Quelques notions et résultats sur les systèmes dynamiques.

P. Collet
Centre de Physique Théorique
CNRS UMR 7644
Ecole Polytechnique
F-91128 Palaiseau Cedex (France)
e-mail: pierre.collet@cpht.polytechnique.fr

Contenu du cours.

I) Définitions et notions générales.

II) Champs de vecteurs du plan.

III) Bifurcations de points fixes stables.

Il ne s'agit que d'une petite partie de la théorie des systèmes dynamiques.
C'est la partie qui je pense devrait être la plus utile dans les applications en écologie, biologie etc.
Elle devrait aussi permettre si besoin d'aborder des chapitres plus complexes de la théorie des systèmes dynamiques (chaos etc.)

Définitions et notions générales.

Etat d'un système.

Etant donné un système on appelle espace de phase Ω l'ensemble de tous ses états possibles.

L'état d'un système à un instant donné est donc entièrement caractérisé par la donnée d'un point dans son espace de phase.

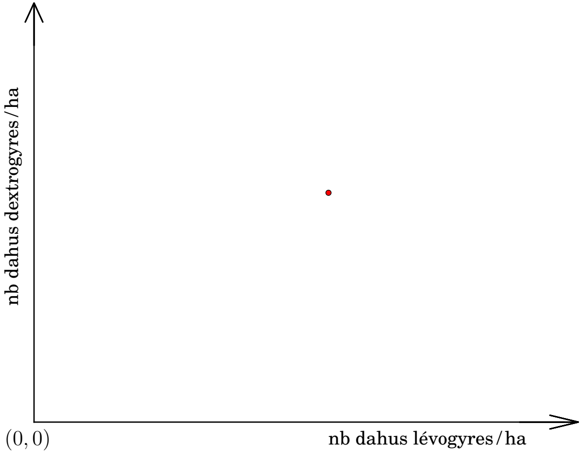
Exemples : En mécanique d'une particule en dimension 3, $\Omega = \mathbb{R}^6$ (trois positions et trois vitesses).

En chimie, écologie, etc. les concentrations de toutes les espèces (n) dans le récipient, $\Omega = \mathbb{R}_+^n$.

Nous ne considérerons que des espaces de phase qui sont des espaces vectoriels réels (ou éventuellement des variétés différentiables régulières réelles, éventuellement à bords).

Si on considère des champs (écoulement hydrodynamique, densités d'individus) l'espace de phase est de dimension infinie.

Un espace de phase.



Evolution temporelle.

C'est une règle qui donne l'évolution des états du système. Nous considérerons seulement deux types de règles : les évolutions à temps continu et les évolution à temps discrets, et nous supposerons que ces règles ne dépendent pas du temps mais seulement de l'état présent du système.

Les paramètres du système dynamique entrent dans la construction des règles de l'évolution, pas en général dans les états et les espaces de phase.

Parmi les nombreuses situations plus complexes non traitées ici on peut mentionner les systèmes à retard, les systèmes non autonomes (la règle dépend du temps par exemple les eds) etc.

Evolution à temps continus.

Elles sont données par des systèmes d'équations différentielles (champ de vecteurs) sur l'espace de phase ($\vec{x} \in \Omega$)

$$\frac{d\,\vec{x}}{dt} = \vec{X}(\vec{x})$$

(je ne mettrais pas toujours de flèche sur les vecteurs). Exemple : Système de Lotka Volterra ($\Omega = \mathbb{R}_+^2$)

$$\frac{d\,x_1}{dt} = x_1\left(a_1 - c_{1,1}\,x_1 - c_{1,2}\,x_2\right), \qquad \frac{d\,x_2}{dt} = x_2\left(a_2 - c_{2,1}\,x_1 - c_{2,2}\,x_2\right)$$

L'état du système à un instant donné est totalement décrit par le point $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$. L'évolution temporelle dépend de six paramètres : r_1, r_2, $c_{1,1}$, $c_{1,2}$, $c_{2,1}$, $c_{2,2}$.

Rappel Toute équation différentielle d'ordre n avec le terme d'ordre n linéaire et inversible peut s'écrire comme un système de n équations du premier ordre (passage de Newton à Hamilton).

Rappel Si le champ de vecteurs $\vec{X}(\vec{x})$ est régulier (ce que nous supposerons toujours implicitement dans la suite), le système d'équations différentielles

$$\frac{d\,\vec{x}}{dt} = \vec{X}(\vec{x})$$

peut être intégré au moins un certain temps à partir de toute condition initiale $\vec{x}_0$. La solution $\big(\vec{x}(t)\big)$ s'appelle la trajectoire de $\vec{x}_0$. Elle est unique et $\vec{x}(t)$ dépend différentiablement de t et de $\vec{x}_0$. La famille de transformations (φ_t) définie par

$$\varphi_t(\vec{x}_0) = \vec{x}(t)$$

s'appelle le flot du champ de vecteurs $\vec{X}$. La transformation φ_t donne l'état après un temps d'évolution t. On a $\varphi_0 = \mathrm{Id}$ et $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$. Le flot est aussi défini pour $t < 0$.

Dans la suite nous supposerons toujours que $\varphi_t(\vec{x}_0)$ est bien défini pour tout t réel et pour tout $\vec{x}_0$ (pas d'explosion).
C'est la première chose à vérifier dans l'étude d'un champ de vecteurs.
Par exemple, pour l'équation

$$\frac{dx}{dt} = x^2$$

la trajectoire d'une condition initiale $x_0 > 0$ atteint l'infini en un temps fini $(1/x_0)$ car

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - t\,x_0} \ .$$

Par contre la trajectoire d'une condition initiale $x_0 < 0$ reste bornée pour tout $t > 0$ (converge vers 0), elle diverge en $t = 1/x_0 < 0$.

Exemples de trajectoires à temps continu.

Exemple 1) :

espace de phase $\mathbb{R}^n$ (une variété), un champ de vecteurs $\vec{X}$. Un point critique est un point x_0 tel que $\vec{X}(x_0) = 0$ (aussi appelé singularité !). C'est un point fixe car $\varphi_t(x_0) = x_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Etat de repos, aussi appelé solution stationnaire ou équilibre.

Exemple 2) :

espace de phase $\Omega = \mathbb{T}$. Champ de vecteur constant

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \neq 0$$

Trajectoire : $\theta(t) = \theta_0 + \omega\, t \pmod{2\,\pi}$. Rotation à vitesse angulaire constante.

Modèle de Lorenz (1963).

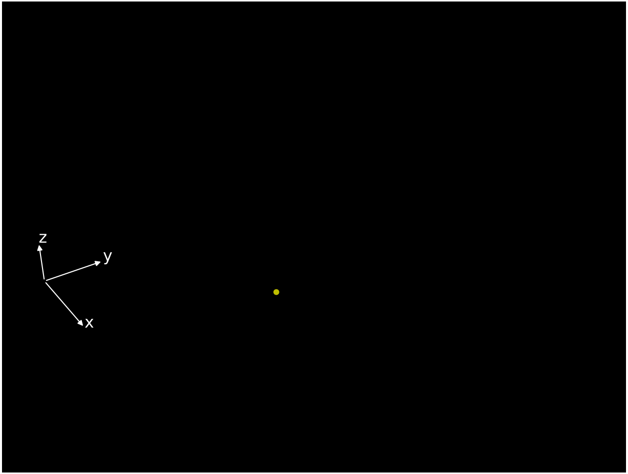
Les évolutions temporelles peuvent être beaucoup plus compliquées, comme par exemple dans le modèle de Lorenz.

$\Omega = \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \sigma\,(y - x) \\
\frac{dy}{dt} &= rx - y - xz \\
\frac{dz}{dt} &= xy - bz
\end{aligned}$$

Valeurs “historiques” des paramètres $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$.

