

* Propagation d'un allèle favorable

a, A deux allèles, m_a proportion densité des individus a
 m_A densité des individus A

$$\begin{cases} \partial_t m_a - \sigma \Delta_x m_a = (\pi_a - I) m_a \\ \partial_t m_A - \sigma \Delta_x m_A = (\pi_A - I) m_A \end{cases}$$

← constante inconnue

Hypothèse $m_a + m_A = 1 \Rightarrow \pi_a m_a + \pi_A m_A = I (m_a + m_A)$
 $\Rightarrow I = \pi_A + (\pi_a - \pi_A) m_a$

d'où $\partial_t m_a - \sigma \Delta_x m_a = (\pi_a - \pi_A) (1 - m_a) m_a$

* Epidémiologie

S = individus sains
 I = infectés

$$\begin{cases} \partial_t S - \sigma \Delta_x S = \lambda(t) S - \beta S I \\ \partial_t I - \sigma \Delta_x I = \beta S I - \delta I \end{cases}$$

avec $S + I = 1$

$$\partial_t I - \sigma \Delta_x I = (\beta - \delta) \left(1 - \frac{I}{\beta - \delta} \right)$$

3) Fronts de propagation et relation de dispersion

c = vitesse de propagation En dimension 1

On cherche c et u tel que $m(t, x) = u(x - ct)$ soit solution de FKPP.

u doit satisfaire
$$\begin{cases} -cu' - \sigma u'' = r \left(1 - \frac{u}{K} \right) u \\ u \geq 0, \quad u(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 1, \quad u(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \end{cases}$$

On linéarise: $-cu' - \sigma u'' = \lambda u$

Si on cherche u sous la forme $u = e^{-\lambda x}$

$$\Rightarrow c\lambda - \sigma\lambda^2 = \lambda \quad \Rightarrow c(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda} + \sigma\lambda$$

On définit $c^* = \min_{\lambda > 0} c(\lambda)$ $c'(\lambda) = \frac{-\lambda}{\lambda^2} + \sigma = 0$ ssi $\lambda = \sqrt{\frac{\lambda}{\sigma}}$

et donc $c^* = 2\sqrt{\lambda\sigma}$.

~~On a~~ $-cu' - \sigma u'' = \lambda u \geq \lambda(1 - \frac{u}{K})u$ sur-solution

Soit $w(t, x) = u(x - ct)$

$$\text{Si } \begin{cases} \partial_t w - \sigma \Delta_x w \geq \lambda(1 - \frac{w}{K})w \\ \partial_t m - \sigma \Delta_x m = \lambda(1 - \frac{m}{K})m \end{cases}$$

alors le principe de comparaison parabolique nous dit que si $m(0, x) \leq w(0, x)$
 $\forall x \in \mathbb{R}$ alors $\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $m(t, x) \leq w(t, x)$.

On en déduit que $\forall c \geq 2\sqrt{\lambda\sigma}$ il existe une u, U qui encadrent
bornent la solution et donc m ne peut pas se propager à vitesse
plus grande que $c^* = \min_{\lambda} c(\lambda)$.

4) Plan de phase

On cherche (c, u) tq $-cu' - u'' = u(1-u)$.

On pose $U(t) = u(t)$

$V(t) = u'(t)$

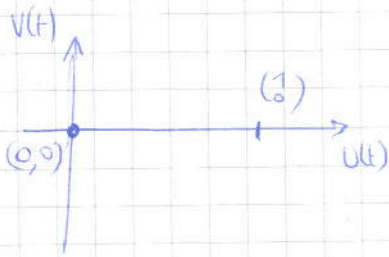
$$\text{Alors } \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ -cV - U(1-U) \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

On veut aussi $U \geq 0$, $U \rightarrow 0$ $_{x \rightarrow +\infty}$, $U \rightarrow 1$ $_{x \rightarrow -\infty}$

\rightarrow On cherche des points fixes de F .

$$F \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} V = 0 \\ U = 0 \text{ ou } U = 1 \end{cases}$$

Deux états stationnaires $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



On a $DF\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix}$ $\det = -1$
 $\text{trace} = -c$

$DF\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m_1 & c \end{pmatrix}$ $\det = -1$
 $\text{trace} = c$

$\lambda_1, \lambda_2 = 1$

$\lambda_1 + \lambda_2 = c$

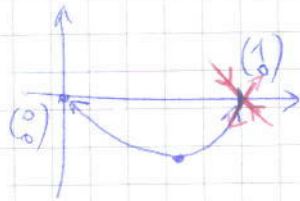
$\Rightarrow \lambda_1^2 + 1 + c\lambda_1 = 0 \quad \Delta = c^2 - 4$

Si $c \geq 2$ alors $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est attractif sans tourner.

