,,$$

où $\psi^* > 0$ est le premier vecteur propre positif. On multiplie $Au = Fu + b$ par ψ^* pour obtenir

$$\langle u, A^*\psi^* \rangle = \langle u, F^*\psi^* \rangle + \langle b, \psi^* \rangle$$

qui devient

$$\left(\frac{1}{k_{\text{eff}}} - 1 \right) \langle u, F^*\psi^* \rangle = \langle b, \psi^* \rangle \,.$$

Si $b \geq 0$ et $b \neq 0$, comme $\psi^* > 0$, le membre de droite est strictement positif et, puisque $1/k_{\text{eff}} < 1$, on doit avoir $\langle u, F^*\psi^* \rangle = \langle Fu, \psi^* \rangle < 0$ ce qui oblige Fu, donc u, à avoir des composantes négatives.

Problèmes légèrement sous-critiques

Proposition. On suppose que le milieu de référence est critique, $k_{\text{eff}} = 1$ et

$$A\psi = F\psi\,, \quad A^*\psi^* = F^*\psi^*\,, \qquad \text{normalisés par } \|\psi\| = 1,\ \langle \psi, \psi^* \rangle = 1.$$

Soit $0 < \epsilon \ll 1$. On atténue la production/fission par un facteur $(1 - \epsilon)$. Pour ce milieu légèrement sous-critique on considère le problème à sources, petites de l'ordre de ϵ,

$$Au_\epsilon = (1 - \epsilon)Fu_\epsilon + \epsilon b\,.$$

Alors la solution vérifie

$$u_\epsilon = \langle A^{-1}b, \psi^* \rangle\, \psi + \mathcal{O}(\epsilon)\,.$$

Preuve. L'équation $Au_\epsilon = (1-\epsilon)Fu_\epsilon + \epsilon b$ est équivalente à

$$(\,\mathrm{Id} - (1-\epsilon)K)u_\epsilon = \epsilon z \quad \text{avec } K = A^{-1}F \text{ et } z = A^{-1}b\,.$$

Par le Théorème de Perron-Frobenius on sait que le sous-espace propre associé à $k_{\text{eff}} = 1$ est $\text{Vect}(\psi)$. Tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire

$$v = \langle v, \psi^* \rangle \psi + \tilde{v} \quad \text{avec } \tilde{v} = v - \langle v, \psi^* \rangle \psi \text{ tel que } \langle \tilde{v}, \psi^* \rangle = 0\,.$$

Donc $\text{Vect}(\psi^*)^\perp$ est un sous-espace supplémentaire de $\text{Vect}(\psi)$ dans $\mathbb{R}^n$, qui est stable par K. Comme toutes les valeurs propres $k \neq k_{\text{eff}}$ de K, vérifient $|k| < k_{\text{eff}} = 1$, on en déduit que $(\,\mathrm{Id} - (1-\epsilon)K)$ est inversible sur $\text{Vect}(\psi^*)^\perp$ et que la norme de l'inverse est bornée indépendamment de ϵ. On écrit

$$z = \langle z, \psi^* \rangle \psi + \tilde{z} \;\text{ et }\; u_\epsilon = \langle u_\epsilon, \psi^* \rangle \psi + \tilde{u}_\epsilon \quad \text{avec } \tilde{z}\,, \tilde{u}_\epsilon \in \text{Vect}(\psi^*)^\perp.$$

Un simple calcul montre alors que

$$\langle u_\epsilon, \psi^* \rangle = \langle z, \psi^* \rangle \;\text{ et }\; |\tilde{u}_\epsilon| \le \left\| (\,\mathrm{Id} - (1-\epsilon)K)^{-1}\big|_{\text{Vect}(\psi^*)^\perp} \right\| \, |\epsilon \tilde{z}| \le C\epsilon |\tilde{z}|$$

Analyse de sensibilité

But: étudier la variation de la criticité en fonction des variations des coefficients ou sections efficaces (très important en pratique).

