ECOLE POLYTECHNIQUE
3ème année, MAP 567
Transport et diffusion (G. Allaire, F. Golse)
Examen écrit du 24 Mars 2009 (2 heures)

1 Schéma numérique : 10 points

Soit une vitesse constante et positive $a > 0$. On considére l'équation d'advection linéaire dans $(0,1)$ avec une condition aux limites de flux entrant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ pour } (x,t) \in (0,1) \times \mathbf{R}_*^+ \\ u(t,0) = f(t) \text{ pour } t \in \mathbf{R}_*^+ \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ pour } x \in (0,1), \end{cases} \tag{1}$$

où $f(t)$ est une fonction dérivable du temps et $u_0(x)$ est une fonction dérivable sur le segment $(0,1)$. Pour $\Delta t > 0$ et $\Delta x = 1/N > 0$ (avec N un entier positif), on définit les noeuds d'un maillage régulier

$$(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x) \text{ pour } n \geq 0, j \in \{0, 1, ..., N\}.$$

On note u_j^n une approximation discrète au point (t_n, x_j) de la solution exacte $u(t,x)$. On considère le schéma implicite décentré amont

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0 \quad \text{pour } j \in \{1, ..., N\}, \tag{2}$$

avec la donnée initiale $u_j^0 = u_0(x_j)$ et la condition aux limites $u_0^n = f(t_n)$.

1. Montrer que la solution de (1) vérifie l'inégalité d'énergie
$$\int_0^1 |u(t,x)|^2 dx \leq \int_0^1 |u_0(x)|^2 dx + a\int_0^t |f(s)|^2 ds.$$
2. Montrer que le schéma (2) est consistant et précis à l'ordre 1 (au moins).
3. Vérifier que, bien que le schéma semble implicite, on peut calculer explicitement les valeurs u_j^{n+1} en fonction des valeurs précédentes u_j^n et de $f(t_{n+1})$, quitte à procéder dans un ordre en fonction de j que l'on précisera.
4. Montrer que le schéma (2) vérifie le principe du maximum discret et est donc inconditionnellement stable en norme L^∞. Que peut-on dire de sa convergence ?

5. On note U^n le vecteur de composantes u_j^n, pour $1 \leq j \leq N$. Montrer que le schéma (2) peut s'écrire

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + AU^{n+1} = 0, \tag{3}$$

avec un opérateur affine A défini par ses composantes, $1 \leq j \leq N$,

$$(AU^n)_j = \frac{a}{2\Delta x}\Big((u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + (2u_j^n - u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)\Big)$$

(sachant que $u_0^n = f(t_n)$) dont on montrera qu'il vérifie

$$AU^n \cdot U^n \geq -\frac{a}{2\Delta x}(u_0^n)^2.$$

En multipliant (3) par $U^{n+1} + U^n = 2U^{n+1} + \Delta t AU^{n+1}$ montrer que le schéma est inconditionnellement stable en norme L^2 au sens où

$$\sum_{j=1}^{N} \Delta x |u_j^n|^2 \leq \sum_{j=1}^{N} \Delta x |u_j^0|^2 + \sum_{m=1}^{n} a\Delta t |f(t_m)|^2.$$

2 Limite de diffusion : 10 points

Soient $\omega > 0$, et des réels $\sigma > 0$ et $\gamma > -1$. On considère l'équation de Boltzmann linéaire à deux vitesses discrètes $(\pm\omega)$ d'inconnue $(f_+, f_-) \equiv (f_+(t,x), f_-(t,x))$

$$(B) \qquad \begin{cases} \partial_t f_+ + \omega \partial_x f_+ = \sigma(1+\gamma)\frac{f_+ + f_-}{2} - \sigma f_+ \,, \\ \partial_t f_- - \omega \partial_x f_- = \sigma(1+\gamma)\frac{f_+ + f_-}{2} - \sigma f_- \,. \end{cases}$$

Soient $L > 0$ et F_+^{in} et F_-^{in} deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, périodiques de période $2L$ et vérifiant $F_+^{in}(x) = F_-^{in}(-x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

1a. Soit $(t,x) \mapsto (F_+, F_-)(t,x)$ l'unique solution généralisée sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ de l'équation (B) avec condition initiale $F_\pm\big|_{t=0} = F_\pm^{in}$. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$. (On pourra utiliser la représentation de F sous la forme d'une série.)