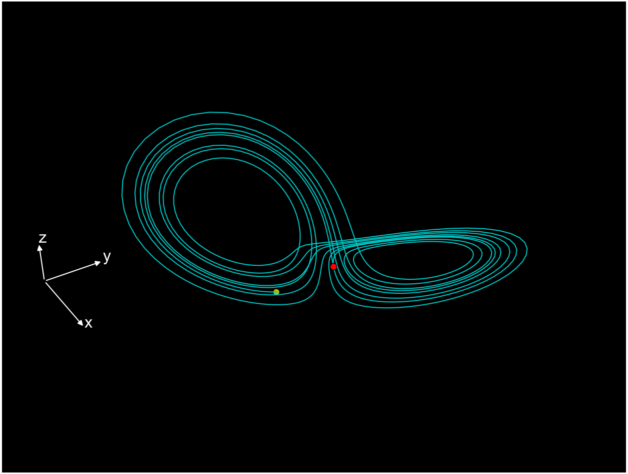
Simulation du modèle de Lorenz (1963).



Simulation du modèle de Lorenz (1963).

Fichier animlorenz.mp4

Modèle de Lorenz (1963).



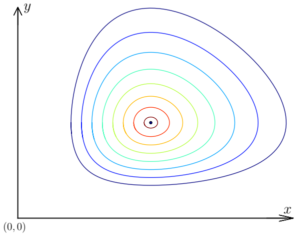
Ensembles invariants, Cycles.

Un ensemble $A \subset \Omega$ est invariant si pour tout $\vec{x}_0 \in A$ et pour tout $t \geq 0$, $\varphi_t(\vec{x}_0) \in A$.

Un point fixe est un ensemble invariant !

Une courbe fermée (régulière, compacte) $\mathscr{C}$ invariante par un champ de vecteurs est appelée un cycle (orbite fermée, orbite périodique si elle ne contient pas de point fixe).

Pour le système prédateurs proies de Lotka et Volterra, le quadrant positif est feuilleté par des orbites périodiques en dehors d'un point fixe.



Dynamique du système prédateurs proies.

Fichier anim_proipred.mp4

Evolution à temps discret.

Elles sont données par des transformations T régulières de l'espace de phase. Quelques exemples de transformations :

Transformation à temps 1 (ou à temps $\tau \neq 0$) d'un flot

$$T(\vec{x}) = \varphi_1(\vec{x}) \ .$$

Transformation de Ulam-Von Neumann, $\Omega = [0, 1]$,

$$T(x) = 4\,x\,(1 - x) \ .$$

Transformation de Hénon dans $\Omega = \mathbb{R}^2$ (1976), elle dépend de deux paramètres (a, b) (valeurs "historiques" $a = 1{,}4$, $b = 0{,}3$)

$$T(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 - 1{,}4\,x_1^2 + x_2 \\ 0{,}3\,x_1 \end{pmatrix} \ .$$

Ou encore $\Omega = \left[0, 2^{31} - 1\right]$, $T(x) = 16807\,x \mod \left(2^{31} - 1\right)$ ou $T(x) = 48271\,x \mod \left(2^{31} - 1\right)$, deux générateurs de nombres (pseudo) aléatoires fréquemment utilisés sur les machines 32 bits.

Trajectoires à temps discret.

La trajectoire d'un point (condition initiale) x_0 par une transformation T est la suite (x_n) définie récursivement par

$$x_{n+1} = T(x_n) \ .$$

Une transformation n'est pas nécessairement inversible et les trajectoires à temps discret ne sont pas toujours définies pour $n < 0$.

Notation $x_n = T^n(x_0) = T \circ T \circ \cdots \circ T(x_0)$ (attention ce n'est pas une puissance algébrique mais un puissance de composition).

Une orbite (x_n) (ou la condition initiale x_0) est périodique si pour un entier $p > 0$ on a $x_p = x_0$. Le plus petit de ces entiers est la période de l'orbite périodique. Noter que pour une telle orbite on a pour tout n $T^p(x_n) = x_n$. Si $p = 1$ on dit que x_0 est un point fixe (aussi appelé solution stationnaire ou équilibre).

Exemples de trajectoires à temps discret.

Espace de phase $\Omega = \mathbb{T}$, $T(\theta) = \theta + \omega \pmod{2\pi}$, rotation d'angle ω. $\theta_n = T^n(\theta) = \theta_0 + n\omega \pmod{2\pi}$. Si $\omega/(2\pi)$ est irrationnel toutes les orbites sont denses. Sinon toutes les orbites sont périodiques de même période.

Espace de phase $\Omega = \mathbb{T}$, $T(\theta) = 2\theta \pmod{2\pi}$.

$$T^n(\theta) = 2^n \theta \pmod{2\pi} .$$

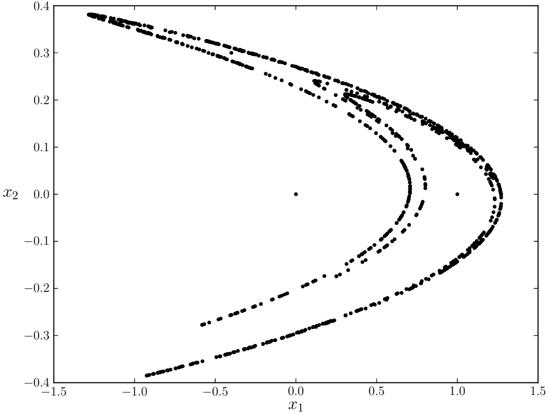
Il existe des orbites périodiques de toutes les périodes (le montrer).

Le nombre d'orbites périodiques de période inférieure à N se comporte comme $2^N/N$.

Il existe des orbites denses dans $\mathbb{T}$ et des orbites denses dans des ensembles de Cantor différents de $\mathbb{T}$.

Orbite de longueur 1000 avec point initial $(0,0)$ de la transformation de Hénon avec les paramètres "historiques"

$$T\left((x_1\ x_2)\right) = \left(\begin{array}{c} 1 - 1.4\,x_1^2 + x_2 \\ 0.3\,x_1 \end{array}\right).$$



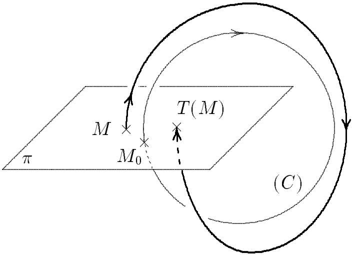
Dans le cas d'une transformation analytique du plan, on peut déroger à la règle de ne considérer que des quantités réelles afin d'utiliser les résultats profonds de la théorie des fonctions holomorphes. C'est la dynamique holomorphe dont nous parlerons peu.

Section de Poincaré.

Autre manière de construire une transformation à partir d'un flot.

On suppose qu'un flot (φ_t) possède un cycle (C) sans point fixe.

Choisissons un point M_0 sur (C) et une petite pièce π de variété régulière coupant transversalement (C) en M_0. L'application (transformation) de Poincaré T est l'application de premier retour dans π par le flot, définie dans un voisinage suffisamment petit de M_0.



Il existe une construction inverse appelée suspension.

Champs de vecteurs non autonomes périodiques.

Le champ de vecteur dépend du temps, mais il est périodique de période τ (saisons par exemple), c'est à dire que pour tout $\vec{x} \in, \Omega$ et pour tout t on a

$$\vec{X}(\vec{x},\, t+\tau) = \vec{X}(\vec{x},\, t).$$

Il est alors intéressant d'étudier l'évolution sur une période. On choisit un instant initial t_0, et pour $\vec{x}_0$, on calcule la solution $\vec{x}(t)$ de

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{X}(\vec{x},\, t)$$

qui satisfait $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$. On pose $T(\vec{x}_0) = \vec{x}(t_0 + \tau)$.

Il serait préférable d'écrire $T_{t_0}(\vec{x}_0) = \vec{x}(t_0 + \tau)$ car cette transformation dépend à priori de t_0. Mais nous allons voir que de nombreuses propriétés de T_{t_0} ne dépendent pas de t_0.

Conjugaison des transformations.

