

Bifurcations des attracteurs ponctuels.

Nous allons maintenant considérer un champ de vecteurs Y_μ qui dépend d'un paramètre μ (ou une transformation T_μ), et nous allons étudier les changements de la dynamique en fonction de μ .
Une remarque importante :

Nous allons maintenant considérer un champ de vecteurs Y_μ qui dépend d'un paramètre μ (ou une transformation T_μ), et nous allons étudier les changements de la dynamique en fonction de μ .

Une remarque importante :

C'est une très mauvaise idée de faire varier plusieurs paramètres à la fois.

Si le système dépend de plusieurs (n) paramètres, on en fixe $n - 1$ et on fait varier le même, quitte à refaire une autre étude avec un autre choix des $n - 1$ premiers paramètres.

Nous allons maintenant considérer un champ de vecteurs Y_μ qui dépend d'un paramètre μ (ou une transformation T_μ), et nous allons étudier les changements de la dynamique en fonction de μ . Une remarque importante :

C'est une très mauvaise idée de faire varier plusieurs paramètres à la fois.

Si le système dépend de plusieurs (n) paramètres, on en fixe $n - 1$ et on fait varier le même, quitte à refaire une autre étude avec un autre choix des $n - 1$ premiers paramètres.

Autre remarque importante :

Le paramètre ne dépend pas du temps. On le change et on attend que la nouvelle dynamique asymptotique se soit établie.

Quel paramètre faire varier ? utiliser les informations/intuition biologique, écologique, physique etc.

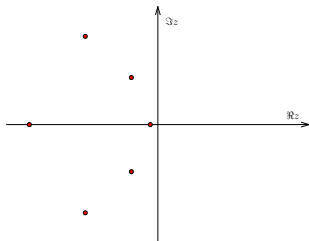
Le paramètre n'est pas forcément un paramètre particulier de la dynamique, il faut plutôt envisager une courbe dans l'espace des paramètres.

On part autant que possible d'une valeur du paramètre où la dynamique asymptotique est simple pour voir se développer petit à petit des dynamiques plus complexes (du simple au compliqué).

Les changements qualitatifs de dynamique se produisent en général pour des valeurs bien précises du paramètre : les points de bifurcation.

Dans la suite nous allons partir d'une valeur μ_0 du paramètre avec un point fixe stable x_0 ($X_{\mu_0}(x_0) = 0$) et nous allons étudier comment les choses peuvent évoluer.

Pour μ assez voisin de μ_0 il persiste un point fixe stable ($x(\mu)$) mais qui dépend en général de μ . On a $Y_\mu(x(\mu)) = 0$ et la différentielle $DY_\mu(x(\mu))$ dépend aussi en général de μ . Donc son spectre (ensemble des valeurs propres complexes) $\Sigma(\mu)$ change en général avec μ .



Tant que le spectre $\Sigma(\mu)$ reste dans le demi plan ouvert $\Re z < 0$ nous conservons un point fixe stable.

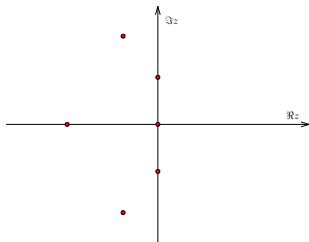
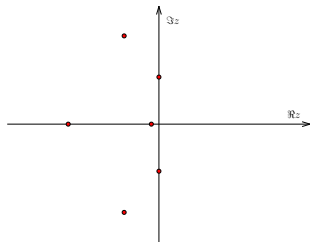
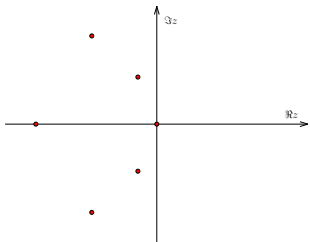
Mauvaise nouvelle.

La première valeur critique du paramètre (μ_c) est atteinte lorsque le spectre rencontre l'axe imaginaire $\Re z = 0$ pour la première fois. Ceci peut se produire de nombreuses façons (rappelons que le spectre est invariant par $z \mapsto \bar{z}$) :

- Une valeur propre simple 0 et le reste du spectre dans $\Re z < 0$.
- Une paire de valeurs propres simples $\pm i\omega_c$, avec $\omega_c \neq 0$ et le reste du spectre dans $\Re z < 0$.
- Une valeur propre simple 0 et une paire de valeurs propres simples $\pm i\omega_c$, $\omega_c \neq 0$ et le reste du spectre dans $\Re z < 0$.
- Une valeur propre double 0 et le reste du spectre dans $\Re z < 0$.
- etc.

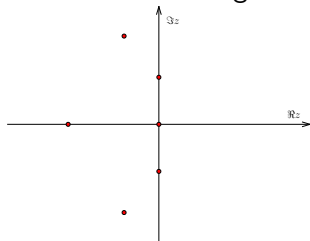
Bref une infinité de situations avec des comportements différents !

Quelques cas de spectres critiques



Intuition.

Intuitivement on sent bien que le troisième cas (et tous les autres) sont exceptionnels, il n'y a pas de raison pour que simultanément une valeur propre arrive à zéro en même temps qu'une paire complexe conjuguée arrive sur l'axe imaginaire pur.



Cette intuition peut être développée mathématiquement en utilisant la notion de généricité ou de prévalence (voir quelques notes à la fin de ce chapitre).

Bonne nouvelle.

Il suffit d'étudier les cas typiques (génériques, prévalents). Pour les champs de vecteurs une valeur propre simple zéro, ou une paire de valeurs propres simples imaginaires pures non nulles, complexes conjuguées.

Pour les transformations, c'est la même chose avec le cercle unité au lieu de l'axe imaginaire pur. Il y a trois cas génériques : une valeur propre simple 1, ou une paire de valeurs propres simples $e^{\pm i\theta}$, $\theta \neq 0, \pi$ (modulo 2π), une valeur propre simple -1 .

Les bifurcations génériques des points fixes stables sont aussi appelées bifurcations élémentaires ou de codimension 1.

Attention :

L'aspect générique peut changer en présence de contraintes, de symétries etc. Nous verrons des exemples. Si vous observez une bifurcation non générique demandez vous pourquoi, la réponse est en général intéressante.

Attention :

L'aspect générique peut changer en présence de contraintes, de symétries etc. Nous verrons des exemples. Si vous observez une bifurcation non générique demandez vous pourquoi, la réponse est en général intéressante.

