ECOLE POLYTECHNIQUE
3ème année, MAP/MAT 567
Transport et diffusion (G. Allaire, X. Blanc, F. Golse)
Examen écrit du 4 Mars 2015 (2 heures)

1 Modèle aux moments pour l'équation du transport

On considère l'équation de Boltzmann linéaire avec un scattering isotrope :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon}\Omega \cdot \nabla_x f + \frac{\sigma}{\varepsilon^2} f = \frac{\sigma}{\varepsilon^2}\langle f \rangle. \tag{1}$$

Ici, $f = f(t, x, \Omega)$ dépend de la position spatiale $x \in \mathbb{R}^N$, du temps $t \geq 0$ et de la direction de propagation $\Omega \in S^{N-1}$, la sphère unité de $\mathbb{R}^N$. L'opérateur ∇_x désigne le gradient par rapport à la variable spatiale x. Le terme source est une moyenne en vitesse de f :

$$\langle f \rangle(t, x) = \frac{1}{|S^{N-1}|} \int_{S^{N-1}} f(t, x, \Omega) d\Omega,$$

où $d\Omega$ désigne la mesure de Lebesgue sur la sphère unité, et $\left|S^{N-1}\right| = \displaystyle\int_{S^{N-1}} d\Omega$ est sa surface. Pour l'instant, le paramètre $\varepsilon > 0$ est fixé, mais il sera, dans la suite, appelé à tendre vers 0. Enfin, le coefficient $\sigma > 0$ est supposé constant.

1. Démontrer que, pour tout indice i, j compris entre 1 et N, on a l'égalité suivante :

$$\frac{1}{|S^{N-1}|} \int_{S^{N-1}} \Omega_i \Omega_j d\Omega = \frac{1}{N}\delta_{ij};$$

   où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, 0 sinon. Ici, on note Ω_i la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\Omega \in \mathbb{R}^N$.

2. On suppose dans cette question que f est une fonction affine de Ω :

$$f(t, x, \Omega) = E(t, x) + \Omega \cdot F(t, x).$$

   Les fonctions $E(t, x)$ et $F(t, x)$ sont, respectivement, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{R}^N$. Calculer les premiers moments de f :

$$\frac{1}{|S^{N-1}|} \int_{S^{N-1}} f(t, x, \Omega) d\Omega, \quad \text{et} \quad \frac{1}{|S^{N-1}|} \int_{S^{N-1}} \Omega f(t, x, \Omega) d\Omega.$$

3. En intégrant l'équation (1) par rapport à Ω, calculer $\dfrac{\partial E}{\partial t}$ en fonction de E, F, et de leurs dérivées spatiales.

4. En multipliant l'équation (1) par Ω puis en l'intégrant par rapport à Ω, calculer $\dfrac{\partial F}{\partial t}$ en fonction de E et F, et de leurs dérivées spatiales.

2 Limite diffusion pour le modèle aux moments

On s'intéresse maintenant au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial t} + \dfrac{1}{\varepsilon N}\mathrm{div}_x(F) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial t} + \dfrac{1}{\varepsilon}\nabla_x E + \dfrac{\sigma}{\varepsilon^2}F = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Ici, $E = E(t,x) \in \mathbb{R}$ est une énergie, et $F = F(t,x) \in \mathbb{R}^N$ est un flux d'énergie. On cherche à étudier la limite $\varepsilon \to 0$ de ce système d'équations. Pour cela, on utilise un développement de Hilbert :

$$E = E_0 + \varepsilon E_1 + \varepsilon^2 E_2 + \dots, \quad F = F_0 + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \dots$$

On procèdera formellement, en identifiant les puissances de ε dans le système (2).

1. Déterminer F_0.
2. Exprimer $\nabla_x E_0$ en fonction de F_1.
3. En déduire l'équation vérifiée par E_0 (qui ne fait pas intervenir d'autres inconnues).

3 Schéma numérique pour le modèle aux moments

On étudie maintenant la discrétisation du système (2) en dimension un d'espace :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial t} + \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial t} + \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial E}{\partial x} + \dfrac{\sigma}{\varepsilon^2}F = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Dans ce cas particulier, F est, comme E, une fonction à valeurs scalaires. On utilisera un pas d'espace Δx uniforme, et on notera $x_j = j\Delta x$, pour tout $j \in \mathbb{Z}$. On notera Δt le pas de temps. On désignera E_j^n (respectivement F_j^n) une approximation de $E(n\Delta t, j\Delta x)$ (respectivement de $F(n\Delta t, j\Delta x)$). On supposera dans toute la suite que les solutions exactes E et F, ainsi que toutes leurs dérivées, sont bornées indépendamment de ε.