Les propriétés qualitatives d'un système dynamique ne doivent pas varier lors d'un changement de coordonnées. L'idée est souvent de trouver une conjugaison qui simplifie le problème.
Deux transformations T_1 et T_2 sont dites conjuguées (topologiquement conjuguées) si il existe un difféomorphisme (homéomorphisme) ψ tel que

$$T_2 = \psi^{-1} \circ T_1 \circ \psi \quad (\psi \circ T_2 = T_1 \circ \psi) \, .$$

Par exemple si M_2 est point fixe de T_2, $M_1 = \psi(M_2)$ est point fixe de T_1. Si M_2 est une orbite périodique de T_2 de période p, $M_1 = \psi(M_2)$ est une orbite périodique de T_1 de période p car pour tout entier p, ψ conjugue T_1^p et T_2^p.

Conjugaison des flots.

Deux flots $(\varphi_t^{(1)})$ et $(\varphi_t^{(2)})$ sont dits différentiablement conjugués si il existe un difféomorphisme ψ tel que pour tout t

$$\varphi_t^{(2)} = \psi^{-1} \circ \varphi_t^{(1)} \circ \psi \; .$$

En différenciant en $t = 0$ la relation $\psi \circ \varphi_t^{(2)} = \varphi_t^{(1)} \circ \psi$ on trouve la condition nécessaire (et suffisante) de conjugaison sur les champs de vecteurs :

$$D\psi_{\vec{x}} \, \overrightarrow{X^{(2)}}(\vec{x}) = \overrightarrow{X^{(1)}} \circ \psi(\vec{x}) = \overrightarrow{X^{(1)}}\big(\psi(\vec{x})\big) \; ,$$

avec $D\psi$ la différentielle (matrice Jacobienne de ψ).

Les points fixes se transforment en points fixes, les cycles en cycles etc.

Nous verrons plus tard une version topologique un peu différente et importante.

Exemples de conjugaison.

Considérons un fonction g réelle périodique de période 2π et le système dynamique sur le cercle $\mathbb{T}$

$$\frac{d\theta}{dt} = g(\theta) \ .$$

Si il n'y a pas de point fixe sur le cercle (g ne s'annule pas), le système est conjugué à une rotation de vitesse angulaire

$$\omega = \frac{1}{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{g(\theta)} \, d\theta} \ .$$

Si au lieu d'un cercle on a une courbe fermée régulière (cycle) sans point fixe, on se ramène au cas du cercle en considérant l'abscisse curviligne.

Pour les difféomorphismes du cercle la situation est plus compliquée (travaux de Denjoy, Arnold, Herman, Yoccoz etc.)

Preuve : on cherche ψ difféomorphisme du cercle tel que si $\phi = \psi(\theta)$ alors $d\phi/dt = \omega$. On a

$$\frac{d\phi}{dt} = \psi'(\theta)\, \frac{d\theta}{dt} = \psi'(\theta)\, g(\theta)\ .$$

On cherche donc ψ et ω tels que

$$\psi'(\theta)\, g(\theta) = \omega\ .$$

Donc si on a ω

$$\psi'(\theta) = \frac{\omega}{g(\theta)}\ .$$

Noter qu'on utilise ici l'hypothèse que g ne s'annule pas.

Mais ψ doit être périodique de période 2π, donc

$$\int_0^{2\pi} \frac{\omega}{g(\theta)}\ d\theta = 2\pi\ .$$

Champs de vecteurs non autonomes périodiques.

$\vec{X}(\vec{x}, t)$ avec $\vec{X}(\vec{x}, t+\tau) = \vec{X}(\vec{x}, t)$. T_{t_0} la transformation qui intègre le système de t_0 à $t_0 + \tau$.

Toutes les transformations T_{t_0} sont conjuguées.

Preuve. Soit $U_{(s', s)}$ la transformation qui intègre de s à s'. Il est facile de voir que pour tous s, s', s'' on a

$$U_{(s'', s)} = U_{(s'', s')} \circ U_{(s', s)} \ .$$

Donc

$$T_{t_1} = U_{(t_1+\tau, t_1)} = U_{(t_1+\tau, t_0+\tau)} \circ U_{(t_0+\tau, t_0)} \circ U_{(t_0, t_1)} \ .$$

A cause de la périodicité

$$U_{(t_1+\tau, t_0+\tau)} = U_{(t_1, t_0)}$$

et de plus

$$U_{(t_1, t_0)} = U^{-1}_{(t_0, t_1)} \ .$$

Donc avec $\psi_{t_0, t_1} = U_{(t_0, t_1)}$

$$T_{t_1} = \psi^{-1}_{t_0, t_1} \circ T_{t_0} \circ \psi_{t_0, t_1} \ .$$

Conjugaison des champs de vecteurs, pratique.

En pratique on utilise rarement la formule (difficile à mémoriser), on refait le calcul. Par exemple en dimension deux on part de

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y) , \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x,y) .$$

La transformation est donnée

$$u = \psi_1(x,y) , \qquad v = \psi_2(x,y) .$$

On suppose qu'elle est inversible (au moins dans un domaine qui nous intéresse), donc on peut résoudre

$$x = R(u,v) , \qquad y = S(u,v) .$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \partial_x\psi_1(x,y)\frac{dx}{dt} + \partial_y\psi_1(x,y)\frac{dy}{dt} \\ &= \partial_x\psi_1(x,y)\, P(x,y) + \partial_y\psi_1(x,y)\, Q(x,y) . \end{aligned}$$

On remplace dans le membre de droite x par $R(u,v)$ et y par $S(u,v)$. Même manipulation pour dv/dt.

Changement de temps.

Soit $\vec{X}(\vec{x})$ un champ de vecteurs sur Ω, et soit f une fonction strictement positive régulière sur Ω. Alors les trajectoires du champ de vecteurs

$$\vec{Y}(\vec{x}) = f(\vec{x})\, \vec{X}(\vec{x})$$

sont les mêmes que celles de $\vec{X}$. Elles sont parcourues à des "vitesses" différentes. En effet, rajoutons une équation

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = Y(\vec{y}(t)) , \quad \frac{ds}{dt} = f(\vec{y}(t)) ,$$

alors avec $x(s) = y(t(s))$

$$\frac{d\vec{x}(s)}{ds} = \frac{dt}{ds}\, \frac{d\vec{y}(t)}{dt} = \frac{1}{f(\vec{y}(t))}\, f(\vec{y}(t))\, \vec{X}(\vec{y}(t(s))) = \vec{X}(\vec{x}(s)) .$$

Changement de temps et d'échelles, exemple.

Considérons le modèle prédateurs proies

$$\frac{dx}{dt} = r_1\, x - c_{12}\, x\, y \ , \qquad \frac{dy}{dt} = -r_2\, y + c_{21}\, x\, y \ ,$$

avec tous les coefficients strictement positifs. Définissons

$$\alpha = \sqrt{r_1\, r_2}\ , \quad r = \sqrt{r_1/r_2}\ , \quad \beta = \alpha/c_{21}\ , \quad \gamma = \alpha/c_{12}\ ,$$

et posons

$$t = s/\alpha\ (s = \alpha\, t)\ , \quad x(t) = \beta\, u(\alpha\, t)\ , \quad y(t) = \gamma\, v(\alpha\, t)\ .$$

Alors $$\frac{du}{ds} = u\,(r - v)\ , \qquad \frac{dv}{ds} = v\left(-\frac{1}{r} + u\right)\ .$$

Autrement dit les propriétés dynamiques du système ne dépendent que d'un paramètre (et pas de quatre), $r = \sqrt{r_1/r_2}$. Donc moins de travail ! Pour le quantitatif ne pas oublier de revenir aux échelles initiales !

La transformation de Ulam-Von Neumann.

Donnons un exemple (historique) de conjugaison de transformations. Rappelons que $\Omega = [0,1]$, et

$$T(x) = 4\,x\,(1-x)\;.$$

Définissons

$$\psi(y) = \sin^2(\pi\,y/2)$$

qui est un homéomorphisme de $[0,1]$ et un difféomorphisme dans $]0,1[$. Le lecteur est invité à vérifier, après Ulam et Von Neumann, que

$$\tilde{T} = \psi^{-1} \circ T \circ \psi$$

avec

$$\tilde{T}(y) = 1 - |1 - 2\,y|\;.$$

(Il est plus facile de vérifier que $\psi \circ \tilde{T} = T \circ \psi$.)