Dans le cas du modèle de Lotka Volterra, les axes de coordonnées sont invariants ce qui brise la généricité. Les points fixes sur ces axes sont "inamovibles" et ont des bifurcations non génériques.

La situation critique.

On considère

$$\frac{dx}{dt} = Y(x, \mu)$$

tel que pour $\mu = \mu_c$, on a un point fixe x_c ($\vec{Y}(x_c, \mu_c) = \vec{0}$) tel que la matrice Jacobienne en ce point (DY_{x_c, μ_c}) a tout son spectre dans le demi plan gauche sauf soit une valeur propre simple à 0 soit une paire de valeurs propres simples $\pm i\omega_0$ ($\omega_0 \neq 0$).

On supposera aussi que pour $\mu < \mu_c$ proche, on a un point fixe stable $x(\mu)$ qui tend vers x_c quand $\mu \nearrow \mu_c$.

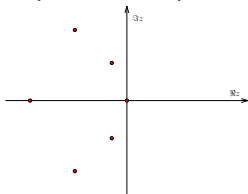
On peut bien sûr changer le sens d'évolution du paramètre.

On essayera de conserver l'organisation suivante dans les différents cas

- Nom de la bifurcation.
- Spectre critique.
- Description.
- Modèle simple (essentiellement forme normale tronquée).
- Diagramme de bifurcation (attracteur en fonction du paramètre).
- Théorème de bifurcation, ils sont valables même en dimension infinie, et sont constructifs (calculs explicites).
- Remarques et commentaires.

Bifurcation noeud-col des champs de vecteurs.

Saddle node en Anglais. Spectre critique : une valeur propre 0 simple



Un point fixe stable et un point fixe instable se rencontrent et disparaissent. Modèle, espace de phase \mathbb{R} , champ de vecteur :

$$\frac{dx}{dt} = \mu + x^2 .$$

Pour $\mu < 0$ on a deux points fixes $x_s = -\sqrt{-\mu}$ stable et $x_u = \sqrt{-\mu}$ instable. Ils coïncident en $\mu = 0$, pour $\mu > 0$ plus de point fixe.

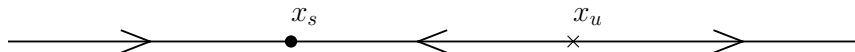
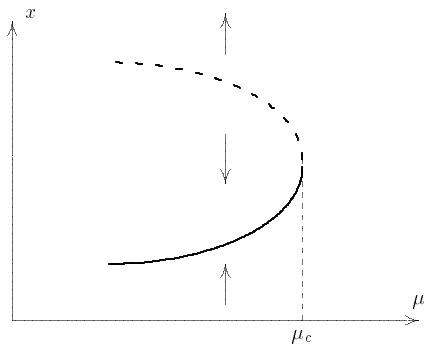


Diagramme de bifurcation de la bifurcation noeud-col.



Théorème de bifurcation de la bifurcation noeud-col.

Supposons que

- 1) *La matrice DY_{x_c, μ_c} a 0 comme valeur propre simple, vecteur propre (à droite) \vec{v} , vecteur propre à gauche α (et le reste du spectre dans le demi plan gauche ouvert)*
- 2) *$A = \alpha(\partial_\mu Y_{x_c, \mu_c}) \neq 0$,*
- 3) *$B = \alpha(D^2 Y_{x_c, \mu_c}(\vec{v}, \vec{v})) \neq 0$,*
- 4) *$AB > 0$.*

Alors il existe un voisinage U de x_c et un $\epsilon > 0$ tels que pour $\mu_c - \epsilon < \mu < \mu_c$ il y a dans U deux points fixes et deux seulement, l'un stable et l'autre hyperbolique avec une variété instable de dimension 1. Pour $\mu_c < \mu < \mu_c + \epsilon$ il n'y a pas de point fixe dans U .

Remarques sur la bifurcation noeud-col.

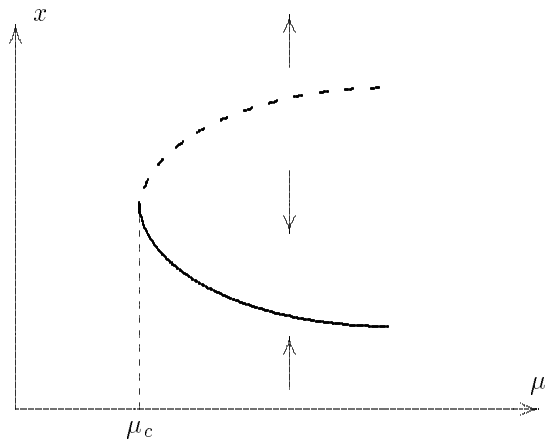
La seule façon de faire disparaître un point fixe d'un espace de phase est de faire passer une valeur propre par 0 (théorème des fonctions inverses).

Bifurcation noeud col inverse : un point fixe stable et un point fixe instable apparaissent simultanément, c'est le cas $AB < 0$ dans le théorème.

Le théorème de bifurcation assure la généralité, les conditions 2), 3) et 4) sont ouvertes.

Il existe un théorème analogue pour un spectre quelconque avec seulement une valeur propre simple 0 sur l'axe imaginaire pur.

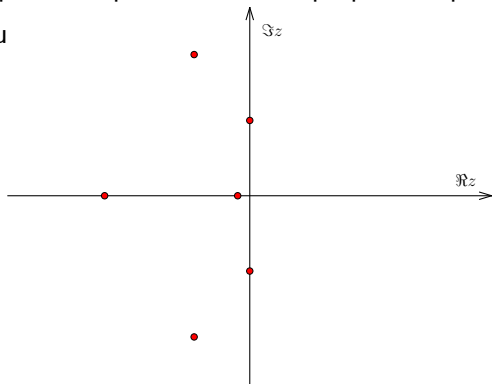
Diagramme de bifurcation de la bifurcation noeud-col inverse.



Bifurcation de Hopf des champs de vecteurs.

Aussi appelée Andronov-Hopf, Poincaré-Andronov-Hopf.

Spectre critique : une paire de valeurs propres simples imaginaires pures, non nu



Elle existe sous deux formes : sur-critique et sous-critique.

Bifurcation de Hopf des champs de vecteurs.

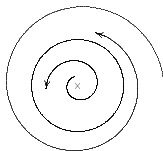
Espace de phase \mathbb{R}^2 . Modèle simple en coordonnées polaires
(bifurcation de Hopf surcritique)

$$\frac{d\rho}{dt} = \mu\rho - \rho^3$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

avec $\omega \neq 0$. Pour $\mu < 0$ l'origine est un point fixe stable. Pour $\mu > 0$ c'est un point fixe instable entouré d'un cycle limite stable $\rho = \sqrt{\mu}$ sur lequel la dynamique est une rotation à vitesse constante.



