Grandes Déviations pour EDS de Poisson en Epidémiologie.

Brice Samegni-Kepgnou
En collaboration avec Etienne Pardoux

Université Aix-Marseille

L'Institut de Mathématiques de Marseille (I2M)

MMB, Aussois, 7 Juin 2016

Plan

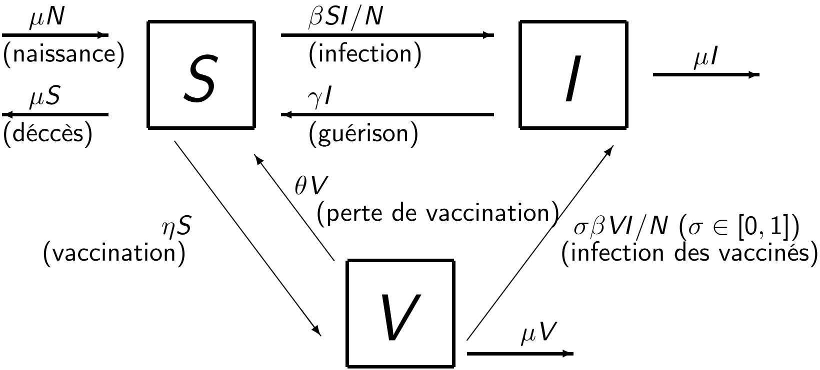
1. Motivation
   - Modèles Déterministes Compartimentaux
   - Comportement en temps long
   - Modèles d'EDS de Poisson
2. Grandes Déviations
   - Fonction de taux
   - Principe de Grandes Déviations
   - Problèmes de Sortie à la frontière caractéristique

Plan

1. Motivation
   - Modèles Déterministes Compartimentaux
   - Comportement en temps long
   - Modèles d'EDS de Poisson

2. Grandes Déviations
   - Fonction de taux
   - Principe de Grandes Déviations
   - Problèmes de Sortie à la frontière caractéristique

Le modèle SIV Kribs-Zaleta and Velasco-Hernandez(2000)



EDO pour les quantités renormalisées

- Posons
$$s(t) = \frac{S(t)}{N},\ i(t) = \frac{I(t)}{N},\ v(t) = \frac{V(t)}{N}.$$
- Cette EDO s'écrit
$$\begin{cases} \frac{di(t)}{dt} = \beta((\sigma - 1)v(t) - i(t))i(t) + (\beta - \mu - \gamma)i(t), \\ \frac{dv(t)}{dt} = \eta - \eta i(t) - \sigma\beta v(t)i(t) - (\mu + \theta + \phi)v(t) \\ s(t) = 1 - i(t) - v(t). \end{cases}$$

Équilibres et stabilités *SIV*

$$R_0 = \frac{\beta}{\mu+\gamma}\frac{\mu+\theta+\sigma\eta}{\mu+\theta+\eta}, \quad \tilde{R}_0 := \frac{\beta}{\mu+\gamma};$$

$$\beta_1 = (\mu+\gamma)\frac{\mu+\theta+\eta}{\mu+\theta+\sigma\eta}$$
$$\beta_0 = \mu+\gamma-\frac{\mu+\theta+\sigma\eta}{\sigma}+\frac{2}{\gamma}\sqrt{(\mu+\gamma)\sigma(1-\sigma)\eta},$$

- Si $R_0 < 1$, un DFE existe et cet équilibre est asymptotiquement stable
- $R_0 < 1 < \tilde{R}_0$ et $\beta_1 < \beta < \beta_0$, il y a deux équilibres endémiques (EE stable, EE instable).
- $\tilde{R}_0 > 1$, l'équilibre sans malade est instable