1. Ecrire le système (3) en utilisant les inconnues $u = E + F$ et $v = E - F$.
2. Pour ces inconnues u et v, écrire le schéma décentré amont explicite. On utilisera, comme pour les inconnues E et F, la notation u_j^n comme approximation $u(n\Delta t, j\Delta x)$ et v_j^n comme approximation de $v(n\Delta t, j\Delta x)$.
3. Calculer l'erreur de consistance du schéma associé (sur les inconnues u et v), et démontrer qu'elle est d'ordre $O\left(\frac{\Delta x}{\varepsilon} + \Delta t\right)$.
4. Que peut-on en déduire sur la capacité du schéma à reproduire la limite diffusion $\varepsilon \to 0$ (à Δt et Δx fixés) ?

5. Démontrer que le système discrétisé s'écrit, pour les inconnues E et F,

$$\begin{cases} \dfrac{E_j^{n+1}-E_j^n}{\Delta t}+\dfrac{F_{j+1}^n-F_{j-1}^n}{2\varepsilon\Delta x}+\dfrac{2E_j^n-E_{j-1}^n-E_{j+1}^n}{2\varepsilon\Delta x}=0, \\ \dfrac{F_j^{n+1}-F_j^n}{\Delta t}+\dfrac{E_{j+1}^n-E_{j-1}^n}{2\varepsilon\Delta x}+\dfrac{2F_j^n-F_{j+1}^n-F_{j-1}^n}{2\varepsilon\Delta x}+\dfrac{\sigma}{\varepsilon^2}F_j^n=0, \end{cases}$$

6. Soit $x_{j+1/2}=\left(j+\frac{1}{2}\right)\Delta x$. En utilisant un développement de Taylor en ce point, justifier que, dans la limite où Δx et ε sont petits,

$$\begin{aligned} E(t,x_j)&=E(t,x_{j+1/2})+\frac{\sigma\Delta x}{2\varepsilon}F(t,x_{j+1/2})+O\left(\varepsilon\Delta x+\Delta x^2\right), \\ E(t,x_{j+1})&=E(t,x_{j+1/2})-\frac{\sigma\Delta x}{2\varepsilon}F(t,x_{j+1/2})+O\left(\varepsilon\Delta x+\Delta x^2\right), \\ F(t,x_j)&=F\left(t,x_{j+1/2}\right)+O(\varepsilon\Delta x), \\ F\left(t,x_{j+1}\right)&=F\left(t,x_{j+1/2}\right)+O(\varepsilon\Delta x). \end{aligned}$$

7. On définit $E_{j+1/2}^n$ et $F_{j+1/2}^n$ par les relations

$$\begin{aligned} F_j^n+E_j^n&=F_{j+1/2}^n+E_{j+1/2}^n+\frac{\sigma\Delta x}{2\varepsilon}F_{j+1/2}^n, \\ F_{j+1}^n-E_{j+1}^n&=F_{j+1/2}^n-E_{j+1/2}^n+\frac{\sigma\Delta x}{2\varepsilon}F_{j+1/2}^n. \end{aligned}$$

Vérifier que ceci donne bien un unique couple de valeurs $\left(E_{j+1/2}^n,F_{j+1/2}^n\right)$, et démontrer que ce sont des approximations consistantes de E et F au temps $n\Delta t$ et au point $x_{j+1/2}$.

8. On propose d'utiliser le schéma suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{E_j^{n+1}-E_j^n}{\Delta t}+\dfrac{F_{j+1/2}^n-F_{j-1/2}^n}{\varepsilon\Delta x}=0, \\ \dfrac{F_j^{n+1}-F_j^n}{\Delta t}+\dfrac{E_{j+1/2}^n-E_{j-1/2}^n}{\varepsilon\Delta x}+\dfrac{\sigma}{\varepsilon^2}F_j^n=0, \end{cases}$$

En utilisant les valeurs de flux $E_{j+1/2}^n$ et $F_{j+1/2}^n$ de la question précédente, en déduire le nouveau schéma :

$$\begin{cases} \dfrac{E_j^{n+1}-E_j^n}{\Delta t}+\dfrac{F_{j+1}^n-F_{j-1}^n}{(2\varepsilon+\sigma\Delta x)\Delta x}+\dfrac{2E_j^n-E_{j+1}^n-E_{j-1}^n}{(2\varepsilon+\sigma\Delta x)\Delta x}=0, \\ \dfrac{F_j^{n+1}-F_j^n}{\Delta t}+\dfrac{E_{j+1}^n-E_{j-1}^n}{2\varepsilon\Delta x}+\dfrac{2F_j^n-F_{j+1}^n-F_{j-1}^n}{2\varepsilon\Delta x}+\dfrac{\sigma}{\varepsilon^2}F_j^n=0. \end{cases} \tag{4}$$

9. En utilisant un développement formel en puissance de ε, vérifier que le schéma (4) reproduit la limite diffusion $\varepsilon\to 0$ (à Δt et Δx fixés).

10. Démontrer que l'erreur de consistance associée à la première ligne de (4) est d'ordre $O(\Delta x^2+\varepsilon\Delta x+\Delta t)$.