$\mu < \mu_c$

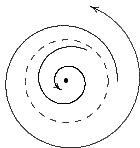


$\mu > \mu_c$

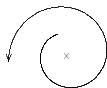
Modèle simple en coordonnées polaires (bifurcation de Hopf souscritique)

$$\frac{d\rho}{dt} = \mu\rho + \rho^3$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

avec $\omega \neq 0$. Pour $\mu < 0$ l'origine est un point fixe stable, il est entouré d'un cycle instable $\rho = \sqrt{-\mu}$ sur lequel la dynamique est une rotation. Pour $\mu > 0$ il ne reste que l'origine point fixe instable.



$\mu < \mu_c$

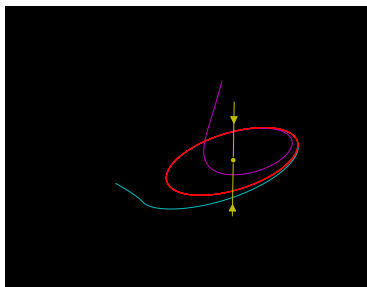


$\mu > \mu_c$

Diagramme de bifurcation de la bifurcation de Hopf.

On peut tracer un diagramme de bifurcation pour le cas sur-critique et pour le cas sous-critique, mais ces diagrammes sont en dimension trois puisque l'espace de phase des modèles simples est de dimension deux.

Bifurcation de Hopf sur-critique en dimension 3.



A gauche le point fixe jaune est stable, on a représenté deux trajectoires qui convergent en spiralant vers ce point.

A droite, après la bifurcation, le point fixe jaune est instable, il lui reste une variété stable (en jaune) de dimension un. Toute condition initiale qui n'est pas sur cette variété stable donne une trajectoire qui converge en spiralant vers le cycle limite (attracteur).

Théorème de bifurcation de la bifurcation de Hopf.

Supposons que

1) La matrice DY_{x_c, μ_c} a $\pm i\omega_0$ comme valeurs propres simples.

Notons $\lambda(\mu)$ et $\overline{\lambda(\mu)}$ les valeurs propres

2) Il suit de 1) que dans un voisinage de μ_c il existe un unique

point fixe $x(\mu)$ ($\vec{Y}(\mu, x(\mu)) = \vec{0}$) et que $x(\mu_c) = x_c$. Soient

$\lambda(\mu)$ et $\overline{\lambda(\mu)}$ les valeurs propres de $D\vec{Y}_{x(\mu)} \mu$ qui convergent

vers $\pm i\omega_0$ pour $\mu = \mu_c$. Supposons que

$$\frac{d \Re \lambda(\mu)}{d\mu}(\mu_c) = d \neq 0$$

3) Supposons aussi que en (x_c, μ_c) , $a \neq 0$ avec en dimension 2

$$a = \omega_0 (\partial_x^3 X_1 + \partial_x \partial_y^2 X_1 + \partial_y \partial_x^2 X_2 + \partial_y^2 X_2) +$$

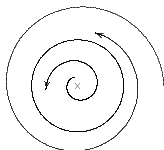
$$\partial_{xy} X_1 (\partial_x^2 X_1 + \partial_y^2 X_1) - \partial_{xy} X_2 (\partial_x^2 X_2 + \partial_y^2 X_2) - \partial_x^2 X_1 \partial_x^2 X_2 + \partial_y^2 X_1 \partial_y^2 X_2 .$$

Théorème de la bifurcation de Hopf surcritique.

Supposons $a < 0$, $d > 0$. Alors il existe $\epsilon > 0$ et un voisinage U de x_c tels que Si $a < 0$, $d > 0$, et $\mu_c - \epsilon < \mu < \mu_c$, le point fixe $x(\mu)$ est stable et attire tout U . Pour $\mu_c < \mu < \mu_c + \epsilon$, le point fixe $x(\mu)$ est instable (variété instable de dimension 2), et $U \setminus x(\mu)$ est attiré par un cycle limite stable, de rayon $4 \sqrt{-d(\mu - \mu_c)} \omega_0 / a + o.s.$ sur lequel la dynamique est modulo conjugaison une rotation à vitesse $\omega_0 + \mathcal{O}(\mu - \mu_c)$.



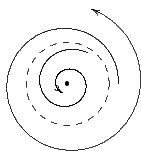
$\mu < \mu_c$



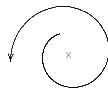
$\mu > \mu_c$

Théorème de la bifurcation de Hopf souscritique.

Si $a > 0$, $d > 0$, et $\mu_c - \epsilon < \mu < \mu_c$, le point fixe $x(\mu)$ est stable, et il existe un cycle instable, de rayon $4 \sqrt{d(\mu_c - \mu)} \omega_0 / a + o.s.$ sur lequel la dynamique est modulo conjugaison une rotation à vitesse $\omega_0 + \mathcal{O}(\mu)$. Pour $\mu_c < \mu < \mu_c + \epsilon$, le point fixe $x(\mu)$ est instable de (variété instable de dimension 2). Les seuls points dont la trajectoire reste dans U sont ceux de sa variété stable.



$\mu < \mu_c$



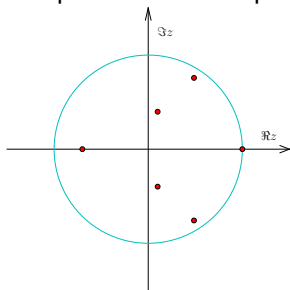
$\mu > \mu_c$

Bifurcations élémentaires des transformations.

On considère une famille à un paramètre de transformations T_μ de $\Omega = \mathbb{R}^n$ telle que pour $\mu = \mu_c$, on a un point fixe x_c ($T_{\mu_c}(x_c) = x_c$) la matrice Jacobienne en ce point (DT_{x_c, μ_c}) a tout son spectre dans l'intérieur du disque unité sauf soit une valeur propre simple égale à 1, soit une paire de valeurs propres simples $\exp(i\theta)$ ($\theta \neq 0, \pi$), soit une valeur propre simple égale à -1 (nouveau!).

Bifurcation noeud-col des transformations.