Proposition. La variation du facteur multiplicatif effectif sous l'effet de variations δA et δF des opérateurs de transport/diffusion et fission est

$$\delta k = k_{\mathrm{eff}}^2 \frac{\langle \left(-\delta A + \frac{1}{k_{\mathrm{eff}}} \delta F \right) \psi, \psi^* \rangle}{\langle F\psi, \psi^* \rangle} \, .$$

Remarque. On comprend à nouveau le nom de fonction d'importance pour ψ^*. Puisque $\psi, \psi^*, F \geq 0$, on en déduit qu'une augmentation des fissions, $\delta F \geq 0$, ou une diminution de l'absorption, $\delta A \leq 0$, contribue à une augmentation de la criticité.

Lemme technique. Si une valeur propre d'une matrice est simple alors elle et son vecteur propre, convenablement normalisé, sont (localement) continuement dérivables comme fonctions de cette matrice.

Remarque. L'hypothèse de simplicité de la valeur propre est essentielle !

Preuve de la Proposition. On dérive $A\psi = \frac{1}{k_{\text{eff}}} F\psi$ pour obtenir

$$\left(A - \frac{1}{k_{\text{eff}}} F\right) \delta\psi = \left(-\delta A + \frac{1}{k_{\text{eff}}} \delta F - \frac{\delta k}{k_{\text{eff}}^2} F\right) \psi.$$

On ne peut résoudre que si le second membre est orthogonal à ψ^*. On multiplie alors par ψ^*

$$\begin{aligned}
\langle \left(A - \frac{1}{k_{\text{eff}}} F\right) \delta\psi, \psi^* \rangle \quad &= \langle \delta\psi, \left(A^* - \frac{1}{k_{\text{eff}}} F^*\right) \psi^* \rangle = 0 \\
&= \langle \left(-\delta A + \frac{1}{k_{\text{eff}}} \delta F - \frac{\delta k}{k_{\text{eff}}^2} F\right) \psi, \psi^* \rangle
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit la formule voulue.

Remarquons que $\delta\psi$ n'est défini qu'à l'addition d'un multiple de ψ près. Mais en différentiant la normalisation $\|\psi\| = 1$, on obtient $\langle \psi, \delta\psi \rangle = 0$, ce qui fixe l'indétermination pour $\delta\psi$.

(2) Calcul numérique de la criticité

Méthode de la puissance pour calculer la plus grande valeur propre d'une matrice K de valeurs propres $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

Nous faisons l'hypothèse que K est strictement positive donc, par Perron-Frobenius, il existe une valeur propre dominante simple

$$\lambda_n > |\lambda_i| \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq n-1,$$

et son vecteur propre associé e_n peut être choisi strictement positif.

Algorithme

1. Initialisation: $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_0 > 0$.

2. Itérations: pour $k \geq 1$

   1. $y_k = K x_{k-1}$

   2. $x_k = y_k / \max(y_k)$ où $\max(y)$ désigne la plus grande composante en module du vecteur y,

   3. test de convergence: si $\|x_k - x_{k-1}\| \leq \varepsilon$, on arrête.

Dans le test de convergence, ε est typiquement égal à 10^{-6}.

Si $\delta_k = x_k - x_{k-1}$ est petit, alors x_k est un vecteur propre approché de K de valeur propre approchée $\max(y_k)$ car

$$K x_k - \max(y_k) x_k \; = \; K \delta_k \, .$$

Proposition. On suppose que la matrice K est strictement positive. Alors la méthode de la puissance converge, c'est-à-dire que

$$\lim_{k\to+\infty} \max(y_k) = \lambda_n, \qquad \lim_{k\to+\infty} x_k = e_n / \max(e_n).$$

De plus, la vitesse de convergence est proportionnelle au rapport $|\lambda_{n-1}|/\lambda_n$.

