

Sur la sélection d'une forme d'histoire de vie observée chez la drosophile

Tristan Roget (CMAP)

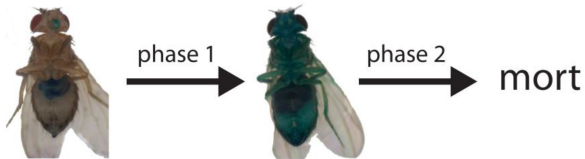
avec Sylvie Méléard et Michael Rera

Aussois, le 7 juin 2016



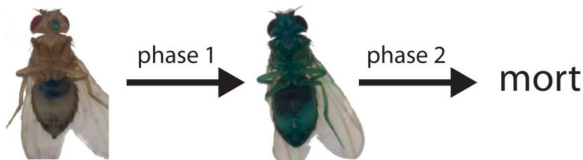
La drosophile Smurf

- Identifié dans Michael Rera et al. [RCW12] chez l'espèce mélanogaster.



La drosophile Smurf

- Identifié dans Michael Rera et al. [RCW12] chez l'espèce mélanogaster.



Phase 1

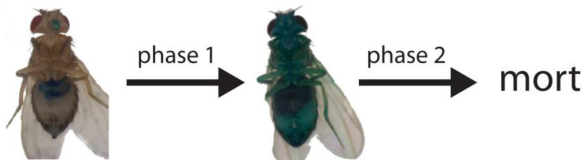
- Reproduction normale
- Mortalité nulle

Phase 2

- Reproduction faible
- Mortalité élevée
- Espérance de vie réduite chez les descendants

La drosophile Smurf

- Identifié dans Michael Rera et al. [RCW12] chez l'espèce mélanogaster.



Phase 1

- Reproduction normale
- Mortalité nulle

Phase 2

- Reproduction faible
- Mortalité élevée
- Espérance de vie réduite chez les descendants

Question :

Apparition et maintien d'une telle forme d'histoire de vie.

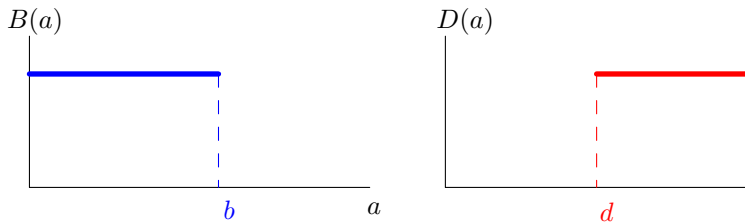
Histoire de vie

On appelle **histoire de vie** d'un individu un couple de fonctions $(B(a), D(a))_{a \in \mathbb{R}_+}$ où a désigne l'âge de l'individu, $B(a)$ le taux de reproduction de l'individu à l'âge a et $D(a)$ le taux de mortalité intrinsèque de l'individu à l'âge a .

Histoire de vie

On appelle **histoire de vie** d'un individu un couple de fonctions $(B(a), D(a))_{a \in \mathbb{R}_+}$ où a désigne l'âge de l'individu, $B(a)$ le taux de reproduction de l'individu à l'âge a et $D(a)$ le taux de mortalité intrinsèque de l'individu à l'âge a .

Modèle pour la drosophile

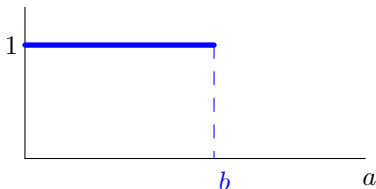


$$b - d \approx 0$$

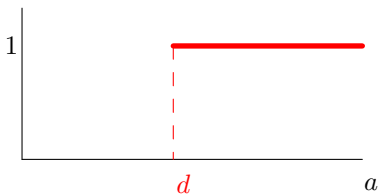
Identification d'un trait d'histoire de vie

Population asexuée, haploïde. Chaque individu caractérisé par le trait $(b, d) \in \mathbb{R}_+^2$

- se reproduit à taux $B((b, d), \cdot) = 1_{[0, b]}$:

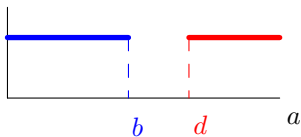


- meurt à taux $D((b, d), \cdot) = 1_{]d, +\infty[}$:



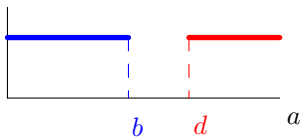
Trois types de configurations remarquables