Saddle node, spectre critique : une valeur propre de module 1



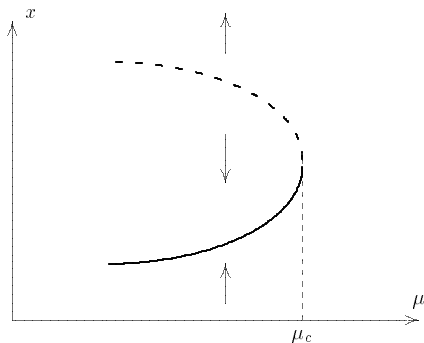
Espace de phase \mathbb{R} , transformation

$$f_{\mu}(x) = x - \mu - x^2 .$$

Pour $\mu < 0$ on a deux points fixes $x = \pm\sqrt{-\mu}$, ces deux points coïncident pour $\mu = 0$ et disparaissent pour $\mu > 0$.

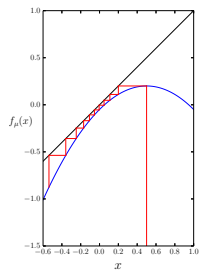
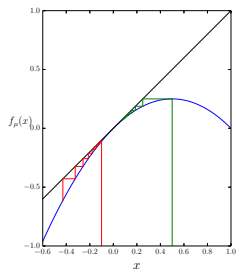
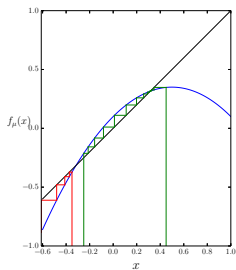
Diagramme de bifurcation de la bifurcation noeud col.

Même diagramme que pour les champs de vecteurs.



Bifurcation noeud-col d'une transformation en dimension

1.



Théorème de bifurcation de la bifurcation noeud col des transformations.

Voir par exemple

M.Crandal, P.Rabinowitz. Bifurcation from simple eigenvalues. J. Functional Anal., **8**, 321-340 (1971),

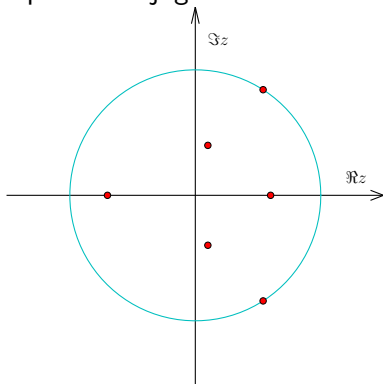
M.Crandal, P.Rabinowitz. Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues, and linearized stability. Arch. Rational Mech. Analysis, **52**, 161-180 (1973).

Remarques sur la bifurcation noeud-col.

Mêmes remarques que pour les champs de vecteurs.

Bifurcation de Hopf des transformations.

Aussi appelée de Sacker-Naimark. Il en existe deux versions : sous-critique et sur-critique. Spectre critique : deux valeurs propres complexes conjuguées de module 1 différentes de 1 et de -1 .



Cas sur-critique, modèle simple en coordonnées polaires espace de phase \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned}\rho' &= \mu\rho - \rho^3 \\ \theta' &= \theta + \omega \pmod{2\pi}\end{aligned}$$

avec $\omega/(2\pi)$ irrationnel. Pour $\mu < 0$ l'origine est un point fixe stable. Pour $\mu > 0$ c'est un point fixe instable entouré d'un cycle limite stable $\rho = \sqrt{\mu}$.

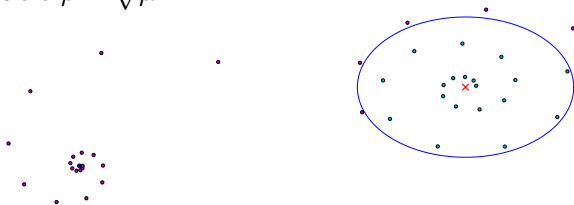


FIGURE: $\mu < 0$ à gauche, $\mu > 0$ à droite.

Cas sous critique, modèle simple en coordonnées polaires

$$\begin{aligned}\rho' &= \mu\rho + \rho^3 \\ \theta' &= \theta + \omega \pmod{2\pi}\end{aligned}$$

avec $\omega \neq 0$. Pour $\mu < 0$ l'origine est un point fixe stable, il est entouré d'un cycle instable $\rho = \sqrt{-\mu}$. Pour $\mu > 0$ il ne reste que l'origine point fixe instable.

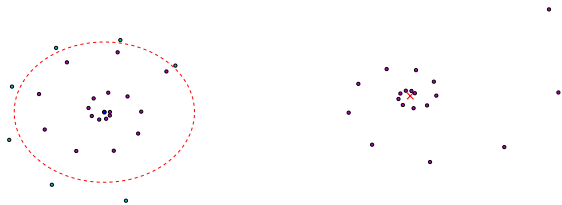


FIGURE: $\mu < 0$ à gauche, $\mu > 0$ à droite.

Théorème de bifurcation de la bifurcation de Hopf des transformations.

Voir par exemple

D.Ruelle. *Elements of Differentiable Dynamics and Bifurcation Theory*. Academic Press,1989.

Remarques sur la bifurcation de Hopf des transformations.

Il faut aussi supposer que la valeur propre λ de module 1 (et sa complexe conjuguée) satisfait $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq -1$, $\lambda^3 \neq 1$, $\lambda^4 \neq 1$.

Le diagramme de bifurcation est le même que pour les flots.

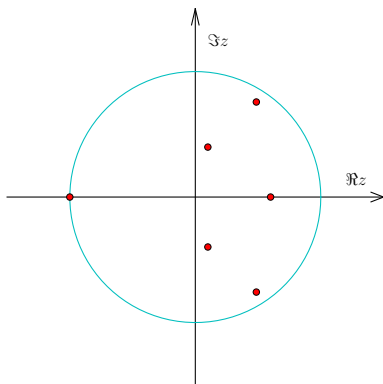
Sur les cycles, dans le cas générique, pour des valeurs du paramètre proches du point de bifurcation, la dynamique est donnée par un difféomorphisme du cercle.

Comme nous l'avons déjà mentionné, ce difféomorphisme n'est pas nécessairement conjugué à une rotation.

C'est la grande différence avec les flots.

Bifurcation de doublage de période transformations.

Period doubling. Spectre critique : une valeur propre égale à -1 .

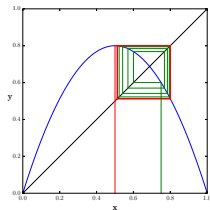
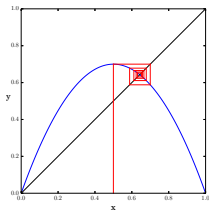


Bifurcation de doublage de période transformations.