Preuve. Supposons pour simplifier que K est diagonalisable avec des vecteurs propres $(e_1, \cdots, e_n)$ correspondant aux valeurs propres $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Soit $x_0 = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i > 0$ le vecteur initial. Par Perron-Frobenius, le vecteur propre adjoint e_n^* de K^* vérifie aussi $e_n^* > 0$, donc $\beta_n = x_0 \cdot e_n^* > 0$. Une récurrence facile montre que

$$x_k = \frac{K^k x_0}{\max(K^k x_0)} = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i (\lambda_i)^k e_i}{\max\left(\sum_{i=1}^n \beta_i (\lambda_i)^k e_i\right)} = \frac{e_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\beta_i}{\beta_n} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^k e_i}{\max\left(e_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\beta_i}{\beta_n} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^k e_i\right)}.$$

Comme $|\lambda_i| < \lambda_n$, x_k converge vers $e_n / \max(e_n)$. Comme $y_k = K x_k$ converge vers $\lambda_n e_n / \max(e_n)$, on en déduit que $\max(y_k)$ converge vers λ_n.

Preuve (suite). Si K n'est pas diagonalisable, alors il faut utiliser la base $(e_1, \cdots, e_n)$ de sa forme de Jordan. Pour fixer les idées et simplifier les notations, supposons que tous les vecteurs e_i sont en fait des vecteurs propres sauf e_{n-2} qui appartient au sous-espace spectral de la valeur propre $\lambda_{n-1} = \lambda_{n-2}$ sans être vecteur propre. Autrement dit, on a

$$Ke_{n-2} = \lambda_{n-1} e_{n-2} + e_{n-1} \quad \text{ et } Ke_i = \lambda_i e_i \text{ pour } i \neq (n-1)\,.$$

Dans ce cas, la formule ci-dessus pour x_k doit être modifiée comme suit

$$x_k = \frac{\beta_n e_n + (\beta_{n-1} + k\beta_{n-2}/\lambda_{n-1}) \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)^k e_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} \beta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^k e_i}{\max\left(\beta_n e_n + (\beta_{n-1} + k\beta_{n-2}/\lambda_{n-1}) \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)^k e_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} \beta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^k e_i\right)}.$$

On a toujours les mêmes convergences de x_k et $\max(y_k)$ puisque $k(\lambda_{n-1}/\lambda_n)^k$ tends toujours vers zéro lorsque k tends vers $+\infty$, même si la convergence est un peu plus lente.

Algorithme de la puissance “inverse”

But: calculer la **plus petite** valeur propre d’une matrice A.

1. Initialisation: $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_0 > 0$.
2. Itérations: pour $k \geq 1$
   1. résoudre $Ay_k = x_{k-1}$
   2. $x_k = y_k / \max(y_k)$
   3. test de convergence: si $\|x_k - x_{k-1}\| \leq \varepsilon$, on arrête.

Si $\delta_k = x_k - x_{k-1}$ est petit, alors x_{k-1} est un vecteur propre approché de valeur propre approchée $1/\max(y_k)$ car

$$Ax_{k-1} - \frac{x_{k-1}}{\max(y_k)} = -A\delta_k \, .$$

On suppose que A est une M-matrice irréductible. Dans ce cas, on sait que A admet une plus petite valeur propre réelle simple λ_1 telle que

$$\lambda_1 < |\lambda_i| \quad \text{pour tout } 2 \leq i \leq n,$$

et son vecteur propre associé peut être choisi strictement positif.

Proposition. On suppose que A est une M-matrice irréductible. Alors la méthode de la puissance inverse converge, c'est-à-dire que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\max(y_k)} = |\lambda_1|, \quad \lim_{k\to+\infty} x_k = e_1/\max(e_1).$$

La vitesse de convergence est proportionnelle au rapport $\lambda_1/|\lambda_2|$.

Transport et diffusion

Cours no. 6bis — le 28/I/2016

$\boxed{\textbf{MOTIVATION : TAILLE CRITIQUE}}$

Exemple : considérons l'équation de Boltzmann linéaire monocinétique avec scattering isotrope et symétrie de type slab

$$\partial_t f + \mu \partial_x f = \sigma(1+\gamma)\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f d\mu - \sigma f \qquad \begin{cases} |x| < L \\ |\mu| < 1 \end{cases}$$

et conditions aux limites absorbantes au bord de l'intervalle $[-L, L]$

$$f(t, -L, +\mu) = f(t, L, -\mu) = 0\,, \quad 0 < \mu < 1\,,\ t > 0$$

Deux effets opposés :

a) $\gamma > 0 \Rightarrow$ création de particules en excès par rapport à l'absorption

b) fuite de particules au bord du domaine spatial $[-L, L]$

Intuition physique :