Frontière caractéristique du modèle *SIV*

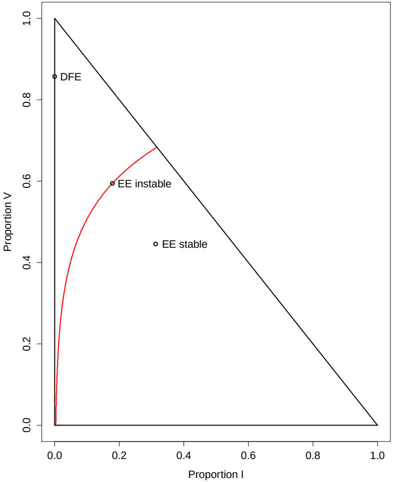
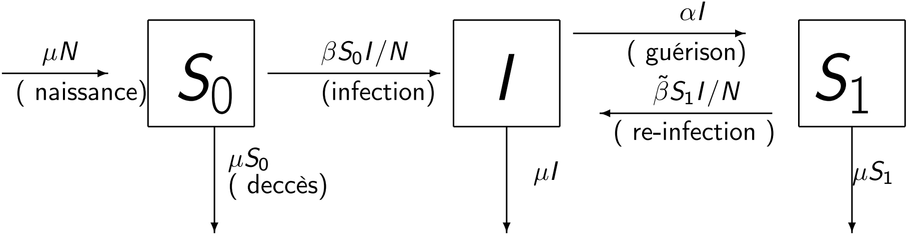


Figure: $\beta = 3.6$, $\eta = 0.3$, $\gamma = 1$, $\theta = 0.02$, $\sigma = 0.1$ et $\mu = 0.03$

Modèle S_0IS_1 (M.Safan, H. Heesterbeek et K.Dietz(2006))



EDO pour les quantités renormalisées

Posant $r = \frac{\tilde{\beta}}{\beta}$, $i(t) = \frac{I(t)}{N}$ et $s_1(t) = \frac{S_1(t)}{N}$

$$\begin{cases} \frac{di(t)}{dt} = \beta i(t)\big(1 - i(t) - (1-r)s_1(t)\big) - (\alpha + \mu)i(t) \\ \frac{ds_1(t)}{dt} = \alpha i(t) - \big(\mu + r\beta i(t)\big)s_1(t) \\ s_0(t) = 1 - i(t) - s_1(t). \end{cases}$$

Equilibres et Stabilités $S_0 I S_1$

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{\alpha + \mu}$$

$$\mathcal{R}_0^* = \frac{\beta^*}{\alpha + \mu} \quad \text{où} \quad \beta^* = \frac{\left(\sqrt{\mu(r-1)} + \sqrt{\alpha}\right)^2}{r}.$$

- $\mathcal{R}_0 > 1$, un unique équilibre endémique(EE) existe en plus de l'équilibre sans maladie(DFE).
- $\mathcal{R}_0^* < \mathcal{R}_0 < 1$ et $r > 1 + \mu/\alpha$ deux équilibres endémiques(*EE* stable, *EE* instable) existent ainsi l'équilibre sans maladie(DFE).
- $0 < \mathcal{R}_0 < \mathcal{R}_0^*$ ou $(\mathcal{R}_0^* < \mathcal{R}_0 < 1$ et $r < 1 + \mu/\alpha)$, seul le DFE existe.

Frontière caractéristique du modèle S_0IS_1

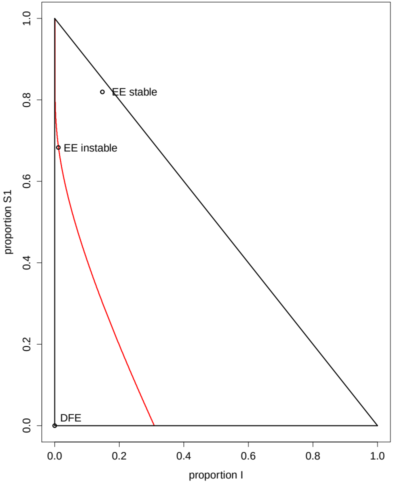


Figure: $\beta = 3, \alpha = 5,\ r = 2$ et $\mu = 0.015$

Modèle d'EDS de Poisson

$$Y^z(t) = z + \int_0^t \sum_{j=1}^k h_j \beta_j(Y^z(s))ds \tag{1}$$

$$Z^N(t) = Z^{N,z}(t) := \frac{[N.z]}{N} + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^k h_j P_j\Big(N\int_0^t \beta_j(Z^N(s))ds\Big) \tag{2}$$

$$= \frac{[N.z]}{N} + \int_0^t \sum_{j=1}^k h_j \beta_j(Z^N(s))ds + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^k h_j M_j\Big(N\int_0^t \beta_j(Z^N(s))ds\Big),$$

where $M_j(t) = P_j(t) - t$.

$$A = \Big\{z \in \mathbb{R}_+^d : \sum_{i=1}^d z_i \leq 1\Big\}$$

Questions

- Quelle est la différence entre la solution de l'EDO et celle de l'EDS poissonienne quand N est grand ?
- La solution de l'EDS peut-elle passer du bassin d'attraction d'un équilibre stable de l'EDO à un autre (avec N grand) ?
- Combien de temps faut–il attendre pour que cela se produise ?

