

Champs de vecteurs du plan.

## Dimension 1.

Avant de parler du plan parlons de la droite (ou du cercle). Un champ de vecteurs sur la droite est donné par une fonction (régulière)  $f(x)$  et on a l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = f(x) .$$

Si  $f$  ne s'annule pas, toutes les trajectoires divergent, vers  $\pm\infty$  selon le signe de  $f$ .

Si  $f$  s'annule, il y a des points fixes, on décide de la dynamique dans chaque intervalle sans point fixe (et éventuellement aussi dans des demi droites sans point fixe intérieur) à partir du signe (constant) de  $f$  dans le domaine.

Par exemple

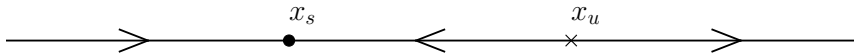
$$\frac{dx}{dt} = \mu + x^2 .$$

Pour  $\mu > 0$  toutes les trajectoires tendent vers  $+\infty$ .

Pour  $\mu < 0$  il y a deux points fixes  $x_u = \sqrt{-\mu}$  instable,  $x_s = -\sqrt{-\mu}$  stable (attracteur).

Le bassin d'attraction de  $x_s = -\sqrt{-\mu}$  est la demi droite  $(-\infty, \sqrt{-\mu})$ .

Toute condition initiale dans  $(\sqrt{-\mu}, +\infty)$  donne une trajectoire qui diverge.



Dans le cas des champs de vecteurs du plan il existe un certain nombre de résultats généraux (qui sont en général faux en dimension plus grande que 2).

L'espace de phase est  $\mathbb{R}^2$  et nous noterons  $x$  et  $y$  les coordonnées (parfois  $x_1$  et  $x_2$ ). Nous avons donc à étudier un système de deux équations différentielles couplées

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y)\end{aligned}$$

et plus précisément à comprendre la dynamique à temps grand. Beaucoup de résultats passent à la sphère et plus généralement aux champs de vecteurs sur des surfaces.

## Ensembles limites d'une trajectoire.

### Definition

L'ensemble  $\omega$ -limite d'une trajectoire (ou d'une condition initiale) est l'ensemble des points d'accumulation de cette trajectoire quand le temps tend vers  $+\infty$ .

### Definition

L'ensemble  $\alpha$ -limite d'une trajectoire (ou d'une condition initiale) est l'ensemble des points d'accumulation de cette trajectoire quand le temps tend vers  $-\infty$  (c'est à dire par l'évolution inverse qui n'est pas toujours définie pour les transformations).

Ce sont des ensembles fermés, invariants, non vides si l'espace de phase est compacte.

# Le théorème de Poincaré Bendixon

## Théorème

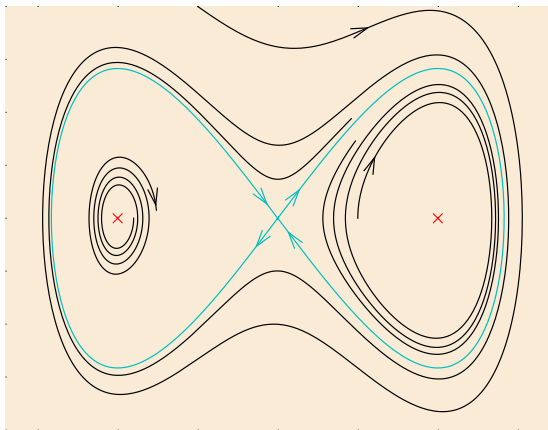
*Soit  $M$  une condition initiale pour un champ de vecteurs du plan telle que  $\omega(M)$  est contenu dans un compact  $K$ . Supposons que  $K$  ne contienne qu'un nombre fini de points fixes du champ de vecteurs. Il y a alors trois cas possibles.*

- i)  $\omega(M)$  est un cycle sans point fixe.*
- ii)  $\omega(M)$  est composé d'une famille (finie) d'orbites qui convergent vers un point fixe quand  $t \rightarrow \pm\infty$ .*
- iii)  $\omega(M)$  est un unique point fixe.*

Version légère : si  $\omega(M)$  ne contient pas de point fixe c'est un cycle.