- La configuration "ménopause" :

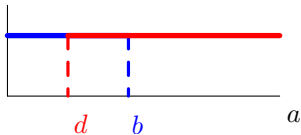


Trois types de configurations remarquables

- La configuration "ménopause" :

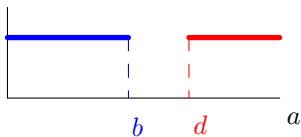


- La configuration "trop jeune pour mourir" :

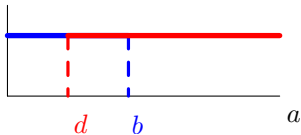


Trois types de configurations remarquables

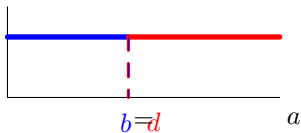
- La configuration "ménopause" :



- La configuration "trop jeune pour mourir" :



- La configuration "optimale" :



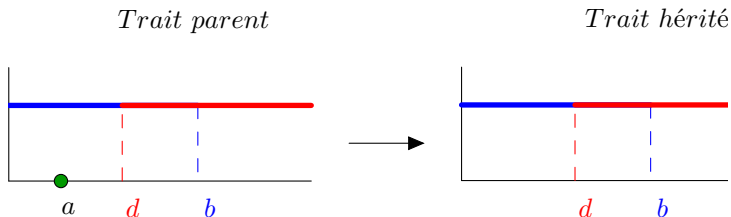
Evolution des traits (1) : héritage

Lorsqu'un individu de trait (b, d) et d'âge a se reproduit :

Evolution des traits (1) : héritage

Lorsqu'un individu de trait (b, d) et d'âge a se reproduit :

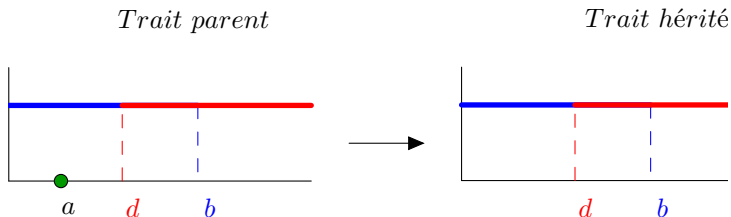
- Si $a \leq d$: son descendant hérite du trait (b, d) ,



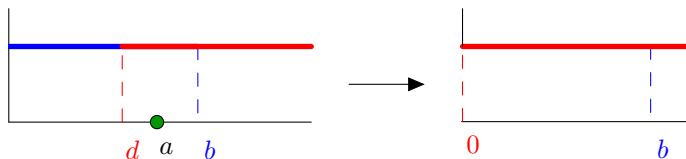
Evolution des traits (1) : héritage

Lorsqu'un individu de trait (b, d) et d'âge a se reproduit :

- Si $a \leq d$: son descendant hérite du trait (b, d) ,



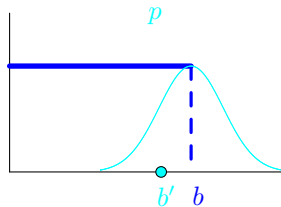
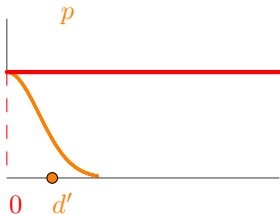
- Si $d < a (< b)$, son descendant hérite du trait $(b, 0)$,



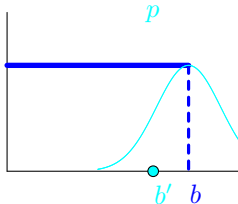
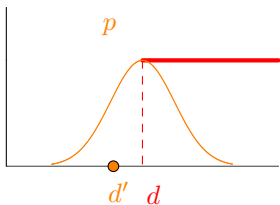
Evolution des traits (2) : les mutations

Les mutations modifient le trait hérité du parent (b, d).

- Si trait hérité = $(b, 0)$:



- Si trait hérité = (b, d) :



Description mathématique/Simulations

Modèle **stochastique individu-centré pour les populations structurées en traits et en âge**, Chi Viet Tran [Tra06] : A $t \geq 0$, la population est décrite par

$$Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} \delta_{((b_i(t), d_i(t)), a_i(t))}$$

et évolue selon un **processus de naissance et mort logistique généralisé** où chaque individu $((b, d), a)$

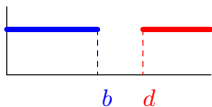
- se **reproduit** à taux $B((b, d), a) = 1_{[0, b]}(a)$ et donne un descendant d'âge 0 et de trait déterminé par "**héritage + mutations**".
- **meurt** à taux $D((b, d), a) + cN = 1_{]d, +\infty[}(a) + cN$ où N désigne la taille de la population.