Elle peut exister sous deux formes :

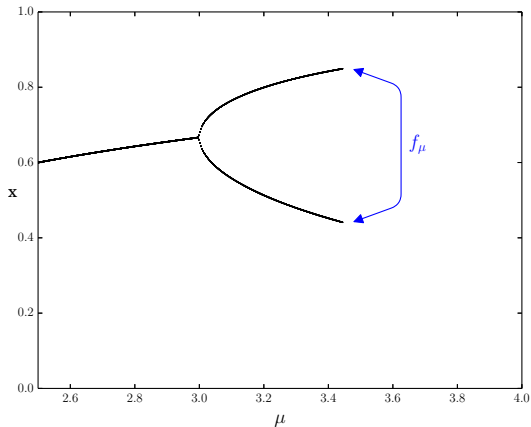
- Sur critique : pour $\mu < \mu_c$ on a un point fixe stable et pour $\mu > \mu_c$ le point fixe est devenu instable et il est né une orbite périodique stable de période 2.
- Sous critique : pour $\mu < \mu_c$ on a un point fixe stable et une orbite périodique instable de période 2. Elle se réduit au point fixe à $\mu = \mu_c$ et pour $\mu > \mu_c$ il ne reste (localement) qu'un point fixe instable.

Bifurcation de doublage sur-critique.

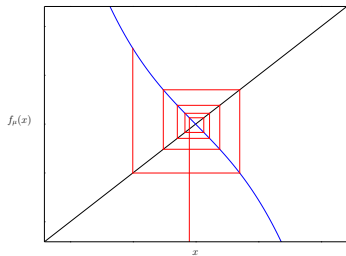
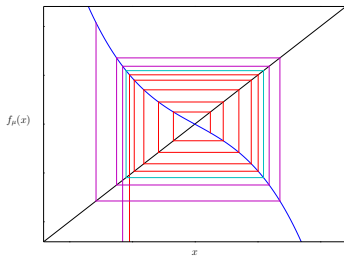


Bifurcation de doublage sur-critique dans la famille quadratique de Ulam et Von-Neuman $f_{\mu}(x) = \mu x(1-x)$.

Diagramme de bifurcation de la bifurcation de doublage surcritique.



Bifurcation de doublage sous-critique.



Théorème de bifurcation de la bifurcation de doublage.

Il suit du fait que $T_\mu \circ T_\mu$ a une bifurcation fourche (voir plus loin).

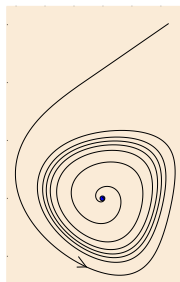
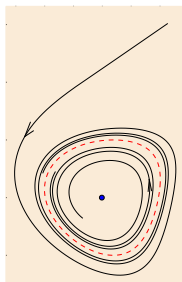
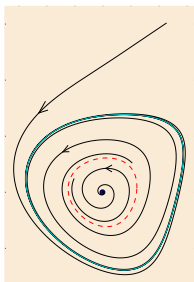
La bifurcation de doublage de période a été observée expérimentalement dans un certain nombre de systèmes physiques, biologiques, écologiques (vers de farine).

Bifurcations de cycles.

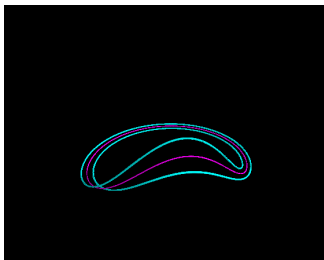
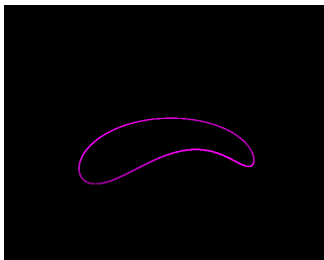
En utilisant la méthode de la section de Poincaré, on peut analyser les bifurcations des cycles stables des champs de vecteurs. Voici les situations génériques.

- La section de Poincaré a une bifurcation noeud col. Le cycle stable rencontre un cycle instable et ils disparaissent.
- La section de Poincaré a une bifurcation de Hopf (disons sur critique). Il reste un cycle instable et un tore invariant.
- La section de Poincaré a une bifurcation de doublage. Il reste un cycle instable et un autre cycle stable mais qui “se ferme au bout de deux tours” (d'où le nom de bifurcation de doublage de période).

Bifurcation noeud col de cycles.



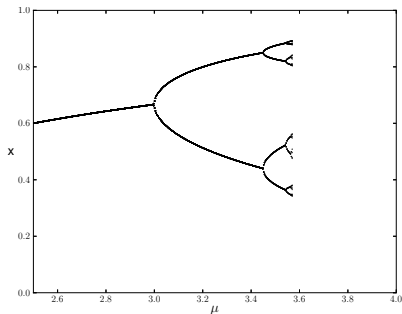
Bifurcation de doublage de cycle.



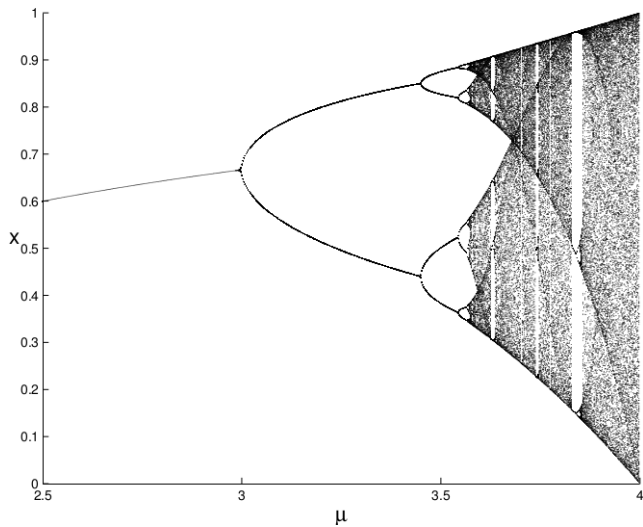
Successions de bifurcations, “Routes vers le chaos”.

En continuant à changer le paramètre on peut observer des suites de bifurcations de plus en plus complexes. J’en donnerais seulement deux exemples.

Pour la famille à un paramètre de transformations de $[0, 1]$ (dite logistique) $f_{\mu}(x) = \mu x(1 - x)$ avec $0 \leq \mu \leq 4$, on a le diagramme de bifurcations suivant



La famille quadratique complète.