Dynamique en temps longs.

On va s'intéresser à la dynamique en temps longs. Les régimes transitoires peuvent présenter de l'intérêt mais ils sont plus difficiles à classifier et les notions que nous allons étudier s'appliquent aussi à ces situations.

LE GRAND PROBLEME : En général on ne sait pas calculer explicitement $T^n(x)$ ou $\varphi_t(x)$, ou cela devient rapidement très compliqué (essayez avec un papier, un crayon et la transformation de Hénon). Voir le problème des systèmes intégrables en mécanique.

La stratégie de l'étude des systèmes dynamiques : donner des résultats sur la dynamique asymptotique seulement à partir de T ou $\vec{X}$ sans "intégrer" l'évolution.

Ensembles limites d'une trajectoire.

Definition

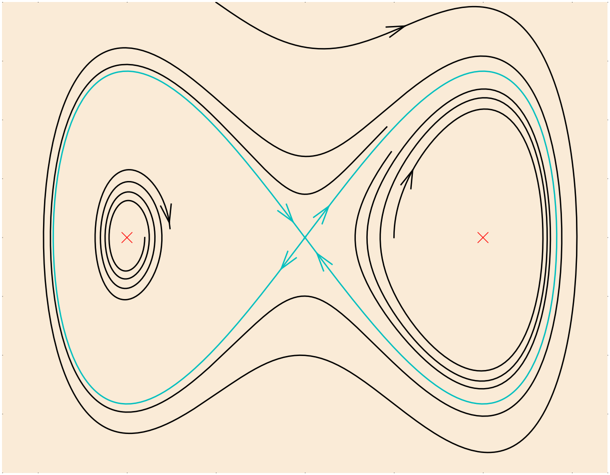
L'ensemble ω-limite d'une trajectoire (ou d'une condition initiale) est l'ensemble des points d'accumulation de cette trajectoire quand le temps tend vers $+\infty$.

Definition

L'ensemble α-limite d'une trajectoire (ou d'une condition initiale) est l'ensemble des points d'accumulation de cette trajectoire quand le temps tend vers $-\infty$ (c'est à dire par l'évolution inverse qui n'est pas toujours définie pour les transformations).

Ce sont des ensembles fermés, invariants, non vides si l'espace de phase est compacte.

Exemple avec différents ensembles ω-limites.



Exemples

Un point fixe d'un transformation est une ensemble ω-limite (prendre la trajectoire qui part en ce point).

Le point $x = 3/4$ est point fixe de la transformation de Ulam-Von Neumann $T(x) = 4\,x\,(1-x)$ car $T(3/4) = 3/4$. On a aussi $T(1/4) = 3/4$, donc $3/4$ est aussi l'ensemble ω limite du point $1/4$, etc. On dit que $1/4$ est un point prépériodique.

Les orbites périodiques sont aussi des ensembles ω-limites.

Mêmes choses pour les flots.

Il existe des ensembles $\omega(\alpha)$-limites beaucoup plus compliqués (ensembles de Cantors, ensembles étranges etc).

Attracteur.

C'est un ensemble invariant par la dynamique qui "attire les trajectoires voisines". Il existe plusieurs définitions Mathématiques correspondant à cette intuition, voici la plus communément utilisée.

Definition

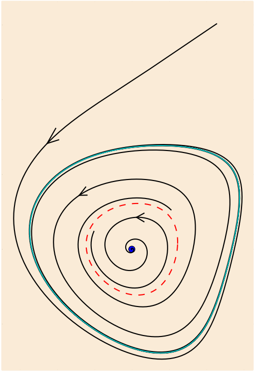
Un ensemble compacte (pour nous fermé borné) A est un ensemble attractant pour une transformation T si il existe un voisinage U de A tel que pour tout voisinage V de A, il existe un entier $N_{U,V}$ tel que pour tout $n \geq N_{U,V}$ on a $T^n(U) \subset V$.

Definition

Nous dirons que A est un attracteur si c'est un ensemble attractant qui contient une orbite dense.

Mêmes définitions pour les flots.

Exemple d'attracteurs.



Le point central (bleu) est un attracteur.

Le cycle (vert) est un attracteur.

Le cycle pointillé (rouge) n'est pas un attracteur (c'est un répulseur).

Toutes les orbites convergent vers un attracteur, sauf celles dont la condition initiale est sur la courbe pointillé (rouge). Elles restent indéfiniment sur cette courbe, mais cette situation n'est pas stable, on peut perturber très peu la condition initiale et sortir de la courbe.

Le bassin d'attraction d'un attracteur A est l'ensemble des points tels que leur ensemble ω-limite est contenu dans A.
Les bassins d'attraction sont des ensembles ouverts dont la frontière peut être très compliquée (exemple plus loin). Cette frontière est en général un répulseur.
Le bassin d'attraction d'un attracteur n'est pas forcément connexe (exemple plus loin). On appelle bassin directe la composante connexe du bassin qui contient l'attracteur (exemple plus loin).
Un système dynamique peut avoir dans son espace de phase plusieurs attracteurs (et donc plusieurs bassins disjoints, exemple plus loin), ou aucun.
Il peut même exister une infinité d'attracteurs (et donc une infinité de bassins disjoints). Un exemple est donné par le phénomène de Newhouse : une infinité d'orbites périodiques stables !

Le bassin d'attraction d'un attracteur A est l'ensemble des points tels que leur orbite “converge” vers A.
Les bassins d'attraction sont des ensembles ouverts dont la frontière peut être très compliquée (exemple plus loin). Cette frontière est en général un répulseur.
Le bassin d'attraction d'un attracteur n'est pas forcément connexe (exemple plus loin). On appelle bassin directe la composante connexe du bassin qui contient l'attracteur (exemple plus loin).
Un système dynamique peut avoir dans son espace de phase plusieurs attracteurs (et donc plusieurs bassins disjoints, exemple plus loin), ou aucun, ou une infinité (phénomène de Newhouse).

La méthode de Newton.

Nous allons illustrer ces remarques sur un exemple “simple”.

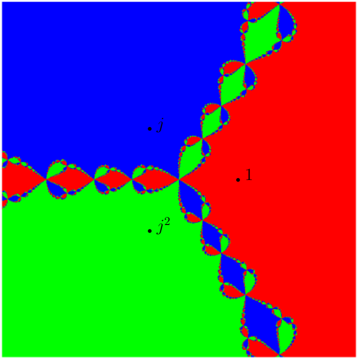
Vous savez tous résoudre l'équation $z^3 = 1$ dans $\mathbb{C}$, les racines sont 1, j et j^2 ($j = (-1 + i\sqrt{3})/2$, $j^2 = (-1 - i\sqrt{3})/2 = \bar{j}$).

Afin de tester la méthode de Newton on peut utiliser cet exemple (résoudre $f(z) = z^3 - 1 = 0$). Dans ce cas la méthode de Newton consiste à partir d'une condition initiale (si possible une bonne approximation d'une racine) et d'itérer la transformation

$$T(z) = \frac{2\,z}{3} + \frac{1}{3\,z^2}\ .$$

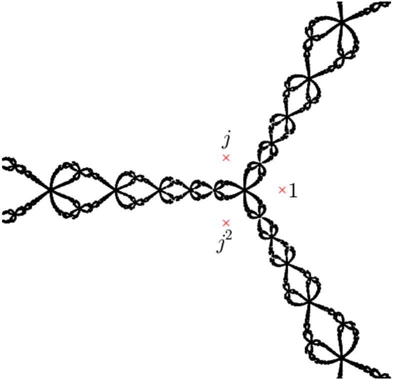
On a donc une transformation du plan $\Omega = \mathbb{C}$ avec exactement trois points fixes 1, j et j^2 (vérifiez le en résolvant $T(z) = z$).