Fitness/Sens d'évolution des traits

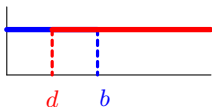
- **Fitness d'un individu de trait (b, d)** : nombre moyen de descendants de trait (b, d) d'un individu de trait (b, d) (en l'absence de mutation),

$$R(b, d) = \int_0^{b \wedge d} B((b, d), a) \exp\left(-\int_0^a D((b, d), \alpha) d\alpha\right) da = b \wedge d$$

- Si $b < d$ (configuration "ménopause") : $R(b, d) = b$

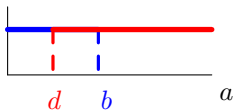


- Si $b > d$ (configuration "trop jeune pour mourir") : $R(b, d) = d$.



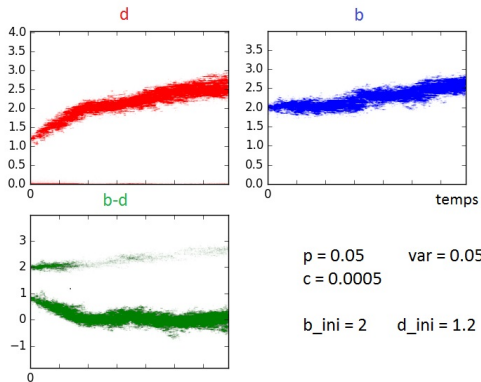
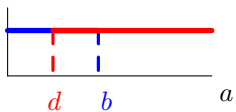
Simulations

Population initiale monomorphe :



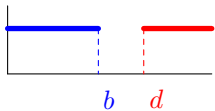
Simulations

Population initiale monomorphe :



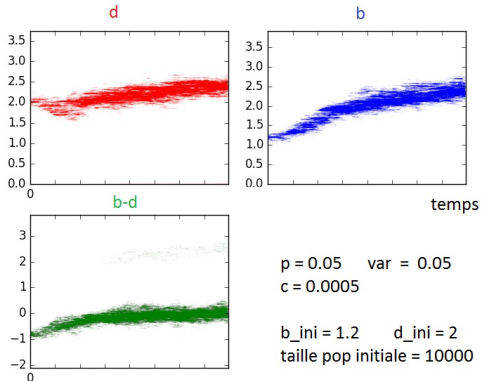
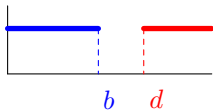
Simulations

Population initiale monomorphe :



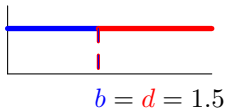
Simulations

Population initiale monomorphe :



Simulations

Population initiale monomorphe :

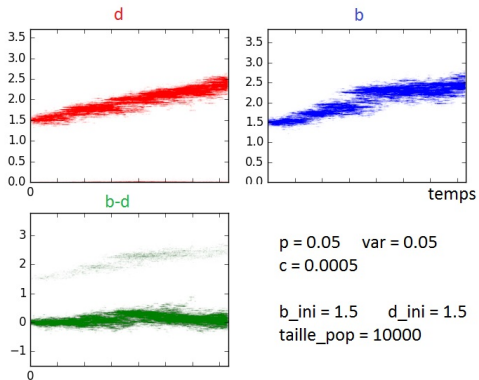


Simulations

Population initiale monomorphe :



$$b = d = 1.5$$



Compétition entre deux populations monomorphes

Compétition entre deux populations monomorphes

Hypothèses

- *Absence de mutation*
- *Mécanisme d'héritage*
- *Deux grandes populations monomorphes :*
 - *trait (b_1, d_1) : $n_1(t, a)$ et $s_1(t, a)$ densité de nombre respectives des individus de traits (b_1, d_1) et $(b_1, 0)$.*
 - *trait (b_2, d_2) : $n_2(t, a)$ et $s_2(t, a)$ densité de nombre respectives des individus de traits (b_2, d_2) et $(b_2, 0)$.*

Compétition entre deux populations monomorphes

Hypothèses

- Absence de mutation
- Mécanisme d'héritage
- Deux grandes populations monomorphes :
 - trait (b_1, d_1) : $n_1(t, a)$ et $s_1(t, a)$ densité de nombre respectives des individus de traits (b_1, d_1) et $(b_1, 0)$.
 - trait (b_2, d_2) : $n_2(t, a)$ et $s_2(t, a)$ densité de nombre respectives des individus de traits (b_2, d_2) et $(b_2, 0)$.