Le même résultat est vrai pour les ensembles  $\alpha$  limites.

Exemples où  $\omega(M)$  est composé d'une famille (finie) d'orbites qui convergent vers un point fixe quand  $t \rightarrow \pm\infty$ .



Pour aller plus loin nous allons commencer par discuter la présence de cycles.

Un exemple est le fameux système proies prédateurs de Lotka et Volterra (dans l'espace de phase  $\mathbb{R}_+^2$ )

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y) = P(x, y) \quad \frac{dy}{dt} = y(-\gamma + \delta x) = Q(x, y)$$

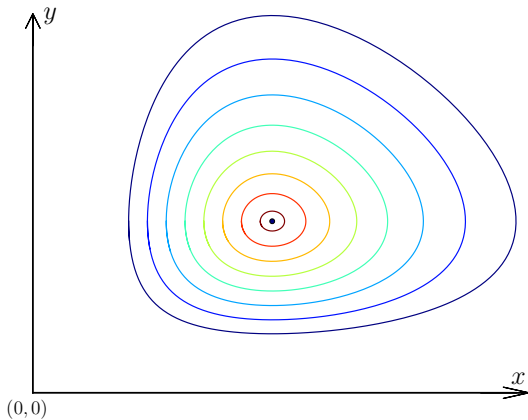
avec  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  positifs. La fonction

$$F = \beta y + \delta x - \alpha \log(y) - \gamma \log(x)$$

est conservée ( $P\partial_x F + Q\partial_y F = 0$ ). Il y a un point fixe dans l'intérieur du quadrant positif  $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$  et le reste est feuilleté en cycles.



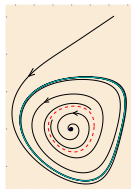
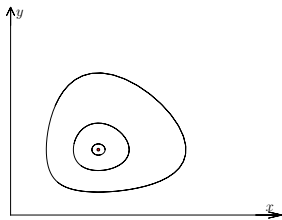
Famille continue de cycles dans le modèle prédateurs proies.



Un cycle  $\gamma$  sans point fixe est appelé cycle limite si il existe un voisinage  $V$  de  $\gamma$  sans autre cycle limite.

Le cycle limite est dit stable si il est l'ensemble  $\omega$ -limite de tous les points d'un voisinage  $V$  (attracteur). Il est dit instable si il est l'ensemble  $\alpha$ -limite de tous les points d'un voisinage  $V$  (répulseur).

Les cycles dans le modèle prédateurs-proies ne sont pas des cycles limites (ils ne sont pas isolés).



## Le problème des cycles limites.

Revenons au Congrès International de Mathématiques de Paris en 1900. Le mercredi 8 août à 9 heures (en l'absence du Président le prince Roland Bonaparte), Monsieur David Hilbert pose 23 problèmes dans son exposé "Problèmes Futurs des Mathématiques".

Il énonce la deuxième partie de son seizième problème (Problèmes de topologie des courbes et des surfaces algébriques) de la manière suivante

## XVI. Problèmes de topologie des courbes et des surfaces algébriques

“Comme suite à ce problème purement algébrique j’attirerai l’attention sur la question suivante, qui me semble pouvoir être attaquée au moyen de la méthode de la variation continue des coefficients ; la réponse à cette question est d’ailleurs importante pour la topologie des familles de courbes définies par des équations différentielles : *Déterminer le nombre maximum et la situation relative des CYCLES LIMITES de M. Poincaré dans le cas d’une équation différentielle du premier ordre et du premier degré de la forme*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}$$

où  $X$ ,  $Y$  désignent des fonctions rationnelles entières de degré  $n$ .”  
(champ de vecteurs polynomial.)

Pour tout entier  $n$ , on note  $H(n)$  le nombre maximal de cycles limites que peut posséder un système dynamique sur la sphère

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y)\end{aligned}$$

avec  $P$  et  $Q$  des polynômes en  $x$  et  $y$  de degré maximal  $n$ .