$c \in (0, 2)$ en tournant

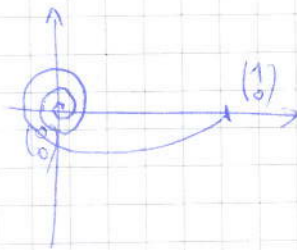
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un point selle.

\Rightarrow Si $c > 2$

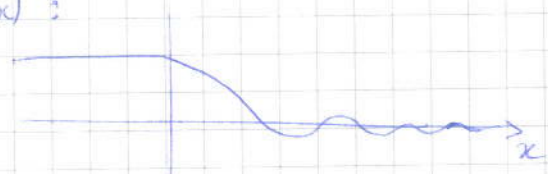


et on a une solution

Cas $c \in (0, 2)$



et $u(x)$:



pas admissible si on veut $u \geq 0$.

5) F-KPP et systèmes de particules

\rightarrow Lien entre modèles individus-centrés et FKPP. On discrétise l'espace

$h \mathbb{Z} \cap [0, 1]$. N_i = nombre d'individus dans la case i

Les individus se déplacent suivant une marche aléatoire, se reproduisent à taux α et meurent à taux $\gamma + \beta \frac{N_i}{N}$.

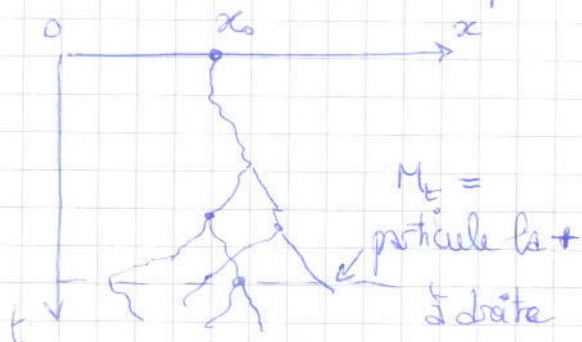
On introduit une taille de pop caractéristique N puis $N \rightarrow \infty$.

Alors si $m_i = \frac{N_i}{N} \Rightarrow \frac{d}{dt} m_i = \frac{m_{i+1} - 2m_i + m_{i-1}}{h^2} + (\alpha - \gamma) m_i - \beta m_i^2$
 différences finies explicitées par FKPP

As $h \rightarrow 0$, on obtient FKPP.

→ Transformation de McKean.

On considère des individus qui se déplacent suivant un mouvement brownien.



$\mathbb{P}(M_t \leq x)$? On regarde entre 0 et τ :

$$\mathbb{P}(M_{t+\tau} \leq x) = \mathbb{P}(\text{reproduction sur } [0, \tau]) \mathbb{P}(M_t \leq x) + (1 - \mathbb{P}(\text{rep sur } [0, \tau])) \mathbb{P}(M_t \leq x + B_\tau) + o(\tau)$$

donc
$$\frac{\mathbb{P}(M_{t+\tau} \leq x) - \mathbb{P}(M_t \leq x)}{\tau} = \mathbb{P}(M_t \leq x)^2 - \mathbb{P}(M_t \leq x) + \frac{1}{2} \Delta_x \mathbb{P}(M_t \leq x) + \frac{\mathbb{P}(M_t \leq x + B_\tau) - \mathbb{P}(M_t \leq x)}{\tau}$$

et on obtient $\partial_t \mathbb{P}(M_t \leq x) = \mathbb{P}(M_t \leq x)^2 - \mathbb{P}(M_t \leq x) + \frac{1}{2} \Delta_x \mathbb{P}(M_t \leq x)$

Si on pose $m(t, x) = 1 - \mathbb{P}(M_t \leq x)$, alors

$$\partial_t m - \frac{1}{2} \Delta_x m = m(1 - m).$$

→ Asymptotique de Bruner - Demida.

On ne garde que les N particules les plus à droite dans ~~une marche~~ ^{un mouvement} ~~branchante~~ ^{branchante} brownien.

Alors $c_N = c_{FKP}^* - \frac{\pi}{(\ln N)^2} + \dots$

où c_N est la vitesse moyenne de la particule la + à droite.

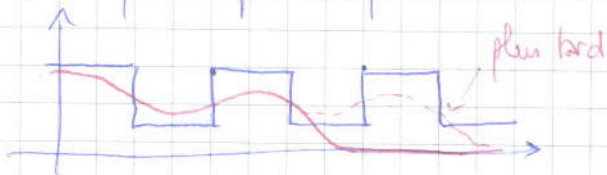
II Environnement hétérogène

$$\partial_t m - \sigma \Delta_x m = r m(1 - m)$$

En dim 1

1) Propagation avec r périodique.