La dynamique $((n_1, s_1), (n_2, s_2))$ est donnée pour $i \in \{1, 2\}$ par

$$\begin{cases} \partial_t n_i(t, a) + \partial_a n_i(t, a) = - (1]_{d_i, +\infty[}(a) + c\mathcal{N}(t)) n_i(t, a) \\ \partial_t s_i(t, a) + \partial_a s_i(t, a) = - (1 + c\mathcal{N}(t)) s_i(t, a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_i(t, 0) = \int_0^{b_i \wedge d_i} n_i(t, \alpha) d\alpha \\ s_i(t, 0) = \int_0^{b_i} s_i(t, \alpha) d\alpha + \int_{b_i \wedge d_i}^{b_i} n_i(t, \alpha) d\alpha \end{cases}$$

Existence et unicité des solutions : (G.F. Webb [Web])

Compétition entre deux populations monomorphes

Conjecture (1)

Si $b_1 \wedge d_1 < b_2 \wedge d_2$, les solutions

$$((n_1(t, a), s_1(t, a)), (n_2(t, a), s_2(t, a)))_{t \geq 0}$$

convergent vers l'unique solution stationnaire non triviale $((0, 0), (\bar{n}_2, \bar{s}_2))$.

Dynamique monomorphe (1)

- $(b, d) \in \mathbb{R}_+^2$ fixé - n population de trait (b, d) - s population de trait $(b, 0)$

$$\begin{cases} \partial_t n(t, a) + \partial_a n(t, a) = - (1]_{d, +\infty[}(a) + c(N(t) + S(t))) n(t, a) \\ \partial_t s(t, a) + \partial_a s(t, a) = - (1 + c(N(t) + S(t))) s(t, a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} n(t, 0) = \int_0^{b \wedge d} n(t, \alpha) d\alpha \\ s(t, 0) = \int_0^b s(t, \alpha) d\alpha + \int_{b \wedge d}^b n(t, \alpha) d\alpha \end{cases}$$

avec $N(t) + S(t) = \int_0^{+\infty} n(t, \alpha) d\alpha + \int_0^{+\infty} s(t, \alpha) d\alpha$ et $c > 0$.

Dynamique monomorphe (2) : comportement en temps long

Solutions stationnaires

Si $b \wedge d > 1$, il existe une unique solution stationnaire non-triviale (\bar{n}, \bar{s}) qui vérifie pour tout $a \in \mathbb{R}_+$,

$$\bar{s}(a) = \frac{\alpha_{ns}}{\lambda_n - \alpha_s} \bar{n}(a),$$

$$\alpha_{ns} \geq 0, \lambda_n > 0, \alpha_s < 0.$$

Dynamique monomorphe (2) : comportement en temps long

Solutions stationnaires

Si $b \wedge d > 1$, il existe une unique solution stationnaire non-triviale (\bar{n}, \bar{s}) qui vérifie pour tout $a \in \mathbb{R}_+$,

$$\bar{s}(a) = \frac{\alpha_{ns}}{\lambda_n - \alpha_s} \bar{n}(a),$$

$\alpha_{ns} \geq 0$, $\lambda_n > 0$, $\alpha_s < 0$.

Conjecture (2)

Si $b \wedge d > 1$, $(n(t, \cdot), s(t, \cdot))$ converge dans L^1 vers (\bar{n}, \bar{s}) lorsque $t \rightarrow \infty$

Dynamique monomorphe (2) : comportement en temps long

Solutions stationnaires

Si $b \wedge d > 1$, il existe une unique solution stationnaire non-triviale (\bar{n}, \bar{s}) qui vérifie pour tout $a \in \mathbb{R}_+$,

$$\bar{s}(a) = \frac{\alpha_{ns}}{\lambda_n - \alpha_s} \bar{n}(a),$$

$\alpha_{ns} \geq 0$, $\lambda_n > 0$, $\alpha_s < 0$.