En 1923 Henri Dulac publie une démonstration de la finitude de  $H(n)$  pour tout  $n$ . Cette démonstration s'est avérée incomplète (Y. Ilyashenko 1979).

En 1991/1992 deux preuves indépendantes ont été publiées par Jean Ecalle (J. Ecalle, J. Martinet, R. Moussu, J. P. Ramis) et Yulii Ilyashenko pour le cas  $P$  et  $Q$  analytiques.

Pour l'historique et une revue voir Yu. Ilyashenko, Centennial History of Hilbert's 16th Problem. Bull. Amer. Math. Soc. **39** (2002), 301-354.

Aucune borne explicite n'est connue pour  $H(n)$ , même pas pour  $H(2)$ . On ne sait même pas si  $H(2) < \infty$ .

En 1979 Shi Songling a donné un exemple d'un champ de vecteurs degré 2 avec 4 cycles limites

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \lambda x - y - 10x^2 + (5 + \delta)xy + y^2 \\ \frac{dy}{dt} &= x + x^2 + (-25 + 8\epsilon - 9\delta)xy,\end{aligned}$$

$$\delta = -10^{-13}, \quad \epsilon = -10^{-52}, \quad \lambda = -10^{-200}.$$

C'est le record actuel pour  $H(2)$ .

## Critère de Bendixon-Dulac

Le théorème de Bendixon-Dulac permet de montrer l'absence de cycle.

### Théorème

*Supposons qu'il existe une fonction  $\varphi(x, y)$  telle que*

$$\partial_x(\varphi P) + \partial_y(\varphi Q)$$

*a presque partout le même signe dans un domaine  $\Delta$  simplement connexe du plan. Alors les système*

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y),$$

*n'a pas de cycle contenu dans  $\Delta$ .*

La preuve facile est laissée au lecteur, elle utilise la formule de Green.

## Exemple d'application du critère de Bendixon-Dulac.

Prenons le système de Lotka-Volterra

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y) = x (r_1 - c_{11} x - c_{12} y) , \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y) = y (r_2 - c_{21} x - c_{22} y) ,\end{aligned}$$

avec les  $r$  et les  $c$  réels.

Soit  $\Delta$  un ouvert de  $\mathbb{R}_+^2$  (donc il ne touche pas les bords).

Essayons la fonctions  $\varphi(x, y) = 1/(xy)$ .

On trouve 
$$\partial_x(\varphi P) + \partial_y(\varphi Q) = -\frac{c_{11} x + c_{22} y}{x y} ,$$

donc si  $c_{11} > 0$  et  $c_{22} > 0$ , il n'y a pas de cycle à l'intérieur de  $\mathbb{R}_+^2$ .



## Existence de cycles.

Il existe des conditions suffisantes pour l'existence de cycles. L'une d'elle est le théorème de l'anneau de Poincaré. Voir le chapitre 7 du livre de F.Dumortier, J.Llibre, J.Artès.

Nous verrons aussi que les bifurcations de Hopf permettent aussi de construire des cycles limites.

## L'index de Poincaré d'une courbe dans $\mathbb{R}^2$ .

Soit  $\vec{X}$  un champ de vecteurs de  $\mathbb{R}^2_+$ , et soit  $\mathcal{C}$  une courbe fermée (de Jordan) sans point fixe (de  $\vec{X}$ ). Pour simplifier on supposera  $\mathcal{C}$  sans auto intersection (lasso).