Plan

Fonction de taux

Fixons $\phi \in \mathcal{AC}_{T,A}$

$$I_T(\phi) = \inf_{\mu} \sum_{j=1}^{k} \int_0^T f(\mu_t^j, \beta_j(\phi_t))dt$$

où

$$f(z,\lambda) = z \log \frac{z}{\lambda} - z + \lambda, \quad z,\lambda \geq 0$$

et μ est une fonction mesurable positive à valeurs dans $\mathbb{R}_+^k$ telle que

$$\frac{d\phi_t}{dt} = \sum_{j=1}^{k} \mu_t^j h_j.$$

- $I_T(\phi) = 0$ ssi $\phi = Y$ est solution de l'ODE sur $[0, T]$.
- $I_T(\phi)$ s'interprète comme l'énergie nécessaire pour que le système suive ϕ plutôt que Y.

Principe de Grandes déviations(LDP)

Théorème

La famille de solution de l'EDS Poissonienne noté $Z^{N,z}$ et définie en (2) satisfait au LDP sur $D_{T,A}$ avec une "bonne" fonction de taux I_T.

i.e

- $I_T : D_{T,A} \to \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement.
- Pour tout sous ensemble ouvert G de $D_{T,A}$

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{P}_z(Z^N \in G) \geq - \inf_{\phi\in G, \phi_0 = z} I_T(\phi).$$

- pour tout sous ensemble fermé F de $D_{T,A}$

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{P}_z(Z^N \in F) \leq - \inf_{\phi\in F, \phi_0 = z} I_T(\phi).$$

Remarques bibliographiques

- Shwartz et Weiss 1995.
- Une difficulté pour nous : certains taux s'annulent quand le processus atteint la frontière de A, donc le logarithme correspondant devient infini !
    - Shwartz et Weiss(2005)
    - P.Kratz et E.Pardoux (arXiv :1602.02803),
    - E.Pardoux et B.Samegni (arXiv :1606.01619).

Notations

- $O =$ bassin d'attraction de équilibre $z^* = EE$ stable.
- L'énergie minimale nécessaire pour aller de z à y dans l'intervalle de temps $[0, T]$

$$V_{\bar{O}}(z, y, T) := \inf_{\phi : \phi(0) = z, \phi(T) = y} I_T(\phi)$$

- L'énergie minimale nécessaire pour aller de z à y

$$V_{\bar{O}}(z, y) := \inf_{T > 0} V_{\bar{O}}(z, y, T)$$

- L'énergie minimale pour aller de z^* à la frontière caractéristique $\widetilde{\partial O}$

$$V_{\widetilde{\partial O}} := \inf_{y \in \widetilde{\partial O}} V_{\bar{O}}(z^*, y)$$

Temps de sortie du Bassin d'attraction

- Pour tout $z \in O$, quand est ce que $Z^{N,z}$ sort–il de O ?

$$\tau_O^{N,z} = \inf\{t > 0 : Z^{N,z}(t) \notin O\}$$

- P.Kratz et E.Pardoux ont montré que

Théorème

Pour tout $z \in O$, $\eta > 0$,

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\Big(\exp\{N(V_{\widetilde{\partial O}} - \eta)\} < \tau_O^{N,z} < \exp\{N(V_{\widetilde{\partial O}} + \eta)\}\Big) = 1.$$

- Ceci signifie que pour N grand,

$$\tau_O^{N,z} \approx \exp\{N.V_{\widetilde{\partial O}}\}$$

Temps de sortie du Bassin d'attraction

- Pour tout $z \in O$, quand est ce que $Z^{N,z}$ sort–il de O ?

$$\tau_O^{N,z} = \inf\{t > 0 : Z^{N,z}(t) \notin O\}$$

- P.Kratz et E.Pardoux ont montré que

Théorème

Pour tout $z \in O$, $\eta > 0$,

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\big(\exp\{N(V_{\widetilde{\partial O}} - \eta)\} < \tau_O^{N,z} < \exp\{N(V_{\widetilde{\partial O}} + \eta)\}\big) = 1.$$