1b. Montrer que, pour tout $(t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$,

$$F_+(t,x) = F_-(t,-x)\,, \text{ et } F_\pm(t, x+2L) = F_\pm(t,x)\,.$$

(On pourra utiliser l'unicité de la solution de (B).)

2. Soient f_+^{in} et f_-^{in} deux fonctions de classe C^1 sur $[0, L]$ telles que

$$\begin{aligned} f_+^{in}(0) &= f_-^{in}(0)\,, \qquad & (f_+^{in})'(0) &= -(f_-^{in})'(0) \\ f_+^{in}(L) &= f_-^{in}(L)\,, \qquad & (f_+^{in})'(L) &= -(f_-^{in})'(L) \end{aligned}$$

Montrer en s'aidant de la première question que l'équation (B) admet une unique solution $(t,x) \mapsto (f_+, f_-)(t,x)$ de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+ \times [0, L]$ vérifiant les conditions aux limites de réflexion

$$(CL) \qquad f_+(t,0) = f_-(t,0)\,, \quad f_+(t,L) = f_-(t,L)\,, \quad t \geq 0\,,$$

et la condition initiale

$$(CI) \qquad f_+(0,x) = f_+^{in}(x)\,, \quad f_-(0,x) = f_-^{in}(x)\,, \quad 0 \leq x \leq L\,.$$

(Pour l'unicité, on pourra utiliser la méthode d'énergie.)

3. Soient q_+ et q_- deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+ \times [0, L]$ qui vérifient les conditions aux limites (CL). Enoncer et démontrer un principe du maximum pour l'équation de Boltzmann linéaire avec terme source

$$(BS) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t f_+ + \omega \partial_x f_+ = \sigma(1+\gamma)\frac{f_+ + f_-}{2} - \sigma f_+ + q_+\,, \\ \partial_t f_- - \omega \partial_x f_- = \sigma(1+\gamma)\frac{f_+ + f_-}{2} - \sigma f_- + q_-\,, \end{array} \right.$$

posée sur $\mathbf{R}_+ \times [0, L]$ avec condition initiale (CI) et condition aux limites (CL).

4a. Soient S_+ et S_- deux fonctions continues sur $[0, L]$. Etudier l'existence et l'unicité de F_+ et F_- continues sur $[0, L]$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} F_+ - \frac{F_+ + F_-}{2} = S_+\,, \\ F_- - \frac{F_+ + F_-}{2} = S_-\,. \end{array} \right.$$

(On précisera la condition nécessaire et suffisante sur $S_\pm$ pour l'existence ainsi que la classe d'unicité pour $F_\pm$.)

4b. On suppose désormais que $\sigma = \epsilon^{-1}\hat{\sigma}$, que $\gamma = \epsilon^2\hat{\gamma}$, et que $f_+^{in} = f_-^{in}$ sur $[0, L]$. Enoncer un résultat d'approximation par la diffusion pour le problème (B)-(CL)-(CI), en précisant notamment

i) l'échelle de temps sur laquelle l'approximation a lieu ;

ii) l'équation de diffusion à laquelle on aboutit ;

iii) les conditions aux limites associées à cette équation de diffusion ;

iv) la condition initiale correspondante ;

v) l'estimation de d'erreur.

(On ne demande pas de démonstration détaillée du résultat, mais seulement d'esquisser les points où cette démonstration diffère de la démonstration de l'approximation par la diffusion donnée en cours.)