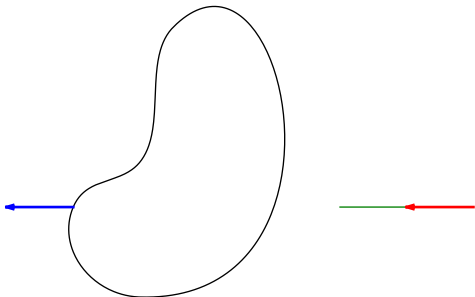
Soit  $M(s)$  cette courbe ( $0 \leq s \leq 1$ ,  $M(0) = M(1)$ ) parcourue dans le sens trigonométrique direct. En fonction de  $s$ , le vecteur  $\vec{X}(M(s))$  tourne, et bien sûr  $\vec{X}(M(0)) = \vec{X}(M(1))$ . Le nombre de tours que fait  $\vec{X}(M(s))$  de  $s = 0$  à  $s = 1$  est l'index de la courbe  $\mathcal{C}$  par rapport au champ  $\vec{X}$ .

C'est un nombre entier qui ne change pas si on déforme la courbe sans croiser de point fixe (homotopie dans le complément de l'ensemble des points fixes).

Il existe une formule (rarement utile), l'index est égal à

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{X_1 dX_2 - X_2 dX_1}{X_1^2 + X_2^2} .$$

Nous allons calculer l'index du chemin suivant :



## Exemple de calcul d'index.

Fichier deg.mp4

Nous concluons donc que l'index est  $-2$ . Nous allons voir maintenant comment l'index est relié aux points fixes du champ de vecteurs situés à l'intérieur de la courbe.

## L'index de Poincaré d'un point fixe isolé.

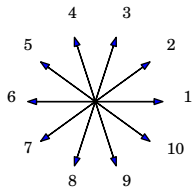
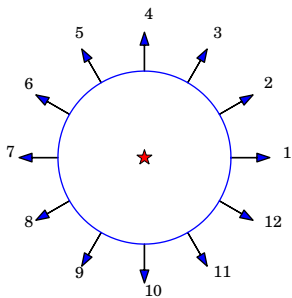
On calcule l'index le long d'une courbe qui entoure un point fixe et qui ne contient aucun autre point fixe à l'intérieur. On montre que cet index ne dépend pas de la courbe.

Pour les points fixes hyperboliques (la Jacobienne n'a pas de valeur propre nulle) les résultats sont les suivants.

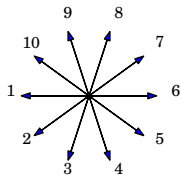
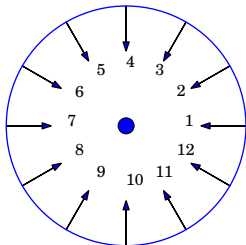
- i) Source (la Jacobienne a deux valeurs propres de partie réelle positive), index  $+1$ .
- ii) Puits (la Jacobienne a deux valeurs propres de partie réelle négative), index  $+1$ .
- iii) Selle (la Jacobienne a une valeur propre positive et une négative), index  $-1$ .

Pour les points fixes dégénérés on peut trouver des entiers variés.

## Index d'une source

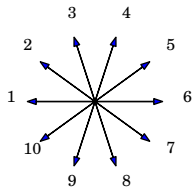
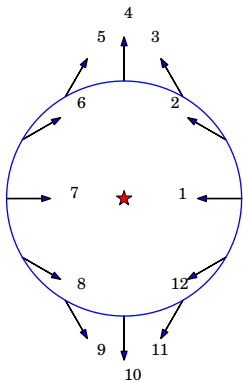


## Index d'un puits





## Index d'un point selle



## Le théorème de Poincaré.

Soit  $\vec{X}$  un champ de vecteurs de  $\mathbb{R}_+^2$ , et soit  $\mathcal{C}$  une courbe fermée (de Jordan) sans point fixe (de  $\vec{X}$ ) et sans auto intersection. Si l'intérieur de  $\mathcal{C}$  ne contient qu'un nombre fini de points fixes, alors l'index de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $\vec{X}$  est égal à la somme des index des points fixes intérieurs.

Conséquences :

Une orbite fermée  $\gamma$  sans point fixe doit contenir au moins un point fixe à l'intérieur (1 tour).

Si ce point fixe est unique et hyperbolique c'est une source ou un puits.

Si tous les points fixes intérieurs sont hyperboliques, ils doivent être en nombre impair  $2n + 1$  avec  $n$  points selles et  $n + 1$  puits ou sources.