Nous verrons plus loin que ces trois points fixes sont des attracteurs (on montre que ce sont les seuls). Nous pouvons tracer les trois bassins avec des couleurs différentes.



Les trois bassins forment trois ouverts (non connexes) de même frontière.

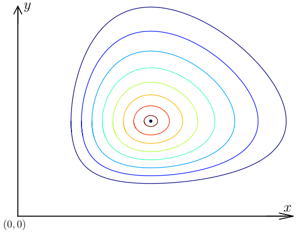
La frontière des bassins.



C'est ici un ensemble fermé invariant, la méthode de Newton n'y converge pas. Il est de dimension de Hausdorff < 2 et donc de mesure de Lebesgue (2d) nulle. Il contient une infinité d'orbites périodiques, un continuum d'orbites denses etc.

Un système dynamique n'a pas toujours d'attracteur.

Par exemple le système prédateur proies n'a pas d'attracteur dans le quadrant positif.



Les attracteurs peuvent être des objets compliqués (attracteurs étranges).

Par exemple dans la transformation de de Hénon, ou dans le système de Lorenz.

Il existe des répulseurs compliqués (par exemple la frontière des bassins de la méthode de Newton).

Critère d'attraction d'un point fixe.

Un attracteur est un ensemble invariant. L'ensemble invariant le plus simple est le point fixe. Quand un point fixe est-il un attracteur ?

Commençons par le cas des transformations dans un espace vectoriel. Soit $\vec{x}_0$ un point fixe de T ($T(\vec{x}_0) = \vec{x}_0$). On va partir avec une condition initiale proche $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{\delta}$, $\vec{\delta}$ petit. On a par la formule de Taylor

$$T(\vec{x}_0 + \vec{\delta}) = T(\vec{x}_0) + DT_{\vec{x}_0}\vec{\delta} + \mathcal{O}\left(\|\vec{\delta}\|^2\right) = \vec{x}_0 + DT_{\vec{x}_0}\vec{\delta} + \mathcal{O}\left(\|\vec{\delta}\|^2\right) \,,$$

avec $DT_{\vec{x}_0}$ la matrice différentielle de T en $\vec{x}_0$ (matrice Jacobienne).

Rappel : par exemple si Φ applique $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

$$\Phi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x_1, x_2) \\ \Phi_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

alors

$$J_\Phi(x_1, x_2) = D\Phi_{(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}\Phi_1(x_1, x_2) & \partial_{x_2}\Phi_1(x_1, x_2) \\ \partial_{x_1}\Phi_2(x_1, x_2) & \partial_{x_2}\Phi_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} ,$$

Attention à l'ordre des indices ! Plus généralement, en utilisant la règle de chaîne et le fait que $\vec{x}_0$ est point fixe

$$T^n(\vec{x}_0+\vec{\delta}) = T^n(\vec{x}_0)+DT^n_{\vec{x}_0}\vec{\delta}+\mathcal{O}\left(\|\vec{\delta}\|^2\right) = \vec{x}_0+\left(DT_{\vec{x}_0}\right)^n\vec{\delta}+\mathcal{O}\left(\|\vec{\delta}\|^2\right) .$$

donc si nous négligeons le terme d'ordre supérieur.....

$$T^n(\vec{x}_0 + \vec{\delta}) \simeq \vec{x}_0 + \left(DT_{\vec{x}_0}\right)^n \vec{\delta}\ .$$

Le comportement de $\left(DT_{\vec{x}_0}\right)^n$ pour grand n dépend des valeurs propres de $DT_{\vec{x}_0}$, et si le module (le spectre est dans $\mathbb{C}$) de toutes les valeurs propres est plus petit que 1 (rayon spectral=plus grand module des valeurs propres) il est raisonnable de penser que le point fixe sera un attracteur.

Théorème

Si le rayon spectral de la différentielle d'une transformation en un point fixe est inférieur à un, ce point fixe est un attracteur

La preuve est laissée au lecteur (contrôle du reste de Taylor).

Théorème

Si le rayon spectral de la différentielle d'une transformation en un point fixe est supérieur à un, ce point fixe n'est pas un attracteur.

Dans le premier cas on dit que le point fixe est stable, dans le second cas qu'il est instable.

Critères de stabilité linéaire des points fixes des transformations.

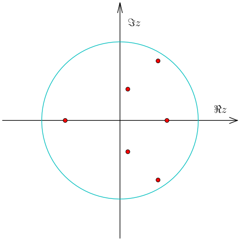
Nous avons donc maintenant un critère de stabilité des points fixes (critère de stabilité linéaire) selon la valeur du rayon spectral de la différentielle au point fixe (plus grand module des valeurs propres). L'avantage de ce critère est qu'il est en général simple à mettre en oeuvre. Il a un petit inconvénient

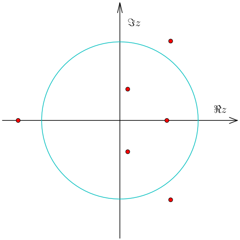
Il ne dit rien si le rayon spectral de la différentielle est 1.

Dans ce cas on peut considérer les termes suivants du développement de Taylor.

Nous verrons plus loin le rapport de cette situation avec les bifurcations.

Notons que la différentielle d'une transformation réelle en un point fixe est une matrice à coefficients réels. Les valeurs propres sont donc réelles ou viennent en paires (non réelles) complexes conjuguées. Cette remarque est souvent utile dans les calculs. Nous la verrons aussi apparaître dans la théorie des bifurcations.





A gauche un spectre stable, à droite un spectre instable, le cercle unité en vert.

Critères de stabilité linéaire des points fixes des flots.

On peut répéter les mêmes considérations pour les points fixes des flots ($\vec{X}(\vec{x}) = 0$). On a les théorèmes suivants.

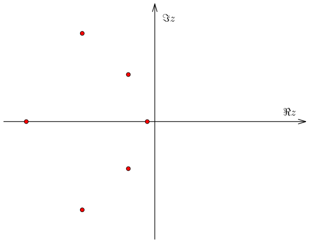
Théorème

Si le spectre la différentielle d'un champ de vecteurs en un point critique est contenu dans le demi plan gauche de $\mathbb{C}$ ouvert ($\Re z < 0$), ce point fixe est un attracteur.

Théorème

Si le spectre la différentielle d'un champ de vecteurs en un point critique contient un point du demi plan droit ouvert de $\mathbb{C}$ ($\Re z > 0$), ce point fixe n'est pas un attracteur.

Dans le premier cas on dit que le point fixe est stable, dans le second cas qu'il est instable.



A gauche un spectre stable, à droite un spectre instable.

Critère de stabilité de Lyapunov des flots.

Il existe de nombreuses autres notions de stabilité des points fixes. L'une des plus utilisée (après le critère spectral) surtout d'un point de vue théorique est le critère de Lyapunov.

Soit (Ω, d) un espace métrique et $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un (semi) flot. Un point fixe $x_0 \in \Omega$ est dit stable au sens de Lyapunov si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in \Omega$ tel que $d(x_0, y) < \delta$ on a pour tout $t \in \mathbb{R}^+$

$$d\big(x_0,\, \varphi_t(y)\big) < \epsilon \ .$$

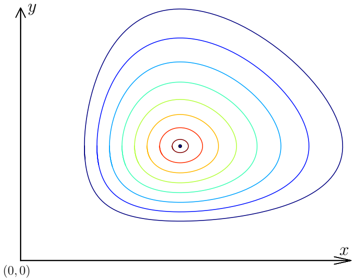
Le point fixe x_0 est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov si il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in \Omega$ tel que $d(x_0, y) < \delta$ on a

$$\lim_{t \to +\infty} d\big(x_0,\, \varphi_t(y)\big) = 0 \ .$$

On peut utiliser des fonctions de Lyapunov pour tester ces stabilités. Mêmes définitions pour le transformations.

Centres.

Exemple d'un point fixe stable au sens de Lyapunov mais pas asymptotiquement stable. Modèle prédateur proie.



