Quelques résultats de Jason Schweinsberg sur un modèle de Moran avec sélection

François Ged

Le modèle

Modèle de Moran avec sélection. Les paramètres :

N = taille de la population ;

1 = taux de mort ;

μ_N = taux de mutation ;

s_N = coefficent de sélection ; fitness $= 1 + s_N(j - M(t))$.

On suppose que $\mu_N, s_N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ tels que $\frac{1}{N^a} \ll \mu_N \ll s_N^b$, pour tout $a, b > 0$.

Le modèle

Modèle de Moran avec sélection. Les paramètres :

N = taille de la population ;

1 = taux de mort ;

μ_N = taux de mutation ;

s_N = coefficent de sélection ; fitness $= 1 + s_N(j - M(t))$.

On suppose que $\mu_N, s_N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ tels que $\frac{1}{N^a} \ll \mu_N \ll s_N^b$, pour tout $a, b > 0$.

$X_j(t) :=$ nombre d'individus porteurs de j mutations à l'instant t;

$M(t) := \dfrac{1}{N} \sum_{j\geq 0} j X_j(t)$, le nombre moyen de mutations à l'instant t;

$Q(t) := \max\{j \geq 0 : X_j(t) > 0\} - M(t)$, l'avantage le plus élevé dans la population à l'instant t;

Les questions

Schweinsberg répond à quatre questions quand $N \sim \infty$:

1) Quelle est l'évolution de M ?

2) Quelle est l'évolution de Q ?

3) Quelle est la distribution de $(X_0(t), X_1(t), \cdots, X_j(t), \cdots)$

4) A quoi ressemble la généalogie d'un n-échantillon de la population à un certain instant ?

Les résultats

On définit

$$a_N := \frac{log\,(s_N/\mu_N)}{s_N}, \qquad k_N := \frac{log(N)}{log\,(s_N/\mu_N)}$$

où a_N est approximativement la durée entre l'apparition d'un type et l'instant où il est dominant, et k_N approximativement le nombre de nouveaux types qui apparaissent en a_N unités de temps.

Les résultats

On définit

$$a_N := \frac{log\left(s_N/\mu_N\right)}{s_N}, \qquad k_N := \frac{log(N)}{log\left(s_N/\mu_N\right)}$$

où a_N est approximativement la durée entre l'apparition d'un type et l'instant où il est dominant, et k_N approximativement le nombre de nouveaux types qui apparaissent en a_N unités de temps.

1) pour t grand : $\frac{M(a_N t)}{a_N t} \simeq \frac{2k_N}{a_N}$;
2) pour t grand : $Q(a_N t) \simeq 2k_N$;
3) $(X_0(a_N t), X_1(a_N t), \cdots, X_j(a_N t), \cdots)$ se comporte comme une onde Gaussienne progressive
4) la généalogie d'un n-échantillon de la population converge en probabilité vers le coalescent de Bolthausen-Sznitman quand $N \to \infty$ (n est fixé).

Pourquoi le coalescent de Bolthausen-Sznitman ?

En remontant le temps, plusieurs lignées coalescent <=> en avançant dans le temps, un individu donne naissance a une grande famille.

Pourquoi le coalescent de Bolthausen-Sznitman ?

En remontant le temps, plusieurs lignées coalescent <=> en avançant dans le temps, un individu donne naissance a une grande famille.

On rappelle que $\mu_N \ll s_N^a$, pour tout $a > 0$. Plus on augmente la sélection par rapport au taux de mutation, plus on réduit les variations du nombre de niveaux différents de mutations (comportement gaussien de la distribution de $(X_0, X_1, X_2, \cdots)$.

Pourquoi le coalescent de Bolthausen-Sznitman ?

En remontant le temps, plusieurs lignées coalescent <=> en avançant dans le temps, un individu donne naissance a une grande famille.

On rappelle que $\mu_N \ll s_N^a$, pour tout $a > 0$. Plus on augmente la sélection par rapport au taux de mutation, plus on réduit les variations du nombre de niveaux différents de mutations (comportement gaussien de la distribution de $(X_0, X_1, X_2, \cdots)$.

Avec une petite probabilité à chaque apparition d'un nouveau type, l'individu peut avoir accumulé très rapidement un nombre important de mutations => son avantage est très élevé => il participe à un grand nombre de naissances.

D'autres questions

On peut étudier des variantes du modèles :

- Que se passe t-il si s_N et μ_N ne tendent plus vers zéro (ou plus de la même manière) ?

D'autres questions

On peut étudier des variantes du modèles :

- Que se passe t-il si s_N et μ_N ne tendent plus vers zéro (ou plus de la même manière) ?
- Comment se comporte le modèle lorsque s_N n'est plus déterministe ?

D'autres questions

On peut étudier des variantes du modèles :

- Que se passe t-il si s_N et μ_N ne tendent plus vers zéro (ou plus de la même manière) ?
- Comment se comporte le modèle lorsque s_N n'est plus déterministe ?
- Peut on mettre deux allèles en compétition dans le modèle sans que l'un n'écrase l'autre instantanément quand $N \to \infty$?

D'autres questions

On peut étudier des variantes du modèles :

- Que se passe t-il si s_N et μ_N ne tendent plus vers zéro (ou plus de la même manière) ?
- Comment se comporte le modèle lorsque s_N n'est plus déterministe ?
- Peut on mettre deux allèles en compétition dans le modèle sans que l'un n'écrase l'autre instantanément quand $N \to \infty$?
- A vous d'imaginer...

Merci de votre attention.