Homogénéisation

Exercice I. Homogénéisation d'une équation de diffusion

1. Appliquer la méthode à deux échelles à l'homogénéisation de l'équation de diffusion en 1D

$$-\frac{d}{dx}\left[D\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{d}{dx}u^\varepsilon\right]+\sigma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u^\varepsilon=f(x)$$

avec conditions de Dirichlet en 0 et 1. On fera l'hypothèse que la fonction D est 1-périodique et vérifie $0<\alpha\le D(y)\le\beta<+\infty$.

2. Montrer que le coefficient moyen est

$$D^\star=\left(\int_0^1 D^{-1}(x)dx\right)^{-1}.$$

Exercice II. On se place en dimension deux d'espace

1. Donner les formules pour le tenseur de diffusion.

2. On suppose que le coefficient de diffusion sur une cellule est du type $D(y)=d(y)I$, avec

$$d(y)=\begin{cases} d_1 & 0<y_1<.5\\ d_2 & 0.5<y_1<1\end{cases}$$

sur une cellule carré $0<y_1,y_2<1$. Que vaut $D^\star$?

Exercice III. Idem avec amortissement pour l'équation instationnaire

$$\partial_t u^\varepsilon-\frac{\partial}{\partial x}\left[D\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial x}u^\varepsilon\right]+\frac{1}{\varepsilon^2}\sigma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u^\varepsilon=0.$$

1. Déterminer les équations homogénéisées.

Exercice IV. Retour vers la modélisation physico-numérique.

Nous considérons un calcul critique à un groupe de neutrons

$$-\nabla.(d(x)\nabla\phi(x))+\sigma_a(x)\phi(x)=\frac{\nu\sigma_f(x)}{\lambda}\phi(x).$$

La structure en espace est hétérogène (en pratique 40 000 crayons "c" de combustibles)

$$\overline{\Omega}=\overline{\sup_c \Omega_c}$$

C'est pourquoi les fonctions d, σ_s et $s\sigma_f$ sont variables en espace. L'exercice qui suit est tiré de *Méthodes mathématiques en neutronique* (page 194) par J. Planchard.

La méthode de factorisation consiste à écrire

$$\phi(x)=u(x)\psi(x)$$

dans lequel ψ est le flux neutronique obtenu par un calcul critique crayon par crayon (avec une condition de Neumann homogène au bord de chaque crayon). L'idée sous-jacente est que u varie peu (en espace) même si $d(x)$, $\sigma_a(x)$, $\sigma_f(x)$ et $\psi(x)$ varient beaucoup en espace.

1. Écrire les équations pour ψ.

2. Montrer que l'équation réduite pour u s'écrit

$$-\nabla.(d\psi\nabla u)+\frac{\psi}{\lambda_c}\nu\sigma_f u-d\nabla\psi.\nabla u=\frac{\psi}{\lambda}\nu\sigma_f u.$$

le paramètre λ_c est la valeur propre critique sur chaque crayon, c'est donc une fonction constante par morceaux (sur chaque crayon).

Expliquer pourquoi $\psi>0$ (par analogie avec le cas discret).

3. Montrer que les conditions aux bords entre le crayon a et le crayon b s'écrivent à l'interface ($x\in\overline{\Omega_a}\cap\overline{\Omega_b}$)

$$\psi_a(x)u_a(x)=\psi_b(x)u_b(x),$$

et

$$d_a(x)\psi_a(x)(\partial_n u_a)(x)=d_b(x)\psi_b(x)(\partial_n u_b)(x).$$

4. Proposer des formules des formules $\sigma^\star$, $d^\star$ pour simplifier le problème pour u.