Le point fixe est appelé centre, les valeurs propres de la différentielle du champ de vecteurs en ce point sont imaginaires pures. Pour un flot en dimension 2, un centre est un point fixe x_0 tel qu'il existe un voisinage V de x_0 tel que toute orbite contenue dans V (sauf x_0) est un cycle contenant x_0 dans son intérieur.

Exemples de calculs de stabilité.

Pour la transformation de Ulam-Von Neumann $T(x) = 4\,x\,(1-x)$ on a dans $[0,1]$ les seuls points fixes $x = 0$ et $x = 3/4$. Comme $T'(x) = 4 - 8\,x$, $|T'(0)| = 4 > 1$ et $|T'(3/4)| = 2 > 1$. Ce sont donc deux répulseurs.

Pour la méthode de Newton du plan complexe

$$T(z) = \frac{2\,z}{3} + \frac{1}{3\,z^2}\,, \qquad T'(z) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3\,z^3}\,.$$

Donc $T'(1) = T'(j) = T'(j^2) = 0$. Mais il faut revenir aux coordonnées réelles, il est facile (et laissé au lecteur) d'exprimer la différentielle de T dans $\mathbb{R}^2$ en fonction de $dT(z)/dz$. Aux points fixes cette différentielle est nulle. Ce sont donc trois attracteurs.

Quand un point fixe est tel que toutes les valeurs propres de la différentielle en ce point sont nulles on dit que ce point fixe est super-stable. Je vous laisse étudier les points fixes de Hénon.

Terminologie.

Un point fixe $\vec{x}_0$ d'une transformation T est dit hyperbolique si $DT_{\vec{x}_0}$ n'a pas de valeur propre de module 1.

Si toutes les valeurs propres sont de module plus petit que un, le point fixe est appelé un puits (noeud stable si les valeurs propres sont rééles, sinon foyer stable).

Si toutes les valeurs propres sont de module plus grand que un, le point fixe est appelé une source (noeud instable si les valeurs propres sont rééles, sinon foyer instable).

Si le point est hyperbolique avec des valeurs propres de module plus grandes que 1 et des valeurs propres de module plus petit que 1, ce point est appelé un point selle ou point col.

Mêmes définitions pour les flots en remplaçant le cercle unité par l'axe imaginaire pur. Ces terminologies sont parfois étendues au cas de la stabilité de Lyapunov.

Terminologie pour les flots.

Noeud stable et foyer stable.

Noeud instable et foyer instable. Nous verrons plus loin le cas des points selles

Stabilité des orbites périodiques des transformations.

Soit $(x_j) = (x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ une orbite périodique de période p pour une transformation T. Comme $T^p(x_0) = x_0$, nous pouvons analyser la stabilité linéaire de T^p en x_0, et de même en tout point x_j de l'orbite.

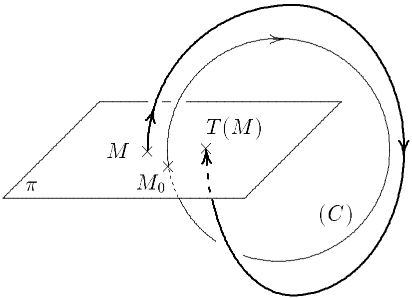
Exercice : en supposant que DT est inversible en tous les points de l'orbite, montrer que toutes les matrices $DT^p_{x_j}$ sont conjuguées (utiliser la règle de chaîne). En déduire que le critère de stabilité linéaire de T est le même en tout point de l'orbite (le rayon spectral de deux matrices conjuguées est le même).

Théorème

Si le rayon spectral d'une des matrices $DT^p_{x_j}$ est plus petit que 1, l'orbite périodique est un attracteur. Si il est plus grand que 1, l'orbite périodique n'est pas un attracteur.

Stabilité des cycles des flots sans points fixes.

On utilise une transformation de Poincaré.



On peut montrer que le critère linéaire de stabilité ne dépend pas de la transformation de Poincaré utilisée : les différentielles aux points fixes sont toutes conjuguées.

Dynamique locale autour d'un point fixe hyperbolique d'une transformation.

Théorème (Hartman-Grobman)

Soit $\vec{x}_0$ un point fixe hyperbolique d'une transformation T (pas de v.p. de module 1). Il existe un ***homéomorphisme*** *H d'un voisinage ouvert U de $\vec{x}_0$ sur un voisinage ouvert V de $\vec{x}_0$ tel que sur U on a*

$$T = H^{-1} \circ L \circ H$$

avec L la transformation affine

$$L(\vec{x}) = \vec{x}_0 + DT_{\vec{x}_0}\left(\vec{x} - \vec{x}_0\right) .$$

Théorème analogue pour les flots (sauf si il y a une valeur propre imaginaire pure).

$$T = H^{-1} \circ L \circ H$$

C'est le résultat qu'intuitivement vous attendiez tous ! (sauf dans le cas avec une valeur propre de module 1).

Localement la transformation se comporte comme sa linéarisée (le flot se comporte comme le flot linéaire). Sauf que la conjugaison n'est pas différentiable en général (des résultats plus fins font intervenir les résonances entre valeurs propres).

Le théorème est en général faux si il y a une valeur propre de module 1. Considérons dans $\Omega = \mathbb{R}^2$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x^3 \\ y + y^3 \end{pmatrix} \ , \quad DT_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ .$$

La transformation linéarisée L laisse tout l'espace fixe, mais T n'a qu'un seul point fixe (0,0), donc T et L ne sont pas conjuguées.

Dans le cas d'un point fixe $\vec{x}_0$ avec la différentielle de la transformation T en ce point sans valeur propre de module 1, nous allons donc essayer de comprendre la dynamique locale de T en utilisant la dynamique de

$$L(\vec{x}) = \vec{x}_0 + DT_{\vec{x}_0}\big(\vec{x} - \vec{x}_0\big) \ ,$$

ce qui devrait être plus facile.
Pour simplifier les notations, on peut conjuguer par une translation et ramener $\vec{x}_0$ à $\vec{0}$ et appeler A la matrice $DT_{\vec{x}_0}$. On va donc étudier la transformation $\vec{x}' = A\vec{x}$.

Transformation linéaire hyperbolique.

Considérons le cas où A a des valeurs propres de module plus grand que 1 et d'autres de module plus petit que 1 (mais aucune de module 1).

Soit $\mathrm{E}^{\mathbf{u}}$ le sous espace spectral correspondant aux valeurs propres de module plus grand que 1 (sous espace spectral instable) et $\mathrm{E}^{\mathbf{s}}$ le sous espace spectral correspondant aux valeurs propres de module plus petit que 1 (sous espace spectral stable).

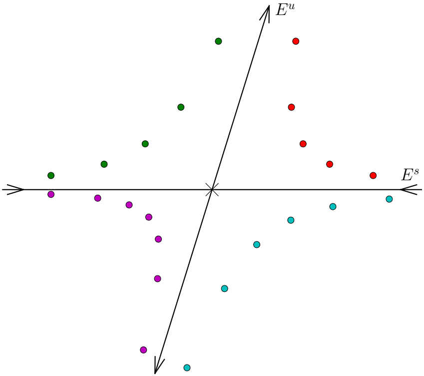
Si $\vec{x} \in \mathrm{E}^{\mathbf{s}}$, $A^n\vec{x}$ tend vers zéro si n tend vers l'infini (exponentiellement vite), c'est à dire que l'orbite converge vers le point fixe.

Si $\vec{x} \in \mathrm{E}^{\mathbf{u}} \setminus \{\vec{0}\}$, $A^n\vec{x}$ tend vers l'infini si n tend vers l'infini, c'est à dire que l'orbite s'éloigne du point fixe.

Dynamique linéaire hyperbolique, transformations.