Le théorème de Ruelle et Takens.

On peut aussi imaginer une suite de “bifurcations de Hopf” d’un champ de vecteurs :

points fixe \rightarrow cycle \rightarrow 2-tore \rightarrow 3-tore \rightarrow 4-tore etc

autrement dit un système avec de plus en plus de fréquences.

C’était le scénario dit de Landau et Hopf de la turbulence.

En 1971 Ruelle et Takens on montré que ce scénario n’était pas stable :

Soit X un champ de vecteurs constant sur un k -tore avec $k \geq 4$.

Alors dans tout voisinage de X il existe un ouvert de champs de vecteurs avec un attracteur étrange.

Bifurcations non génériques.

Comme nous l'avons mentionné, des bifurcations non génériques peuvent apparaître sous des conditions de contraintes ou de symétrie.

Par exemple le système de Lotka Volterra

$$\frac{d x_1}{d t} = x_1 (a_1 - c_{1,1} x_1 - c_{1,2} x_2) , \quad \frac{d x_2}{d t} = x_2 (a_2 - c_{2,1} x_1 - c_{2,2} x_2)$$

avec tous les paramètres positifs impose la contrainte qu'il y a toujours un point fixe sur chaque axe. Si on prend une famille à un paramètre qui reste dans ce domaine ces points ne peuvent faire ni bifurcation noeud col ni bifurcation de Hopf.

Nous allons donner deux exemples des bifurcations non génériques les plus simples (et les plus fréquentes).

Bifurcation de croisement.

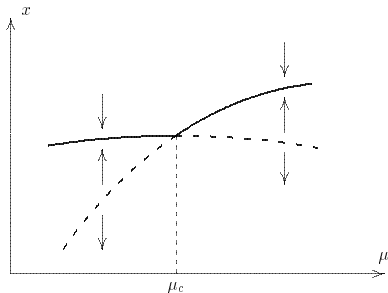
Crossing bifurcation, transcritical bifurcation. Modèle, pour les

flots, $\Omega = \mathbb{R}$

$$\frac{dx}{dt} = \mu x + x^2,$$

modèle pour les transformations

$$f_{\mu}(x) = (1 + \mu)x + x^2.$$



Elle peut se produire dans le système de Lotka Volterra pour les points fixes qui sont sur les axes.

Théorème de bifurcation de croisement.

Voir par exemple

M.Crandal, P.Rabinowitz. Bifurcation from simple eigenvalues. J. Functional Anal., **8**, 321-340 (1971),

M.Crandal, P.Rabinowitz. Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues, and linearized stability. Arch. Rational Mech. Analysis, **52**, 161-180 (1973).

Bifurcation de croisement dans le modèle de Lotka Volterra.

Reprenons le système de Lotka Volterra ($\Omega = \mathbb{R}_+^2$)

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 (a_1 - c_{1,1} x_1 - c_{1,2} x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = x_2 (a_2 - c_{2,1} x_1 - c_{2,2} x_2)$$

avec $a_1 = 1.0$, $a_2 = 2.0$, $c_{1,1} = 1.0$, $c_{2,2} = 1.5$, $c_{2,1} = .7$.

En faisant varier le paramètre $c_{1,2}$ on peut changer la stabilité du point fixe M_2 sur l'axe des y . Pour $c_{1,2} = .75$, ce point fixe fait une bifurcation de croisement. Pour $c_{1,2} \searrow .75$ un point fixe instable M_3 qui se trouve dans le quadrant $x < 0$, $y > 0$ vient le rencontrer et passe dans le quadrant positif en devenant stable. Le point M_2 devient instable.

On peut aussi avoir des bifurcations de croisement à l'origine.

Bifurcation de croisement dans le modèle de Lotka Volterra.

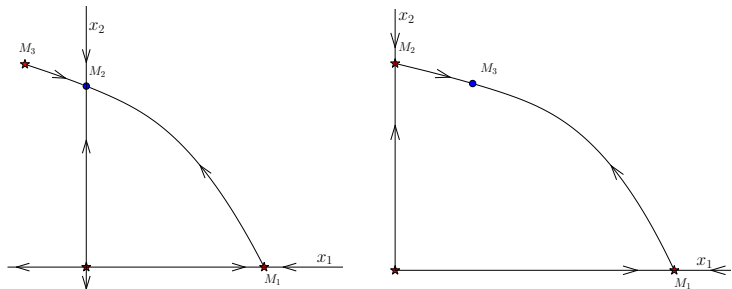


FIGURE: A gauche $c_{1,2} > .75$, à droite $c_{1,2} < .75$.

Instabilité de la bifurcation de croisement.

Les bifurcations noeud-col et Hopf des champs de vecteurs et les bifurcations noeud-col, Hopf et de doublage des transformations sont stables par perturbations suffisamment petites de la famille à un paramètre. La valeur critique du paramètre peut changer un peu ainsi que le point critique mais qualitativement la bifurcation est toujours là.

Il n'en est pas de même pour la bifurcation de croisement. On peut trouver une perturbation aussi petite que l'on veut qui la détruit. Noter que dans le cas du système de Lotka Volterra les contraintes d'invariance des axes ne permettent pas de construire de telles perturbations.

Instabilité de la bifurcation de croisement.

Par exemple pour la famille de transformations sur $\Omega = \mathbb{R}$

$$f_{\mu}(x) = (1 + \mu)x - x^2 ,$$

on peut considérer les familles

$$f_{\mu}(x) = (1 + \mu)x - x^2 + \epsilon ,$$

avec $\epsilon \neq 0$ fixé aussi petit que l'on veut. Le diagramme de bifurcation fait apparaître des bifurcations noeud col ou des branches sans bifurcation selon le signe de ϵ .

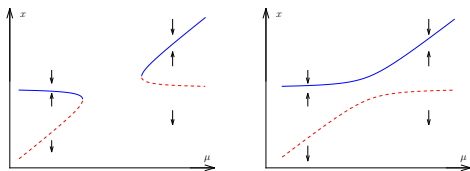


FIGURE: A gauche $\epsilon < 0$, à droite $\epsilon > 0$.

Bifurcation fourche.

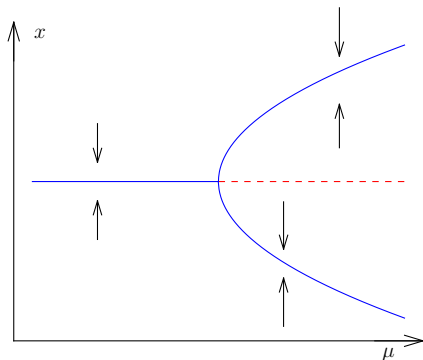
Pitchfork bifurcation. Sous critique ou sur critique.