•à $\gamma > 0$ fixé, plus L est grand, moins l'effet de fuite au bord du domaine spatial est important

•à L fixé, plus $\gamma > 0$ est petit, plus l'excès de particules secondaires créées par le milieu est petit

Pbm de la taille critique : étant donnés les paramètres $\sigma > 0$ et $\gamma > 0$, trouver la taille $L > 0$ du domaine spatial pour laquelle il y a équilibre entre la création de particules secondaires ($\gamma > 0$) et l'effet de fuite au bord

$\Leftrightarrow$ la plus grande valeur propre de l'équation de Boltzmann linéaire est 0

Difficultés :

1) le problème spectral pour l'équation de Boltzmann linéaire est en dimension infinie et pas auto-adjoint $\Rightarrow$ pas "diagonalisable" a priori ; peut-on parler de sa "plus grande valeur propre" ?

2) comment calculer cette "plus grande valeur propre" ? peut-on se servir de la modélisation par l'équation de diffusion ?

Valeurs propres de l'opérateur de diffusion 1D

Considérons le problème de Dirichlet aux valeurs propres

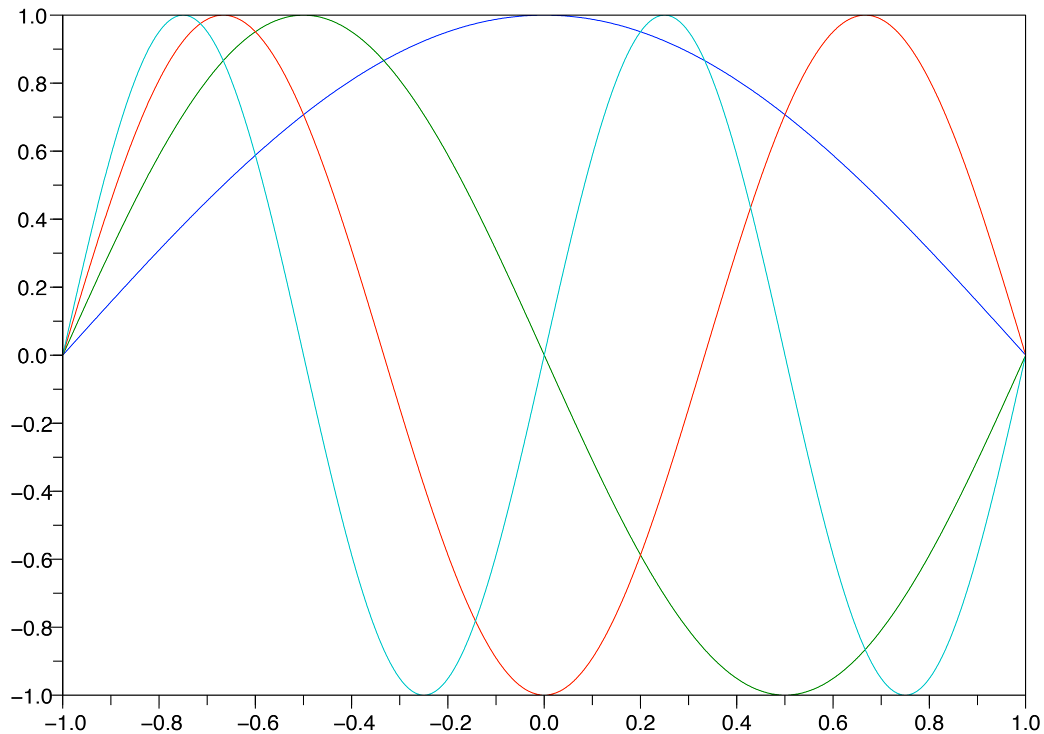
$$\begin{cases} -\dfrac{d^2\phi}{dx^2}(x) = \lambda\phi(x)\,, & |x| < L \\ \phi(+L) = \phi(-L) = 0 \end{cases}$$