- Ceci signifie que pour N grand,

$$\tau_O^{N,z} \approx \exp\{N.V_{\widetilde{\partial O}}\}$$

Temps de sortie du Bassin d'attraction

- Pour tout $z \in O$, quand est ce que $Z^{N,z}$ sort–il de O ?

$$\tau_O^{N,z} = \inf\{t > 0 : Z^{N,z}(t) \notin O\}$$

- P.Kratz et E.Pardoux ont montré que

Théorème

Pour tout $z \in O$, $\eta > 0$,

$$\lim_{N \to \infty} \mathbb{P}\Big(\exp\{N(V_{\widetilde{\partial O}} - \eta)\} < \tau_O^{N,z} < \exp\{N(V_{\widetilde{\partial O}} + \eta)\}\Big) = 1.$$

- Ceci signifie que pour N grand,

$$\tau_O^{N,z} \approx \exp\{N.V_{\widetilde{\partial O}}\}$$

- Nous voulons calculer

$$V_{\widetilde{\partial O}} := \inf_{T,\phi:\phi_0=z^*,\phi_T=y^*} \inf_{\mu} \int_0^T \sum_{j=1}^{k} f(\mu_s^j, \beta_j(\phi_s))ds,$$

où $f(x,\lambda) = x \log \frac{x}{\lambda} - x + \lambda$ et μ est une fonction mesurable positive telle que

$$\frac{d\phi_t}{dt} = \sum_{j=1}^{k} \mu_t^j h_j.$$

Problème de contrôle optimale

$$\begin{cases} \inf_\mu \int_0^T \sum_{j=1}^k f(\mu_s^j, \beta_j(\phi_s))ds, \\ \frac{d\phi_t}{dt} = \sum_{j=1}^k \mu_t^j h_j, \\ \phi_0 = z^* \quad \phi_T = y^*. \end{cases}$$

Posons

$$\xi_t = \int_0^t \sum_{j=1}^k f(\mu_s^j, \beta_j(\phi_s))ds,$$

$$\begin{cases} \inf_\mu \xi_T(\mu), \\ \frac{d\phi_t}{dt} = \sum_{j=1}^k \mu_t^j h_j, \\ \phi_0 = z^* \quad \phi_T = y^*, \\ \frac{d\xi_t}{dt} = \sum_{j=1}^k f(\mu_t^j, \beta_j(\phi_t)). \end{cases}$$

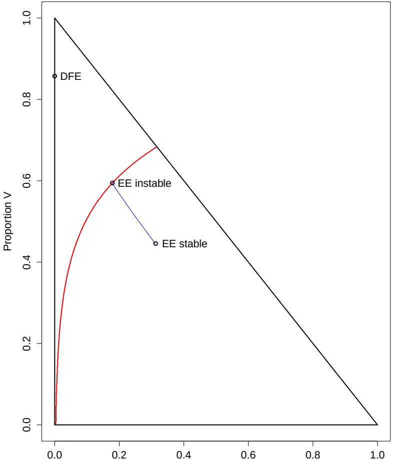
Problème de contrôle optimale

Changement de variable $t = T.u$, $u \in [0,1]$
$(\phi_t, \mu_t, \xi_t) \to (\psi_u, \Gamma_u, \tilde{\xi}_u)$

$$\begin{cases} \inf_\Gamma \tilde{\xi}_1(\Gamma), \\ \frac{d\psi_u}{du} = T \sum_{j=1}^k \Gamma_u^j h_j \\ \psi_0 = z^* \quad \psi_1 = y^* \\ \frac{d\tilde{\xi}_u}{du} = T \sum_{j=1}^k f(\Gamma_u^j, \beta_j(\psi_t)). \end{cases}$$

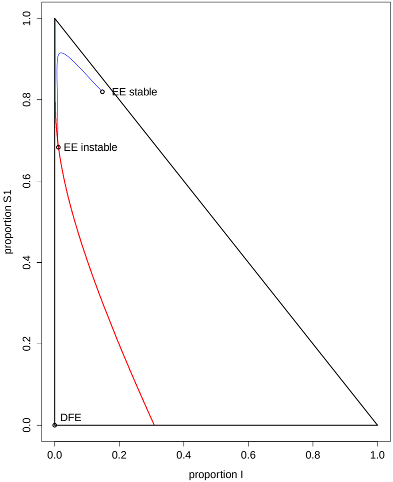
Trajectoire optimale SIV(en bleu)