Modèle, pour les flots (sur-critique), $\Omega = \mathbb{R}$

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3 ,$$

modèle pour les transformations (sur critique)

$$f_{\mu}(x) = (1 + \mu)x - x^3 .$$



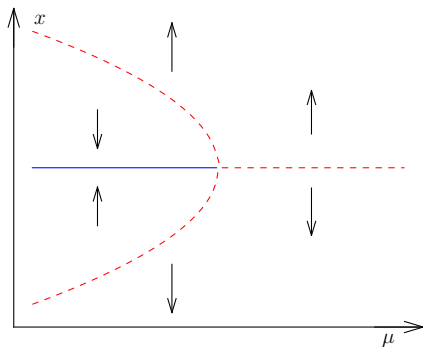
Bifurcation fourche.

Modèle, pour les flots (sous-critique), $\Omega = \mathbb{R}$

$$\frac{dx}{dt} = \mu x + x^3 ,$$

modèle pour les transformations (sous-critique)

$$f_{\mu}(x) = (1 + \mu)x + x^3 .$$



Théorème de bifurcation fourche.

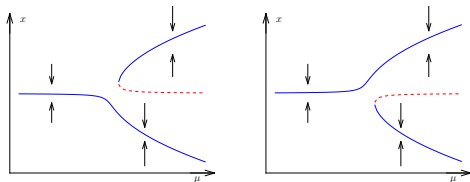
Voir par exemple

M.Crandal, P.Rabinowitz. Bifurcation from simple eigenvalues. J. Functional Anal., **8**, 321-340 (1971),

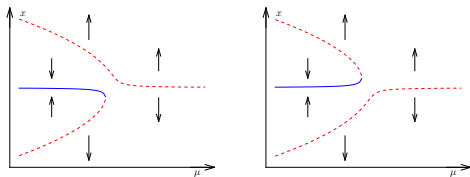
M.Crandal, P.Rabinowitz. Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues, and linearized stability. Arch. Rational Mech. Analysis, **52**, 161-180 (1973).

Instabilités des bifurcations fourches.

Cas sur-critique



Cas sous-critique



Méthodes de réduction :

Pour étudier une bifurcation non générique on fait d'abord une réduction sur la variété centrale.

Ensuite on essaye de simplifier au maximum le problème par des conjugaisons. Les “modèles” simples s'appellent des formes normales.

On est ici dans le domaine de la théorie des catastrophes, voir par exemple V. I. Arnold. S. M. Gusein-Zade. A. N. Varchenko.

Singularités des applications différentiables vol I. Moscou, Editions Mir, 1986.

Quelques idées sur la généricité.

On doit en particulier comprendre les familles à un paramètre de matrices et donc les familles à un paramètre de polynômes caractéristiques. Prenons le cas $d = 3$. Un polynôme monique de degré trois à coefficients réels s'écrit

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c .$$

Condition racine nulle $c = 0$.

Condition racine $\pm i\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= (x - \alpha) (x^2 + \lambda^2) \\ a = -\alpha, \quad b = \lambda^2 \geq 0, \quad c &= -\alpha \lambda^2 \end{aligned}$$

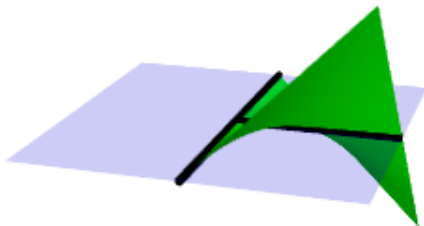
soit

$$b \geq 0, \quad c = ab .$$

Et réciproquement (si $b \neq 0$)

$$\lambda = \pm i \sqrt{b}, \quad \alpha = -\frac{c}{b}$$

Dans l'espace \mathbb{R}^3 des trois paramètres (a, b, c) on a la figure suivante avec en bleu la surface des polynômes ayant une racine nulle et en vert la surface des polynômes ayant une racine imaginaire pure :



Les lignes d'intersection des deux surfaces ont été tracées en noir et grossies pour être plus visibles.

Nous allons maintenant déterminer le domaine de \mathbb{R}^3 où toutes les racines sont dans $\Re z < 0$.

Si les trois racines sont dans $\Re z < 0$, il est facile de voir que $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$ (il y a toujours au moins une racine réelle).

Si les trois racines sont réelles cette condition est aussi suffisante.

En effet dans ce cas, puisque $c > 0$, il y a une ou trois racines négative(s) ($c = -x_1 x_2 x_3$). Si il y a deux racines positives, notons les racines $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 < 0$. Puisque $a > 0$ on a ($a = -x_1 - x_2 - x_3$)

$$x_3 < -(x_1 + x_2) .$$

Donc puisque $(x_1 + x_2) > 0$

$$b = x_3 (x_1 + x_2) + x_1 x_2 \leq x_1 x_2 - (x_1 + x_2)^2 < 0$$

contradiction.

Il reste donc le cas $x_1 = \alpha + i\beta$, $x_2 = \alpha - i\beta$, $x_3 < 0$, $\alpha > 0$, β réel. On a

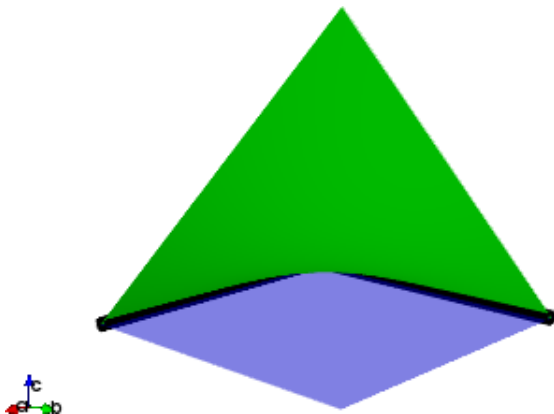
$$\begin{aligned}c - ab &= -x_3(\alpha^2 + \beta^2) + (x_3 + 2\alpha)(2\alpha x_3 + \alpha^2 + \beta^2) \\ &= 2\alpha(2\alpha x_3 + \alpha^2 + \beta^2) + 2\alpha x_3^2 \\ &= \alpha(2x_3^2 + 4\alpha x_3 + 2\alpha^2 + 2\beta^2) = 2\alpha((x_3 + \alpha)^2 + \beta^2).\end{aligned}$$

Nous concluons que $\alpha < 0$ si et seulement si $c - ab < 0$ soit $c < ab$.