Fonctions propres et valeurs propres associées :

$$\phi_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{2L}(x+L)\right)\,, \qquad \lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{4L^2}\,, \qquad k \in \mathbf{N}^*$$

Plus petite valeur propre : pour $k = 1$

$$\phi_1(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\,, \qquad \lambda_1 = \frac{\pi^2}{4L^2}$$



Fonctions propres du laplacien de Dirichlet sur l'intervalle $[-1,1]$ pour les valeurs propres $k^2\pi^2/4$ avec $k = 1, 2, 3, 4$

PROBLEME SPECTRAL POUR L'EQUATION DE BOLTZMANN

Bien que le problème spectral pour l'équation de Boltzmann linéaire ne soit pas auto-adjoint $\Rightarrow$ pas "diagonalisable" a priori, certains cas se ramènent à un problème spectral auto-adjoint.

Exemple : le cas monocinétique avec scattering isotrope $1D$ avec symétrie de type slab dans un intervalle fini.

$$(\partial_t + \mu\partial_x)f(t,x,\mu) = \sigma(1+\gamma)\langle f\rangle(t,x) - \sigma f(t,x,\mu)$$

avec $\sigma > 0$, $\gamma > -1$ et la notation

$$\langle\phi\rangle = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}\phi(\mu)d\mu\,.$$

Problème spectral :

1) pour quelles valeurs de λ existe-t-il $\phi \equiv \phi(x,\mu)$ t.q.

$$\begin{cases} A\phi = \lambda\phi\,, & \phi \neq 0\,, \\ \phi(-L,\mu) = \phi(L,-\mu) = 0\,, & 0 < \mu \leq 1\,, \end{cases}$$

où

$$A\phi = -\mu\partial_x\phi + \sigma(1+\gamma)\langle\phi\rangle - \sigma\phi$$

2) pour quelles valeurs propres λ de l'équation de Boltzmann existe-t-il des fonctions propres ϕ vérifiant en outre $\phi \equiv \phi(x,\mu) \geq 0$ (densité de particules) ?

Valeurs propres de l'opérateur de Boltzmann linéaire monocinétique 1D

Théorème : Soient $\sigma > 0$ et $\gamma > -1$.

1) Il existe un unique réel $\lambda_L(\sigma, \gamma)$ dans l'intervalle $]-\sigma, +\infty[$ qui est la plus grande valeur propre de l'opérateur A défini sur $[-L, L] \times [-1, 1]$ par

$$A\phi = -\mu\partial_x\phi + \sigma(1+\gamma)\langle\phi\rangle - \sigma\phi\,,$$

avec conditions aux limites absorbantes sur $[-L, L] \times [-1, 1]$.

2) L'opérateur A admet une fonction propre ≥ 0 associée à la plus grande valeur propre $\lambda_L(\sigma, \gamma)$.

3) Les autres valeurs propres de A sont toutes réelles, de multiplicités finies, et appartiennent à l'intervalle $]-\sigma, \lambda_L(\sigma, \gamma)]$.

Schéma de la preuve : réduction au cas auto-adjoint

•Dire que ϕ est solution généralisée du problème ci-dessus, c'est dire que

$$\phi(x,\mu) = \int_{-L}^{x} \frac{\sigma(1+\gamma)}{\mu} e^{-(\sigma+\lambda)(x-y)/\mu} \langle\phi\rangle(y)dy\,, \qquad 0 < \mu \leq 1\,,$$

$$\phi(x,\mu) = \int_{x}^{L} \frac{\sigma(1+\gamma)}{|\mu|} e^{-(\sigma+\lambda)(y-x)/|\mu|} \langle\phi\rangle(y)dy\,, \qquad -1 \leq \mu < 0\,,$$

•Moyenner ϕ par rapport à $\mu \Rightarrow$ équation intégrale pour $\langle\phi\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle\phi\rangle(x) = &\int_{-L}^{x} \left(\frac{1}{2}\int_{0}^{1} \frac{\sigma(1+\gamma)}{\mu} e^{-(\sigma+\lambda)(x-y)/\mu} d\mu\right) \langle\phi\rangle(y)dy \\ &+ \int_{x}^{L} \left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \frac{\sigma(1+\gamma)}{|\mu|} e^{-(\sigma+\lambda)(y-x)/|\mu|} d\mu\right) \langle\phi\rangle(y)dy\end{aligned}$$