$r(x)$ périodique de période $L > 0$.



On appelle front propulsatoire, (c, u) un couple

$$\partial_t u - \Delta_x u = r(x) u(1-u) \quad \text{sur } [0, \frac{L}{\varepsilon}]$$

$$u(0, x) = u(\frac{L}{\varepsilon}, x+L)$$

$$u(\cdot, x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0, \quad \dots \quad - \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) \neq 0$$

Que vaut c ? c est relié à une valeur propre compliquée. Explicite dans certains cas seulement. Ex: si périodique de période L , $= \mu^+$ sur $[0, \frac{L}{2}]$ et $= \mu^-$ sur $[\frac{L}{2}, L]$ alors si $\mu^+ = -\mu^-$

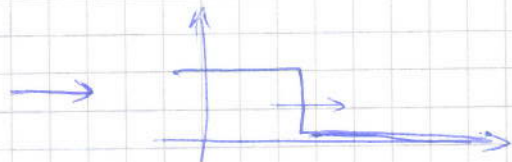
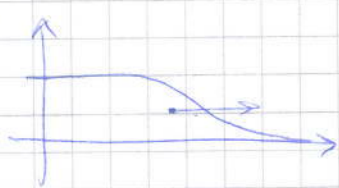
$$\text{on a } c_L^* \xrightarrow{L \rightarrow \infty} c_0^* = 2 \sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L r}$$

$$c_L^* \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\mu^+}$$

2) Hétérogénéités de grande taille.

On fait un zoom arrière $(t, x) \rightsquigarrow (\varepsilon t, \varepsilon x)$

FKPP



$$\partial_t m^\varepsilon - \varepsilon \Delta_x m^\varepsilon = \frac{r(\varepsilon x)}{\varepsilon} m^\varepsilon (1 - m^\varepsilon)$$

$$\text{On pose } m^\varepsilon(t, x) = e^{-\frac{\varphi^\varepsilon(t, x)}{\varepsilon}} \Rightarrow \partial_t m^\varepsilon = -\frac{\partial_t \varphi^\varepsilon}{\varepsilon} m^\varepsilon$$

$$\Delta_x m^\varepsilon = \frac{(\partial_x \varphi^\varepsilon)^2}{\varepsilon^2} m^\varepsilon - \frac{\Delta_x \varphi^\varepsilon}{\varepsilon} m^\varepsilon$$

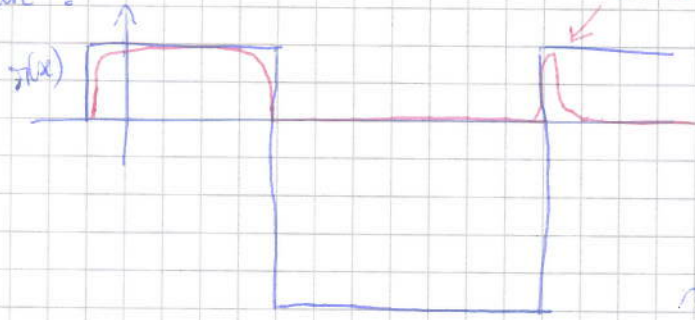
$$\text{et } \partial_t \varphi^\varepsilon + |\nabla_x \varphi^\varepsilon|^2 - \varepsilon \Delta_x \varphi^\varepsilon = -r(x) + e^{-\frac{\varphi^\varepsilon}{\varepsilon}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{si } \varphi(t, x) > 0 \\ r(x) & \text{si } \varphi(t, x) = 0 \end{cases}$$

La limite $\varepsilon \rightarrow 0$ a un sens grâce aux solutions de viscosité.

$$\text{On obtient } \partial_t \varphi + |\nabla_x \varphi|^2 = -r(x) \mathbb{1}_{\varphi > 0}$$

$$\text{Population limite: } m(t, x) = r(x) \mathbb{1}_{\varphi(t, x) = 0}$$

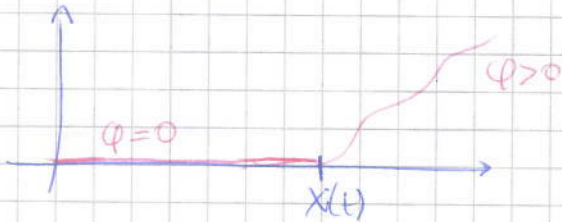
Une difficulté :



on atteint ce point là
quand même, malgré la
grosse zone avec $\kappa \ll 0$

Il faut donc trouver un
moyen de contour cet effet.