Pour un point initial $\vec{x}_0$ proche de $\vec{0}$ mais en dehors de $\mathrm{E}^{\mathbf{u}} \cup \mathrm{E}^{\mathbf{s}}$

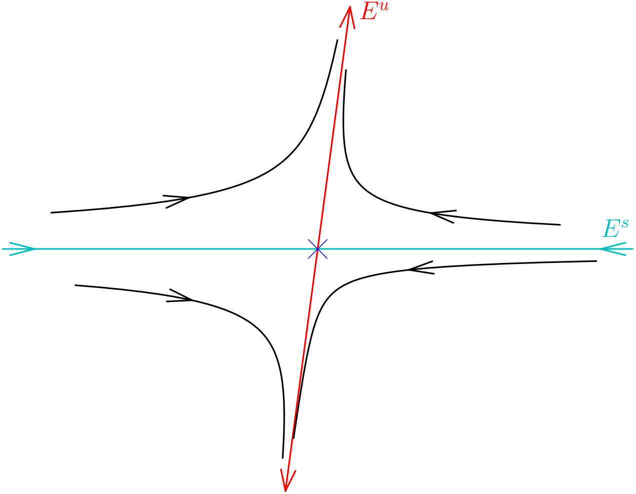
l'orbite $\left(A^n \vec{x}_0\right)$ décrit une "sorte d'hyperbole"



dont je vous laisse calculer l'équation pour le cas d'un espace de phase de dimension 2.

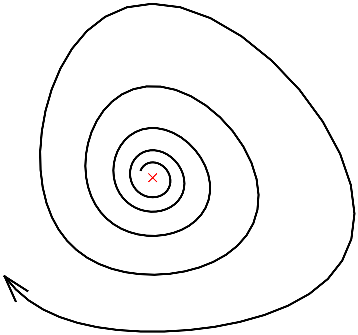
Dynamique linéaire hyperbolique, flots

C'est même encore plus simple dans le cas des flots. En dimension deux avec deux valeurs propres réelles (une positive, une négative) :



Dynamique linéaire hyperbolique, flots

En dimension deux avec deux valeurs propres non réelles de parties imaginaires non nulles (complexes conjuguées) :

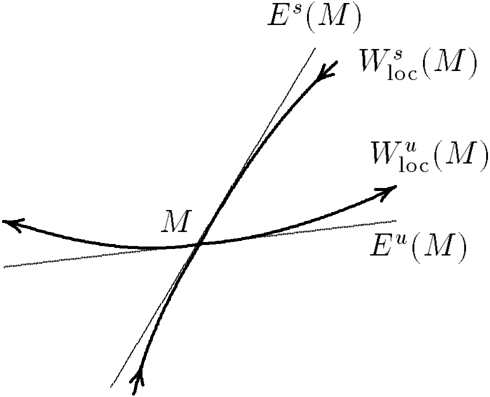


Dynamique non linéaire hyperbolique des transformations.

Tant que l'orbite reste dans V nous pouvons appliquer H^{-1} et conclure.

Il existe donc localement une variété (topologique) stable $\mathrm{W}^{\mathbf{s}}_{\mathrm{loc}}$, invariante par la dynamique, sur laquelle la dynamique converge (exponentiellement vite) vers le point fixe et localement une variété (topologique) instable $\mathrm{W}^{\mathbf{u}}_{\mathrm{loc}}$, invariante par la dynamique, sur laquelle la dynamique s'éloigne du point fixe (la dynamique inverse converge exponentiellement vite).

On peut montrer par d'autres méthodes que ces variétés sont en fait régulières.


$E^s(M)$
$W^s_{\mathrm{loc}}(M)$
$W^u_{\mathrm{loc}}(M)$
M
$E^u(M)$

Théorèmes des variétés stables et instables locales.

Théorème

Soit T un difféomorphisme au moins C^1 sur un voisinage d'un point x_0 de $\mathbb{R}^n$ tel que x_0 est un point fixe hyperbolique de T ($T(x_0) = 0$ et DT_{x_0} n'a pas de valeur propre de module 1). Alors il existe une variété stable locale $\mathrm{W}^{\mathbf{s}}_{\mathrm{loc}}$, tangente en x_0 au sous espace stable $\mathrm{E}^{\mathbf{s}}$ de DT_{x_0} et de même dimension. Il existe une variété instable locale $\mathrm{W}^{\mathbf{u}}_{\mathrm{loc}}$, tangente en x_0 au sous espace stable $\mathrm{E}^{\mathbf{u}}$ de DT_{x_0} et de même dimension. Ces deux variétés sont aussi régulières que T. La variété stable locale $\mathrm{W}^{\mathbf{s}}_{\mathrm{loc}}$ est invariante par T, la variété instable locale $\mathrm{W}^{\mathbf{u}}_{\mathrm{loc}}$ est invariante par T^{-1}.

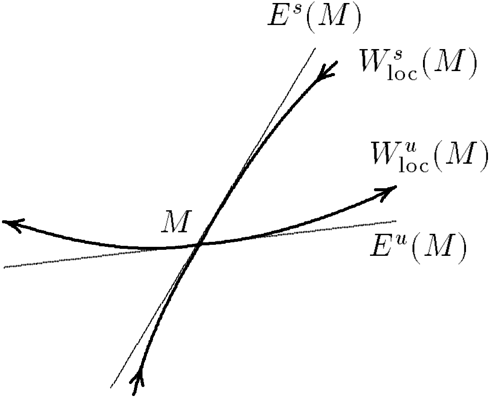
Une méthode numérique pour tracer les variétés invariantes locales de dimension un.

Supposons $\mathrm{E}^{\mathbf{u}}$ de dimension 1, et notons $\vec{v}$ un vecteur non nul de $\mathrm{E}^{\mathbf{u}}$. Pour un $\epsilon > 0$ petit on considère la condition initiale $x_0 + \epsilon\,\vec{v}$. Ce point n'est pas sur $\mathrm{W}^{\mathbf{u}}_{\mathrm{loc}}$ mais il en est très proche. De plus la variété instable locale est localement transversalement stable, donc l'orbite va être de plus en plus proche de $\mathrm{W}^{\mathbf{u}}_{\mathrm{loc}}$. Si besoin on prendra un ϵ plus petit. On recommence avec $x_0 - \epsilon\,\vec{v}$ pour avoir l'autre branche.

Pour $\mathrm{W}^{\mathbf{s}}_{\mathrm{loc}}$ on fait les mêmes calculs avec la transformation inverse.

Même méthode pour les flots.

Il existe aussi une méthode pour trouver les coefficients de Taylor des variétés vues comme des graphes.


$E^s(M)$
$W^s_{\mathrm{loc}}(M)$
$W^u_{\mathrm{loc}}(M)$
M
$E^u(M)$

Variétés stables et instables globales.

Si on a un difféomorphisme global on peut “étendre” la variété stable en itérant par l'inverse et “étendre” la variété instable en itérant. On obtient ainsi des variétés stables et instables globales. Ce sont des ensembles invariants. La trajectoire d'une condition initiale sur la variété stable globale converge vers le point fixe. La trajectoire d'une condition initiale sur la variété instable globale converge vers le point fixe par itération inverse.

Tous ces résultats sont valables pour des flots.

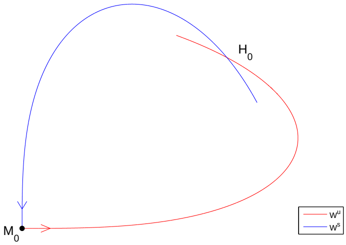
Le cas des transformations non inversibles est plus complexe. On peut quand même définir des variétés locales (voir par exemple M. W. Hirsch, C.C.Pugh, M. Shub. Invariant Manifolds.Lecture Notes in Mathematics **583**, Springer, 1977).

Points homoclines et hétéroclines.

Deux variétés stables ne peuvent pas se croiser. Deux variétés instables ne peuvent pas se croiser. Mais une variété stable peut croiser une variété instable, et même être confondue avec elle.
Si ce sont les variétés de deux points fixes différents le (les) point(s) de croisement s'appelle(nt) un(des) point(s) hétérocline(s). Si ce sont les variété d'un même point fixe on parle de croisement(s) homocline(s).
Poincaré avait déjà remarqué qu'un croisement homocline transverse implique une situation très complexe (absence d'intégrale première analytique, voir les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste volume 3). La situation a ensuite été analysée par S.Smale qui y a découvert un fer à cheval sur la plage de Rio de Janeiro.