•Cette équation intégrale se met sous la forme

$$\langle\phi\rangle(x) = \sigma(1+\gamma)\int_{-L}^{L} E((\sigma+\lambda)|x-y|)\langle\phi\rangle(y)dy\,, \quad |x| \leq L$$

où

$$E(z) = \frac{1}{2}\int_z^{\infty} e^{-v}\frac{dv}{v}\,, \quad z > 0$$

Notation : Pour tout $\lambda > -\sigma$, on définit l'opérateur K_λ par la formule

$$K_\lambda\psi(x) = \int_{-L}^{L} E((\sigma+\lambda)|x-y|)\psi(y)dy$$

Lemme : Pour tout $\lambda > -\sigma$, l'opérateur K_λ est un opérateur de Hilbert-Schmidt auto-adjoint sur $L^2([-L, L])$. De plus, pour tout $\psi \in L^2([-L, L])$, la fonction $K_\lambda\psi$ est (p.p. égale à) une fonction continue sur $[-L, L]$.

Conséquence :

1) Il existe une base hilbertienne $(\phi_n)_{n\geq 0}$ de $L^2([-L,L])$, et une suite de réels

$$\rho_0(\lambda) \geq \rho_1(\lambda) \geq \ldots \geq \rho_n(\lambda) \geq \ldots \geq 0$$

telle que

$$K_\lambda \phi_n = \rho_n(\lambda)\phi_n\,, \quad n \geq 0\,.$$

2) De plus

$$\rho_0(\lambda) = \max_{\substack{\phi\in L^2([-L,L]) \\ \phi\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_{-L}^{L} \overline{\phi(x)} K_\lambda \phi(x) dx}{\displaystyle\int_{-L}^{L} |\phi(x)|^2 dx}\,.$$