## Exemple d'application de l'index.

Sylvie, Chi, Sylvain et Régis m'ont proposé le champ de vecteurs

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) = x \left( r_1 - c_{11} x - c_{12} y + a \frac{y}{x + y} \right),$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y) = y \left( r_2 - c_{21} x - c_{22} y - a \frac{x}{x + y} \right),$$

avec  $c_{11} > 0$  et  $c_{22} > 0$ ,  $r_1 > 0$  et  $r_2 > 0$ .

Ce champ de vecteurs du plan n'a pas de cycle dans  $\mathbb{R}_+^2$  (Dulac). Il a deux points fixes sur le bord du quadrant positif (sans compter l'origine), et (étonnamment) 0, 1, ou 2 points fixes, ou une ligne de points fixes à l'intérieur de  $\mathbb{R}_+^2$ .

Nous allons considérer le cas où tous les points fixes sont hyperboliques (pas de valeur propre nulle). On peut traiter le cas général mais cela demande beaucoup plus de travail et l'utilisation de résultats difficiles.

## Bilan des index possibles.

Comme le champ de vecteurs n'a qu'au plus deux points fixes dans le quadrant positif ouvert, si ces deux points fixes sont non dégénérés (c.à.d. hyperboliques), les seules valeurs possibles de l'index sont

- -2, deux points fixes selles à l'intérieur du circuit.
- -1, un seul point fixe selle à l'intérieur du circuit.
- 0, aucun point fixe, ou un point fixe selle et un puits, ou un point fixe selle et une source, à l'intérieur du circuit.
- 1, un puits (ou une source) à l'intérieur du circuit.
- 2, deux puits (ou deux sources ou un puits et une source) à l'intérieur du circuit.

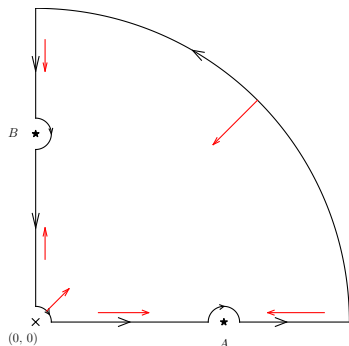
On montre qu'en tout point fixe  $(x_0, y_0)$  autre que l'origine, la trace de la différentielle est égale à

$$-(c_{11} x_0 + c_{22} y_0) < 0 .$$

Donc il n'y a pas de source !

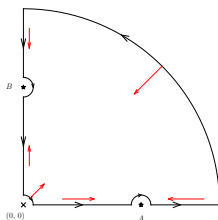
## Un circuit sans point fixe.

Nous allons utiliser le circuit suivant parcouru dans le sens trigonométrique direct.



$A$  et  $B$  sont les points fixes sur les axes, le grand quart de cercle est supposé de rayon suffisamment grand pour que le champ  $y$  soit comme indiqué et qu'il n'y ait aucun point fixe à l'extérieur.

## Index du circuit.



- L'infini (que nous supposons instable) contribue pour  $+1/4$  de tour.
- La source à l'origine contribue pour  $-1/4$  de tour (on tourne autour dans le sens trigonométrique inverse).
- Pour les points fixes  $A$  et  $B$ , ils contribuent pour  $1/2$  tour si ce sont des selles et  $-1/2$  tour si ce sont des puits car on tourne autour dans le sens trigonométrique inverse.

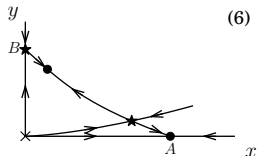
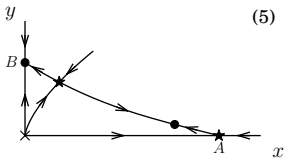
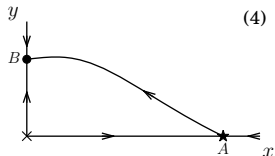
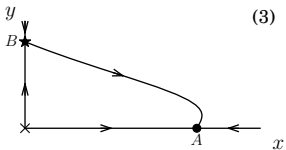
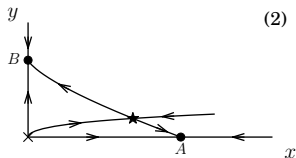
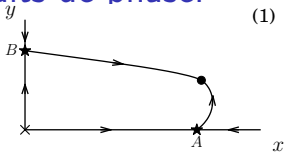
## Conclusions.