3) Une asymptotique alternative (avec Matthieu Alfaro et Pascal Mailhot)

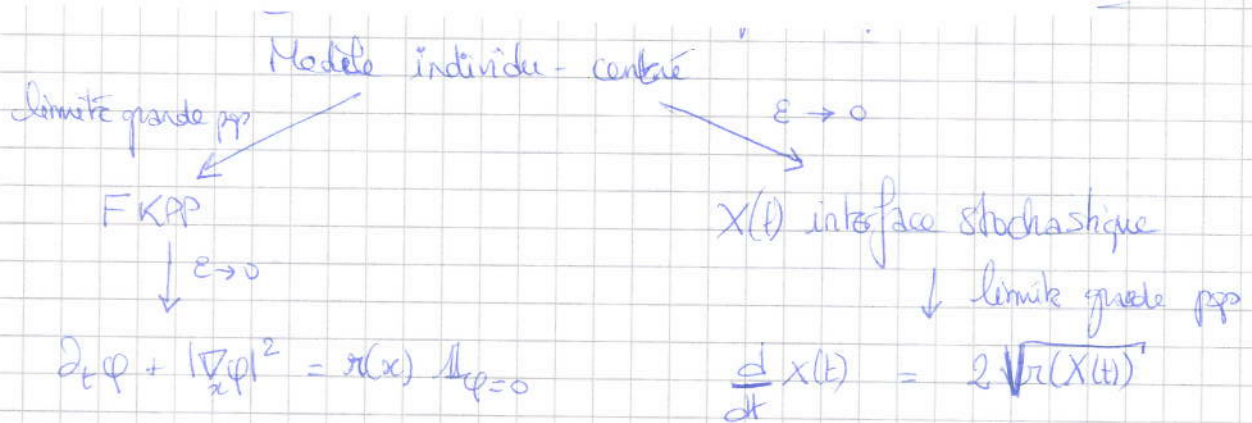


En "se-zoom" : $\partial_t m - \Delta_x m = \kappa(\varepsilon x) m - m^2$

κ à peu près constant sur cette échelle, donc on peut l'approcher par

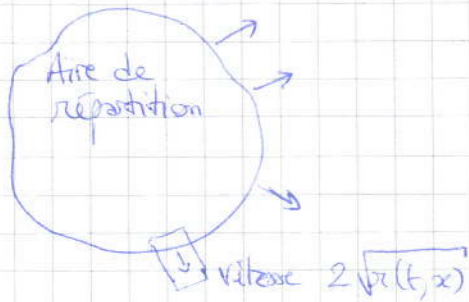
κ constant, et on retrouve FKPP de vitesse $2\sqrt{\kappa(X(t))}$

$$\kappa = \kappa(X(t))$$



4) Cas de dimensions d'espace plus grandes

Si κ est constant, en passant par ϕ on peut montrer que l'interface se propage à vitesse constante $2\sqrt{\kappa}$. Si κ varie en temps et espace, on s'attend à une vitesse $2\sqrt{\kappa(t, x)}$ aux bords de l'interface.



III Populations asexuées.

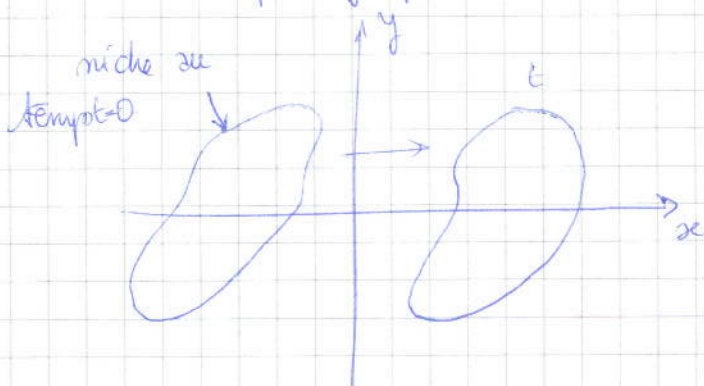
1) Le modèle

$m(t, x, y)$ t temps, $x \in \mathbb{R}$ position, $y \in \mathbb{R}$ phénotype.

$$\partial_t m - \Delta_x m - \Delta_y m = (r(t, x, y) - \int m(t, x, z) dz) m$$

2) Le cas confiné

r n'est positif que sur un compact qui sera translaté vers x grand.



$$r(t, x, y) = \bar{r}(x - ct, y)$$

c : vitesse du changement climatique

$$\Rightarrow m(t, x, y) = u(x - ct, y).$$

$$-c \partial_x u - \Delta_x u - \Delta_y u = (\bar{r}(x, y) - \lambda) u.$$

\hookrightarrow équivaut à peu près au taux de croissance per capita moyen de la population.