Proposition : Notons l'opérateur de Boltzmann linéaire

$$Af = -\mu\partial_x f + \sigma(1+\gamma)\langle f\rangle - \sigma f$$

Il y a équivalence entre

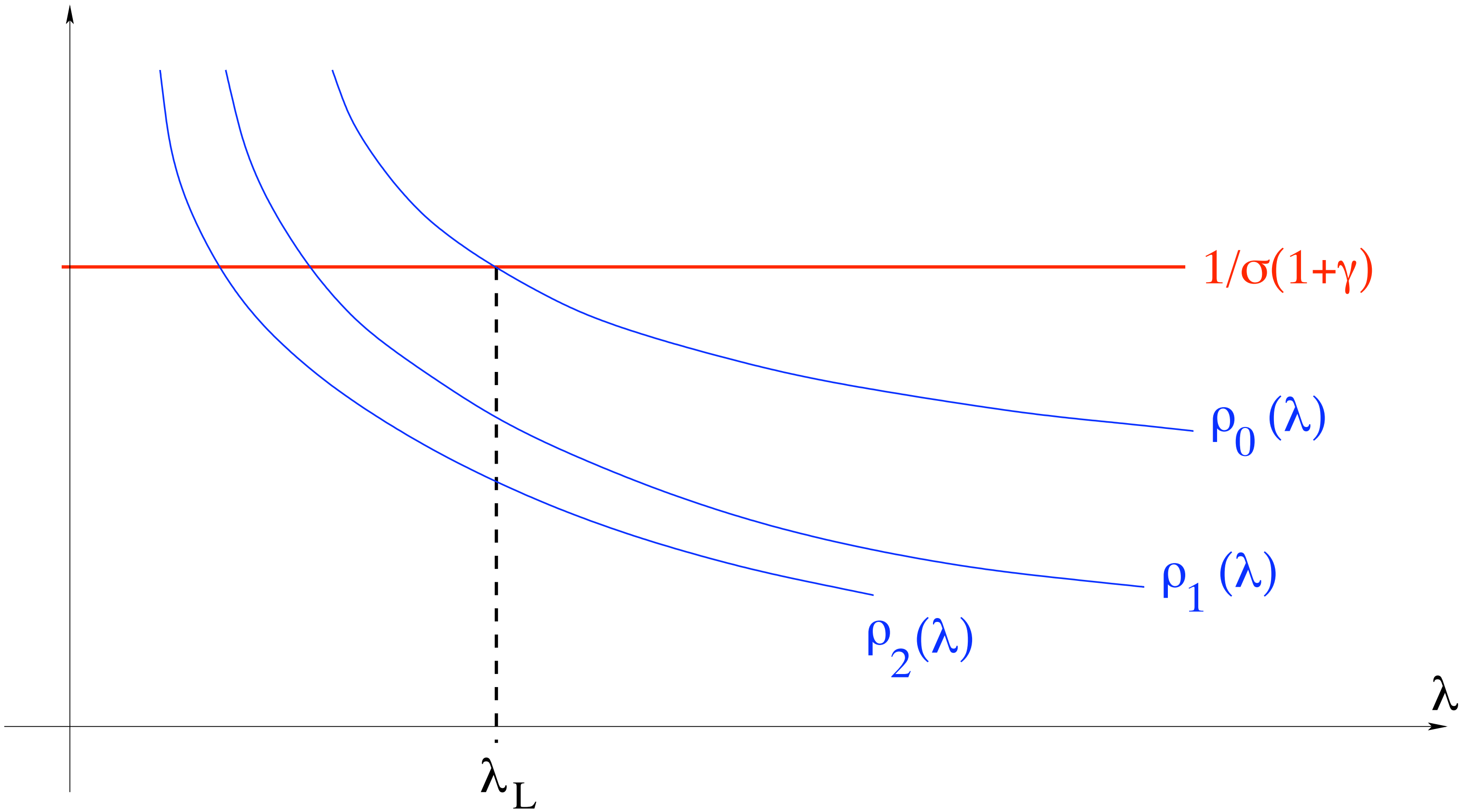
a) $\phi \in L^2([-L, L] \times [-1, 1])$ est solution généralisée du problème aux valeurs propres

$$\begin{cases} A\phi = \lambda\phi\,, & \phi \neq 0\,, \\ \\ \phi(-L,\mu) = \phi(L,-\mu) = 0\,, & 0 < \mu \leq 1\,, \end{cases}$$

pour la valeur propre $\lambda > -\sigma$;

b) $\langle\phi\rangle$ est fonction propre de l'opérateur K_λ pour la valeur propre $\frac{1}{\sigma(1+\gamma)}$.

On se ramène donc à résoudre en λ l'équation $\rho_0(\lambda) = \frac{1}{\sigma(1+\gamma)}$.



Résolution de l'équation donnant la valeur propre principale de l'équation de Boltzmann linéaire monocinétique avec scattering isotrope et symétrie de type slab

Notion de taille critique

Définition : On dit que L est la taille critique pour l'opérateur de Boltzmann linéaire $A\phi = -\mu\partial_x\phi + \sigma(1+\gamma)\langle\phi\rangle - \sigma\phi$, avec conditions aux limites absorbantes SSI la valeur propre principale $\lambda_L(\sigma,\gamma) = 0$.

•**Scaling :** en posant $x = Lz$, et $\phi(x,\mu) = \Phi(z,\mu)$, le problème spectral

$$-\mu\partial_x\phi + \sigma(1+\gamma)\langle\phi\rangle - \sigma\phi = \lambda\phi\,, \qquad \phi(-L,\mu) = \phi(L,-\mu) = 0$$

se ramène à

$$-\mu\partial_z\Phi + L\sigma(1+\gamma)\langle\Phi\rangle - L\sigma\Phi = L\lambda\Phi\,, \qquad \Phi(-1,\mu) = \Phi(1,-\mu) = 0$$

de sorte que

$$\lambda_L(\sigma,\gamma) = \frac{1}{L}\lambda_1(L\sigma,\gamma)$$

Estimation de la taille critique par la diffusion

•**Hypothèse :** $L \gg 1$, $\gamma \ll 1$ t.q. $\gamma = \widehat{\gamma}/L^2$

On cherche $\Phi \neq 0$ solution du problème spectral

$$\begin{cases} -\mu\partial_x\Phi + \sigma L\left(1 + \frac{\widehat{\gamma}}{L^2}\right)\langle\Phi\rangle - \sigma L\Phi = L\lambda_1(L\sigma, \widehat{\gamma}/L^2)\Phi \\ \Phi(-1,\mu) = \Phi(1,-\mu) = 0\,, \qquad 0 < \mu \leq 1\,. \end{cases}$$