Point homocline.

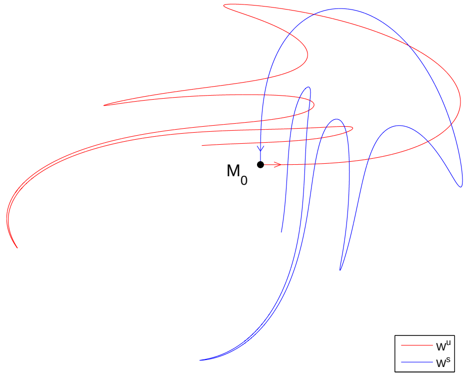
Le point M_0 est un point fixe hyperbolique pour un difféomorphisme T. Sa variété stable et sa variété instable se croisent transversalement en H_0, c'est un point homocline transverse. Pour le moment on trace seulement un quart de la figure.



T est un difféomorphismes construit pour que la figure soit plus lisible. On peut voir les même phénomènes dans la transformation de Hénon (avec des figures plus “aplaties”).

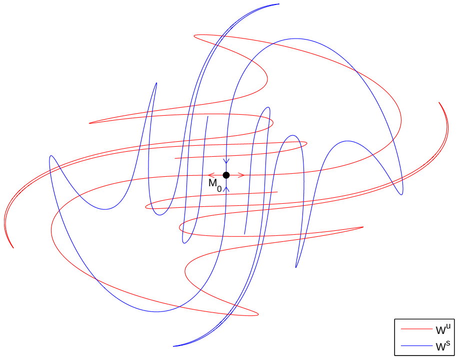
Points homoclines.

L'image d'un point homocline est un point homocline, et son image inverse aussi (c'est aussi vrai pour les points hétéroclines). Ça se complique (toujours un quart de la figure) :



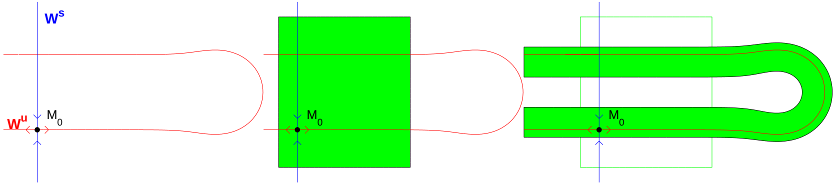
Points homoclines.

La figure complète est encore plus complexe (et je n'ai pas tout tracé...)

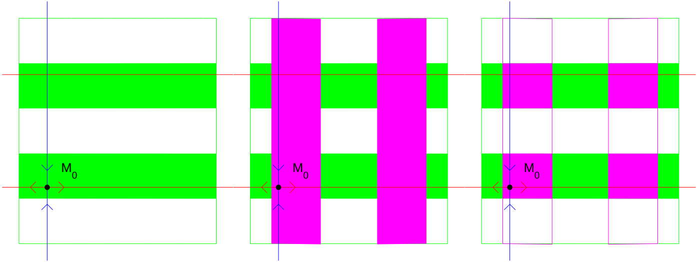


En cherchant bien on y trouve un fer à cheval.

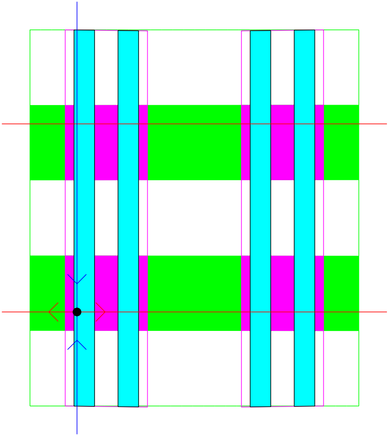
Le fer à cheval.



Et ça marche aussi pour l'inverse



Le fer à cheval.



en itérant il reste un ensemble de Cantor invariant avec une dynamique complexe mais qui n'est pas un attracteur.

Théorème de la variété centrale.

(Center manifold theorem).

Ce théorème permet de réduire localement la dimension du système quand le spectre de la différentielle en un point fixe rencontre le cercle unité. Intuitivement les directions spectrales correspondant à la partie du spectre en dehors du cercle unité ne devraient pas jouer de rôle. Cependant elles peuvent induire une courbure des variétés. Nous allons énoncer ce théorème dans un cas restreint où il n'y a pas de directions instables qui est le cas utilisé pour la théorie des bifurcations. On pourra consulter la bonne littérature pour le cas général (livres de Guckenheimer et Holmes, Hirsch Pugh et Shub etc.).

Théorème de la variété centrale.

Soit T *un difféomorphisme de* $\mathbb{R}^n$ *et* x_0 *un point fixe de* T*.*
Supposons que

$$\mathrm{spectre}(DT_{x_0}) = \Sigma_c \cup \Sigma_s$$

avec $\Sigma_c \subset \{|z| = 1\}$*,* $\Sigma_s \subset \{|z| < 1\}$*. Soient* E^c *et* E^s *les sous espaces spectraux correspondants. Alors il existe un voisinage* V *de* x_0 *et des variétés contenues dans* V W^c *et* W^s*, tangentes à* E^c *et* E^s *en* x_0 *et de même dimension.* W^s *est invariante par* T*. La variété centrale* W^c *n'est pas nécessairement unique. On a de plus*
Si $x \in W^c$ *et* $T(x) \in V$*, alors* $T(x) \in W^c$ *(invariance de* W^c*).*
Si $T^n(x) \in V$ *pour tout* $n = 0, 1\ 2\ \ldots$ *alors la distance entre* $T^n(x)$ *et* W^c *tend vers zéro (exponentiellement vite) (stabilité transverse de* W^c*).*
Cette situation est stable par petites perturbations de la transformation.

Cas des flots.

Il existe un résultat entièrement analogue pour les flots.

Il est facile de construire une exemple de flot pour lequel la variété centrale n'est pas unique. Considérons le système dynamique dans $\Omega = \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x^2 \\ \frac{dy}{dt} &= -y \ . \end{aligned}$$

L'origine est un point fixe et la différentielle du champ de vecteurs X est donnée par

$$DX_{0,0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

La variété stable est l'axe des y, mais il y a un continuum de variétés centrales.

Non unicité de la variété centrale des flots.

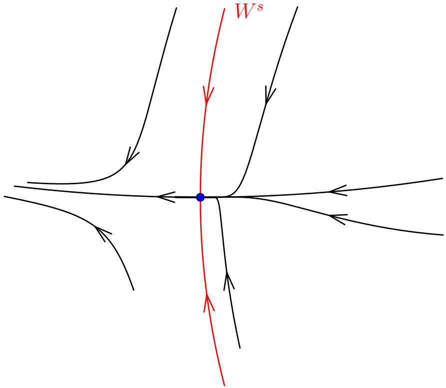


Figure “analogue” pour les transformations.

Variétés invariantes normalement hyperboliques et systèmes lents rapides.

Il existe une extension de la notion de variété centrale : les variétés invariantes normalement hyperboliques, voir le livre de Hirsch Pugh et Shub déjà mentionné.
Elles peuvent être utilisées dans l'analyse des systèmes lents rapides, voir par exemple le livre de J.-P. Francoise ou l'article de revue de T.Kaper : An introduction to geometric methods and dynamical systems theory for singular perturbation problems dans le livre *Analyzing multiscale phenomena using singular perturbation methods* édité par J. Cronin et R. E. O'Malley, Jr. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, 56. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

Quelques références.

J.Guckenheimer, P.Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, 2002.

L.Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, 2006.

R.Devanney, M.Hirsch et S.Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press, 1974.

J.-P. Francoise. *Oscillations en biologie, Analyse qualitative et modèles*. Springer, 2005.

D.Ruelle. *Elements of Differentiable Dynamics and Bifurcation Theory*. Academic Press,1989.