En résumé, toutes les racines de $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c réels) sont dans $\Re z < 0$ si et seulement si (a, b, c) appartient au domaine

$$a > 0, \quad b > 0, \quad ab > c > 0,$$

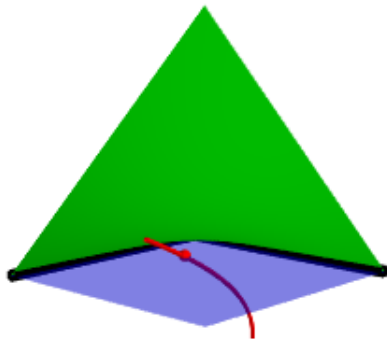
tracé avec le même code de couleurs



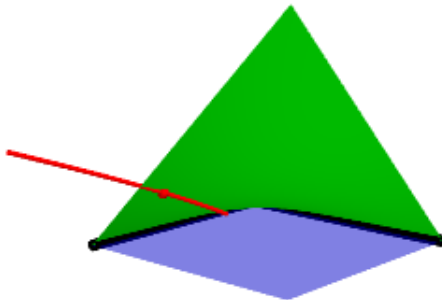
Une famille à un paramètre de champs de vecteur de \mathbb{R}^3 donne une famille à un paramètre de points fixes, donc une famille à un paramètre de matrices Jacobiennes donc une famille à un paramètre de polynômes caractéristiques.

Cette famille à un paramètre se représente donc comme une courbe dans notre espace $(a(\mu), b(\mu), c(\mu))$. Cette courbe part dans le domaine de la figure précédente car au départ nous supposons que le point fixe est stable, et nous sommes intéressés à comprendre comment cette courbe sort du domaine de stabilité précédent.

Elle peut sortir par le “plancher” bleu, ce qui correspond au passage par une racine zéro



Elle peut aussi sortir par le “plafond” vert, ce qui correspond au passage par une paire de racines imaginaires pures non nulles :



Il est aussi possible de sortir en croisant les lignes noires, ce qui correspond à une valeur propre zéro double (ou triple à l'origine). Mais nous voyons que cette situation n'est pas typique et de plus instable : il existe des perturbations aussi petites que l'on veut qui donnent des courbes sortant par le plancher ou le plafond.

Par contre si nous avons une courbe qui sort transversalement par le plafond toute perturbation suffisamment petite fera de même.

Même chose pour une courbe qui sort transversalement par le plancher.

Nous venons de voir sur un exemple le théorème de transversalité de Thom des variétés stratifiées.

Il existe aussi une notion plus probabiliste de la généricité : la prévalence.

En dimension infinie il n'y a pas de bonne notion de mesure de Lebesgue, mais il existe des bonnes notions d'ensemble de mesure de "Lebesgue" nulle.

L'une d'elle est la notion d'ensemble timide aussi appelé Haar-nuls. Pour plus de détails on consulter par exemple W.Ott and J.Yorke. Prevalence. Bull. Amer. Math. Soc. **42** (2005), 263-290 et les références de cet article.

Bibliographie supplémentaire.

Y.Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer 2004.

M.Crandal, P.Rabinowitz. Bifurcation from simple eigenvalues. *J. Functional Anal.*, **8**, 321-340 (1971).

M.Crandal, P.Rabinowitz. Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues, and linearized stability. *Arch. Rational Mech. Analysis*, **52**, 161-180 (1973).

M.Crandal, P.Rabinowitz. The Hopf Bifurcation Theorem in Infinite Dimensions. *Arch. Rational Mech. Analysis*, **67**, 53-72 (1980).

G.looss, D.Joseph. *Elementary Stability and Bifurcation Theory*. Springer 1997.

G.looss, M.Adelmeyer. *Topics in Bifurcation theory and Applications*. World Sci. 1999.

M.Haragus, G.looss. *Local bifurcations, center manifolds, and normal forms in infinite dimensional dynamical systems*. EDP Sciences - Springer 2011.

Bibliographie supplémentaire II.

V.Arnold. *Equations différentielles ordinaires*. Ellipse, 2012.

V.Arnold. *Chapitres Supplémentaires De La Théorie Des Équations Différentielles Ordinaires*. Mir 1996.

S.Smale. Differentiable dynamical systems. Bull. Amer. Math. Soc. **73**, 747-817 (1967).

A.Lichtenberg, M.Lieberman. *Regular and Chaotic Dynamics*. Springer 1992.

S.Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer 2003.

J.Marsden. *The Hopf Bifurcation and Its Applications* Springer 2013.

Quelques vieux grimoires.

H.Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, 3 volumes.

Albert Blanchard 1987.

A.Andronov, E.Leontovich, I.Gordon and A.Maier. *Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems*. Halsted Press 1973.

A.Andronov, E.Leontovich, I.Gordon and A.Maier. *Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane*. Halsted Press 1973.

P.Collet, J.-P.Eckmann. *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*. Birkhauser 1980.

V.Nemytskii, V.Stepanov. *Qualitative Theory of Differential Equations*. Dover 1989.

V.Arnold, A.Avez. *Problèmes Ergodiques de la Mécanique Classique* ; Gauthier-Villars 1967.

J.LaSalle, S.Lefschetz. *Stability by Liapunov's direct method : with applications*. Academic Press, 1961.

S.Lefschetz. *Differential equations : Geometric theory*. Interscience 1957.

Quelques logiciels de calcul.

Logiciels dédiés aux systèmes dynamiques :

auto, dstool, pydstool (python), tisean , scicos (scilab), simulink (matlab),
matcont (matlab), ...

et plus dans <http://www.dynamicalsystems.org/sw/sw/>

Logiciels de calcul symbolique (cas, computer algebra systems) :

payants : mathematica, maple, macsyma, magma,

domaine public : maxima (xmaxima, euler), axiom (fricas, openaxiom), reduce,
yacas, macaulay, singular, CoCoA, sage, sympy,

et plus dans http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_computer_algebra_systems

Logiciels de calcul numérique (numerical analysis software) :

payants : mathematica, matlab, ...

domaine public : scilab, octave, freemat, rlab, ...

Langages de programmation :

compilés : fortran, C, C++, ...

interprétés : perl, python, java, javascript, julia, yorick,

et plus dans http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_numerical_analysis_software