Intuition : pour $L \gg 1$, l'effet de fuite de particules au bord est faible, et on s'attend à ce que λ_L soit du même ordre de grandeur que γ :

$$\lambda_L(\sigma, \widehat{\gamma}/L^2) = O(1/L^2)$$

•Posant $L = 1/\epsilon$, le problème spectral ci-dessus se réécrit

$$\begin{cases} -\mu\partial_x\Phi + \frac{1}{\epsilon}\sigma\left(1+\epsilon^2\widehat{\gamma}\right)\langle\Phi\rangle - \frac{1}{\epsilon}\sigma\Phi = \epsilon\hat{\lambda}\Phi \\ \\ \Phi(-1,\mu) = \Phi(1,-\mu) = 0\,, \qquad 0 < \mu \leq 1\,. \end{cases}$$

•Ce scaling suggère d'avoir recours à l'approximation par la diffusion

$$\Phi(x,\mu) \simeq \langle\Phi\rangle(x) - \frac{\epsilon}{\sigma}\mu\partial_x\langle\Phi\rangle(x) + \ldots$$

Moyennons le problème spectral par rapport à μ

$$-\partial_x\langle\mu\Phi\rangle + \epsilon\sigma\widehat{\gamma}\langle\Phi\rangle = \epsilon\hat{\lambda}\langle\Phi\rangle$$

Puis, en remplaçant Φ par son approximation ci-dessus

$$\begin{cases} \frac{\epsilon}{3\sigma}\partial_x^2\langle\Phi\rangle + \epsilon\sigma\widehat{\gamma}\langle\Phi\rangle \simeq \epsilon\hat{\lambda}\langle\Phi\rangle\,, \\ \\ \langle\Phi\rangle(-1) = \langle\Phi\rangle(+1) = 0\,, \end{cases}$$

•La **plus grande valeur propre** λ_{diff} du problème spectral

$$\begin{cases} \frac{1}{3\sigma}\partial_x^2 q(x) + \sigma\widehat{\gamma} q(x) = \lambda_{diff}\, q(x)\,, \\ \\ q(-1) = q(+1) = 0 \end{cases}$$

vaut $\sigma\widehat{\gamma} - \frac{1}{3\sigma}\lambda_1$ où $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4}$ est la plus petite valeur propre du problème aux valeurs propres de Dirichlet

$$\begin{cases} -\frac{d^2\phi}{dx^2}(x) = \lambda\phi(x)\,, \qquad |x| < 1 \\ \\ \phi(+1) = \phi(-1) = 0 \end{cases}$$

Donc

$$\lambda_{diff} = \sigma\widehat{\gamma} - \frac{\pi^2}{12\sigma}\,, \qquad q(x) = \cos(\tfrac{\pi}{2}x)$$

Estimation de la taille critique : $L \gg 1$, $\gamma \ll 1$ t.q. $\gamma = \widehat{\gamma}/L^2$

Dans les variables de départ,

$$L^2 \lambda_L(\sigma, \widehat{\gamma}/L^2) \simeq \lambda_{diff} = \sigma\widehat{\gamma} - \frac{\pi^2}{12\sigma},$$

La valeur propre principale de l'équation de Boltzmann linéaire vaut donc

$$\lambda_L(\sigma, \gamma) \simeq \sigma\gamma - \frac{\pi^2}{12\sigma L^2} + \ldots,$$

•Valeur approchée de la taille critique pour la bande $[-L, L]$:

$$\lambda_L(\sigma, \gamma) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2L_c \simeq \frac{\pi}{\sqrt{3\gamma\sigma}}.$$