- Si  $A$  et  $B$  sont des points fixes selles, l'index du circuit est 1, le quadrant positif ouvert ne contient qu'un seul point fixe qui est un puits.
- Si  $A$  et  $B$  sont des puits l'index du circuit est  $-1$ , le quadrant positif ouvert ne contient qu'un seul point fixe qui est un point selle.
- Enfin si l'un des deux points fixes  $A$  et  $B$  est un puits et l'autre un point selle, l'index du circuit est 0, et le quadrant positif ouvert ne contient aucun point fixe, ou un point fixe selle et un puits.

Ces six cas possibles sont réalisés pour des valeurs des paramètres.



# Les portraits de phase.



Les puits sont représentés par des ronds, les points selles par des étoiles, on a aussi tracé leurs variétés stables et instables.

## Constructions utiles.

Il existe quelques constructions “simples” qui sont utiles pour comprendre la dynamique globale :

- nulclines/isoclines,
- séparatrices,
- champs de vitesses.

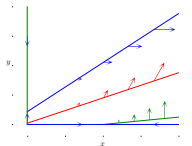
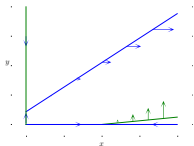
## Isoclines, nulclines

Il peut être commode d'analyser les points où le champ de vecteurs a une direction fixée :

$$X_2(x, y) = \alpha X_1(x, y).$$

Ces courbes sont appelées des isoclines (nulclines si  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = \infty$ ).

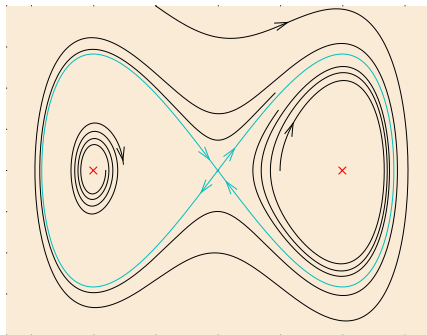
Les nulclines sont donc les courbes où le champ de vecteurs est parallèle à l'un des axes. Elles se croisent aux points fixes.



A gauche les nulclines pour un système de Lotka Volterra. A droite en plus une isocline en rouge, il est clair qu'il y a explosion (en fait en temps fini). Attention ces courbes ne sont pas invariantes.

## Séparatrices.

Ce sont des variétés stables ou instables de points fixes hyperboliques. Comme deux trajectoires ne peuvent se rencontrer sans être confondues, elles séparent l'espace de phase en différents domaines invariants.



## Champs de vitesse.

Quiver plots. On représente le champ de vecteurs par une flèche en différent points.

## Compactification et désingularisation.

On peut parfois avoir besoin de renseignements sur la dynamique à l'infini. On peut faire une conjugaison qui ramène l'infini à distance finie. On peut aussi compactifier l'espace. Une façon intéressante de compactifier est due à Poincaré, elle transforme un champ de vecteurs polynomial en un champ de vecteurs sur la sphère ou sur le disque.

Des champs de vecteurs peuvent posséder des points singuliers où leur développement de Taylor commence par des termes d'ordre supérieur à un. On applique des changements de temps et des conjugaison pour décrire la dynamique près de ces points : désingularisation (blow-up).

Pour plus de détails sur ces deux sujets on pourra consulter le livre de F.Dumortier, J.Llibre, J.Artès.

## Stabilité structurelle (dimension quelconque).

Une transformation  $T$  est dite structurellement stable si il existe un voisinage  $V$  ( $C^1$ ) de  $T$  tel que toute transformation  $T' \in V$  est  $C^0$  conjuguée à  $T$  (rappelons que cela signifie qu'il existe un homéomorphisme  $\Psi$  qui dépend en général de  $T'$  tel que  $T' = \Psi^{-1} \circ T \circ \Psi$ ).