On pose $\sigma(x, y) = \exp\left(\frac{cx}{2}\right) u\left(\frac{x}{2}, y\right)$

Alors $\partial_x \sigma = +\frac{c}{2} \sigma + e^{\frac{cx}{2}} \partial_x u$

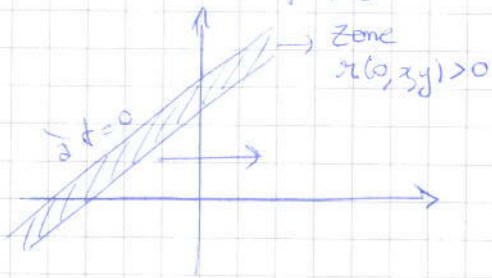
$$\Delta_x \sigma = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \sigma + \frac{c}{2} e^{\frac{cx}{2}} \partial_x u + e^{\frac{cx}{2}} \Delta_x u$$

et donc le problème linéarisé est équivalent à $-\Delta_x \sigma - \Delta_y \sigma = \left(\bar{r}(x, y) - \left(\frac{c}{2}\right)^2 - \lambda\right) \sigma$.

$H = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \lambda$, la condition de survie est $H > 0$ donc il faut que $0 \leq c < c^* = 2\sqrt{H}$.

Pour avoir une idée de la dynamique plus précise de la pop, on revient aux fronts de propagation.

2) Fronts de propagation



$n(t, x, y) = \bar{n}(y - \beta(x - ct))$

(changement climatique à vitesse c).
 ← pente

(jolie simulation 😊)

IV Modèles de populations sexuées

1) Modèle infinitésimal spatialisé (SIM)

$m(t, x, y)$ $\frac{\partial_t m - \underbrace{\Delta_x m}_{\text{dispersion}}}{\text{dispersion}} = \left(1 + \frac{A}{2} - \frac{1}{2}(y - y_{opt}(t, x))^2 - \int m(t, x, z) dz \right) m$

+ $\delta \left(\underbrace{\int \frac{m(t, x, y_*) m(t, x, y_{**})}{\int m(t, x, z) dz} \Gamma_{\frac{1}{2}} \left(y - \frac{y_* + y_{**}}{2} \right) dy_* dy_{**}}_{T(m)} - 1 \right)$

où $\Gamma_{\frac{1}{2}}$ noyau $\mathcal{N}(0, \frac{A}{2})$

On remarque que $T(m) = (\Gamma_A * m * m)_{(zy)}$ donc on peut utiliser des méthodes spectrales pour la simulation + équilibre $T(\Gamma_A) = \Gamma_A$ (à x fixé)

Propriétés de T : $\int T(m) dy = \int m dy$, $\int \frac{T(m)(y)}{N} y dy = \int \frac{m(y)}{N} y dy$
 → trait moyen conservé.

On s'attend à avoir $n(t, x, y) = N(t, x) \Gamma_A(y - Z(t, x))$, où N et Z satisfont les eq. dérivées dans le paragraphe suivant (quand δ est très grand)
 ← approximation

Limite macroscopique

$x \in \mathbb{T}^d$ (tore en dim d), $y \in \mathbb{R}$.

Si γ est assez grand, alors il existe $\theta \in (0, 1)$ tel que

$$\max_{\substack{t \in [\frac{1}{\gamma^\theta}, \infty) \\ x \in \mathbb{T}^d}} W_\gamma \left(\frac{n(t, x, \cdot)}{\int n(t, x, z) dz}, \nabla_A \left(\cdot - \int y \frac{n(t, x, y)}{\int n(t, x, z) dz} \right) \right) \leq \frac{C}{\gamma^\theta}$$

et $N(t, x), Z(t, x)$ satisfont

$$\begin{cases} \partial_t N - \Delta_x N = \left(1 - \frac{1}{2} (Z - y_{opt})^2 - N + O\left(\frac{1}{\gamma^\theta}\right) \right) N \\ \partial_t Z - \Delta_x Z = 2 \frac{\nabla_x N}{N} \cdot \nabla_x Z - A(Z - y_{opt}) + O\left(\frac{1}{\gamma^\theta}\right) \end{cases}$$

Corollaire. Si γ est assez grand,

- Il existe une solution globale pour le SIM.
- Il existe une unique solution globale pour le KBM.

régularité Hölder : $\frac{|Z(t, x) - Z(t', x')|}{|t - t'|^\theta + |x - x'|^\theta} \leq C.$