Conjecture (2)

Si $b \wedge d > 1$, $(n(t, \cdot), s(t, \cdot))$ converge dans L^1 vers (\bar{n}, \bar{s}) lorsque $t \rightarrow \infty$

Idée de démonstration

Dynamique monomorphe (2) : comportement en temps long

On remarque que

$$\left(\frac{n(t, \cdot)}{N(t)}, \frac{s(t, \cdot)}{S(t)} \right) = \left(\frac{e^{-\lambda_n t} v_n(t, \cdot)}{e^{-\lambda_n t} \int v_n(t, \cdot)}, \frac{e^{-\lambda_s t} v_s(t, \cdot)}{e^{-\lambda_s t} \int v_s(t, \cdot)} \right)$$

où $(v_n(t, \cdot), v_s(t, \cdot))_{t \geq 0}$ solution d'une edp linéaire de type
Mckendrick-Von Foerster (Inspiré de H. Leman, S. Méléard, S.
Mirahimmi (2015) [LMM])

Dynamique monomorphe (2) : comportement en temps long

On remarque que

$$\left(\frac{n(t, \cdot)}{N(t)}, \frac{s(t, \cdot)}{S(t)} \right) = \left(\frac{e^{-\lambda_n t} v_n(t, \cdot)}{e^{-\lambda_n t} \int v_n(t, \cdot)}, \frac{e^{-\lambda_s t} v_s(t, \cdot)}{e^{-\lambda_s t} \int v_s(t, \cdot)} \right)$$

où $(v_n(t, \cdot), v_s(t, \cdot))_{t \geq 0}$ solution d'une edp linéaire de type Mckendrick-Von Foerster (Inspiré de H. Leman, S. Méléard, S. Mirahimmi (2015) [LMM])

- Etape 1 : Etude de la limite de $e^{-\lambda_n t} (v_n(t, \cdot), v_s(t, \cdot))$ quand $t \rightarrow \infty$.

Dynamique monomorphe (2) : comportement en temps long

On remarque que

$$\left(\frac{n(t, \cdot)}{N(t)}, \frac{s(t, \cdot)}{S(t)} \right) = \left(\frac{e^{-\lambda_n t} v_n(t, \cdot)}{e^{-\lambda_n t} \int v_n(t, \cdot)}, \frac{e^{-\lambda_n t} v_s(t, \cdot)}{e^{-\lambda_n t} \int v_s(t, \cdot)} \right)$$

où $(v_n(t, \cdot), v_s(t, \cdot))_{t \geq 0}$ solution d'une edp linéaire de type Mckendrick-Von Foerster (Inspiré de H. Leman, S. Méléard, S. Mirahimmi (2015) [LMM])

- Etape 1 : Etude de la limite de $e^{-\lambda_n t} (v_n(t, \cdot), v_s(t, \cdot))$ quand $t \rightarrow \infty$.
- Etape 2 : Etude de la limite des masses $(N(t), S(t))$ quand $t \rightarrow \infty$.

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt}(t) = N(t) [\lambda_n + \mathcal{D}_n(t) - c(N(t) + S(t))] \\ \frac{dS}{dt}(t) = S(t) [\alpha_s + \mathcal{D}_s(t) - c(N(t) + S(t))] + (\alpha_{ns} + \mathcal{D}_{ns}(t))N(t) \end{cases}$$

avec $\mathcal{D}_n(t), \mathcal{D}_s(t), \mathcal{D}_{ns}(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$, $c, \lambda_n, \alpha_{ns} > 0$ et $\alpha_s < 0$.

Perspectives

- Démontrer les conjectures (1) et (2) sur le comportement en temps long des solutions des edp.
- Justification mathématique des comportements observés sur les simulations.
- Vers un modèle plus réaliste ? (Diploïdie, reproduction sexuée)

Merci pour votre attention !



Hélène Leman, Sylvie Méléard, and Sepideh Mirahimmi.
Influence of a spatial structure on the long time behavior of a
competitive lotka-volterra type system,.
Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, 20 (2015),469–493. .



M. Rera, R.I. Clark, and D.W. Walker.
Intestinal barrier dysfunction links metabolic and inflammatory
markers of aging to death in drosophila.
Proc Natl Acad Sci U S A, 2012.



Chi Viet Tran.
Modèles particuliers stochastiques pour des problèmes
d'évolution adaptative et pour l'approximation de solutions
statistiques.
Mathematics. Université de Nanterre - Paris X, 2006.



Glenn F. Webb.
Theory of nonlinear age-dependent population dynamics.
*volume 89 of Monographs and Textbooks in Pure and Applied
mathematics. Marcel Dekker, inc., New York - Basel, 1985.*