Un champ de vecteurs  $X$  est dit structurellement stable si il existe un voisinage  $V$  ( $C^1$ ) de  $X$  tel que pour tout  $X' \in V$  il existe un homéomorphisme  $\Psi$  (qui dépend en général de  $X'$ ) qui envoie les orbites de  $X'$  sur celles de  $X$  en conservant le sens du temps. Un champ de vecteurs  $X$  est dit fortement structurellement stable (aussi appelé rough system dans la littérature Russe) si il est faiblement structurellement stable et si lorsque le diamètre de  $V$  tend vers zéro, les homéomorphismes tendent vers l'identité.

## Pourquoi la stabilité structurelle ?

L'idée est que dans la réalité il existe tout un tas de petites perturbations qui viennent changer un peu le champ de vecteurs. Par exemple des fluctuations thermiques (effet de portes) ou les paramètres de la dynamique ne sont pas connus avec très grande précision etc. Il est donc naturel de penser que les situations observées sont celles qui “résistent” à ces petites perturbations. Pour formuler les résultats nous aurons besoin d'une notion importante mais dont n'avons pas encore eu besoin.

Un point  $M$  est dit non-errant pour un flot  $(\varphi_t)$  si pour tout voisinage  $V$  de  $M$  il existe une suite  $t_1 < t_2 < \dots$  de temps, tendant vers l'infini, tels que  $\varphi_{t_j}(M) \in V$ . L'ensemble non errant est l'ensemble des points non errants.



# Théorème d'Andronov et Pontryagin.

## Théorème

*Un champ de vecteur du plan est fortement structurellement stable si et seulement si les trois conditions suivantes sont réalisées.*

- 1) Tous les points fixes sont hyperboliques.*
- 2) Toutes les orbites périodiques (cycles sans points fixes) sont hyperboliques.*
- 3) Il n'existe pas de trajectoire connectant deux points selles (no saddle connections).*

## Remarques :

Le système proie-prédateur n'est pas structurellement stable, mais la stabilité structurelle s'entend dans l'espace de **TOUS** les champs de vecteurs. Elle peut prendre des formes différentes si on impose des contraintes, par exemple si on change un peu les paramètres.

# Abondance de la stabilité structurelle.

## Théorème (Peixoto)

*Un champ de vecteurs sur une surface compacte est structurellement stable si et seulement si*

- 1) *Tous les points fixes sont hyperboliques et en nombre fini.*
- 2) *Il n'existe pas de trajectoire connectant deux points selles (no saddle connections).*
- 3) *L'ensemble non errant ne contient que des points fixes et des orbites périodiques.*

*Si la surface est orientable, l'ensemble des champs de vecteurs structurellement stables est un ouvert dense dans l'espace des champs de vecteurs (topologie  $C^k$ ).*

## Abondance II

### Théorème (Sotomayor)

*Considérons l'ensemble des champs de vecteurs polynomiaux de degré  $n$  du plan. Il existe un ensemble de mesure nulle  $A$  (dans  $\mathbb{R}^{(n+1)(n+2)/2}$ ) tel que si on prend un point  $c$  dans  $A^c$ , le polynôme construit avec pour coefficients les coordonnées de  $c$  est fortement structurellement stable (satisfait le critère d'Andronov Pontryagin).*

J.Sotomayor, Stable planar polynomial vector fields. Revista Matemática Iberoamericana **1** (1985) : 15-23.

En dimension plus grande la situation est plus compliquée (lemme de Smale 1966).

## Bibliographie supplémentaire.

F.Dumortier, J.Llibre, J.Artès. *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*. Springer 2006.

Zhang Zhi-fen, Ding Tong-Ren, Huang Wen-zao, Dong Zhen-xi. *Qualitative Theory of Differential Equations*. Am. Math. Soc. 1992.