- $\beta = 3.6$, $\eta = 0.3$, $\gamma = 1$, $\theta = 0.02$, $\sigma = 0.1$, $\mu = 0.03$, $T = 60$ et $V_{\widetilde{\partial O}} = 0.0021$



Trajectoire optimale S_0IS_1(en bleu)

- $\beta = 3, \alpha = 5,\ r = 2,\ \mu = 0.015,\ T = 50$ et $V_{\widetilde{\partial O}} = 0.0115$



Point de sortie d'un bassin d'attraction

- Pour un point $z \in O$, par quel point de la frontière caractéristique $Z^{N,z}$ sort–il de O ?
- Nous montrons le résultat suivant

Théorème

Pour tout $z \in O$, $y \in \widetilde{\partial O}$ et pour tout η, $\delta_0 > 0$ il existe $\delta < \delta_0$ et $N_0 \in \mathbb{N}$, de sorte que pour tout $N > N_0$

$$\exp(-N(S_z(y) + \eta)) \leq \mathbb{P}_z(|Z^N(\tau_O^N) - y| < \delta)$$

et

$$\mathbb{P}_z(|Z^N(\tau_O^N) - y| < \delta) \leq \exp(-N(S_z(y) - \eta))$$

où $S_z(y)$ est défini par : $S_z(y) = V(z, y) \wedge (V(z^*, y) - V_{\widetilde{\partial O}})$.

Point de sortie d'un bassin d'attraction

- Pour un point $z \in O$, par quel point de la frontière caractéristique $Z^{N,z}$ sort–il de O ?
- Nous montrons le résultat suivant

Théorème

Pour tout $z \in O$, $y \in \widetilde{\partial O}$ et pour tout η, $\delta_0 > 0$ il existe $\delta < \delta_0$ et $N_0 \in \mathbb{N}$, de sorte que pour tout $N > N_0$

$$\exp(-N(S_z(y)+\eta)) \leq \mathbb{P}_z(|Z^N(\tau_O^N) - y| < \delta)$$

et

$$\mathbb{P}_z(|Z^N(\tau_O^N) - y| < \delta) \leq \exp(-N(S_z(y)-\eta))$$

où $S_z(y)$ est défini par : $S_z(y) = V(z,y) \wedge (V(z^*,y) - V_{\widetilde{\partial O}})$.

Une conséquence du théorème

- S'il existe un unique point $y^* \in \widetilde{\partial O}$ tel que $V(z^*, y^*) = V_{\widetilde{\partial O}}$ alors

$$\forall \delta > 0, \forall z \in O, \lim_{N \to \infty} \mathbb{P}_z(|Z^N(\tau_O^N) - y^*| < \delta) = 1.$$

- Pour les modèles SIV et $S_0 IS_1$, $y^* = EE$ instable.

Merci pour votre attention !

- P. Kratz, E. Pardoux and B. Samegni-Kepgnou, Numerical methods in the context of compartmental models in epidemiology, *ESAIM : Proceedings and Surveys* **48**, 169–189, 2015.
- P. Kratz and E. Pardoux, Large deviations for infection diseases models, arXiv :1602.02803, 2016.
- M. Safan, H. Heesterbeek and K. Dietz, The minimum effort required to eradicate infections in models with backward bifurcation, *J. Math. Biol.* **53**, 703–718, 2006.
- C. M. Kribs-Zaleta and J. X. Velasco-Hernandez, A simple vaccination model with multiple endemic states, *Mathematical biosciences*, 164(2) :183–201, 2000.
- E. Pardoux and B. Samegni-Kepgnou, Large deviations for Poisson Driven SDE in Epidemiology, arXiv :1606.01619, 2016.
- E. Pardoux and B. Samegni-Kepgnou, Position of exit from a Domain for Poisson Driven SDE in Epidemiology, to be submitted.
- Adam Shwartz and Alan Weiss, *Large Deviations for Performance Analysis*, Chapman Hall, London, 1995.