Modélisation de la croissance d'un réseau organisé : Le cas de champignons filamenteux

Milica Tomasevic, Amandine Véber

CMAP - Ecole Polytechnique

Projet soutenu par l'attribution d'une allocation de recherche Région Ile-de-France

Ecole de recherche de la Chaire MMB
Aussois, 22 mai 2019

Outline

Outline

Santé des sols

- Se réfère à la **capacité** des sols à **fonctionner** à long terme comme un système vivant.

- Les sols en bonne santé renferment une **communauté d'organismes** qui :
  - s'associent avec les racines des plantes,
  - recyclent les nutriments essentiels...

  Ce qui permet d'**améliorer la croissance végétale**.

Santé des sols et les champignons filamenteux

- Les **champignons du sol** jouent un rôle important dans le écosystème du sol où ils sont mêlés à une communauté d'organismes (bactéries, insectes, vers).

- Variations environnementales $\rightarrow$ changement de cette communauté.

Santé des sols et les champignons filamenteux

- Les **champignons du sol** jouent un rôle important dans le écosystème du sol où ils sont mêlés à une communauté d'organismes (bactéries, insectes, vers).
- Variations environnementales $\rightarrow$ changement de cette communauté.

But de ce projet : **analyser** les **effets de l'environnement** sur l'évolution du réseau des filaments (*thalle*) de champignon filamenteux.

Collaboration : projet DREAMS, en particuliers mycologues de Paris 7 (F. Chapeland-Leclerc et G. Ruprich-Robert), mathématiciennes du Plateau du Saclay (A. Olivier, A. Véber, M.T.)

Réseau de filaments d'un champignon filamenteux

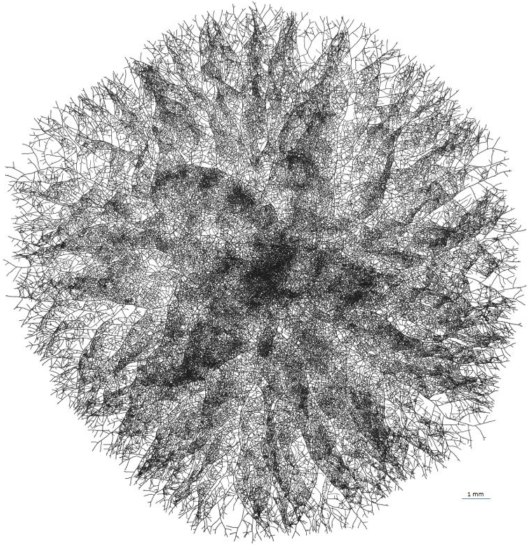
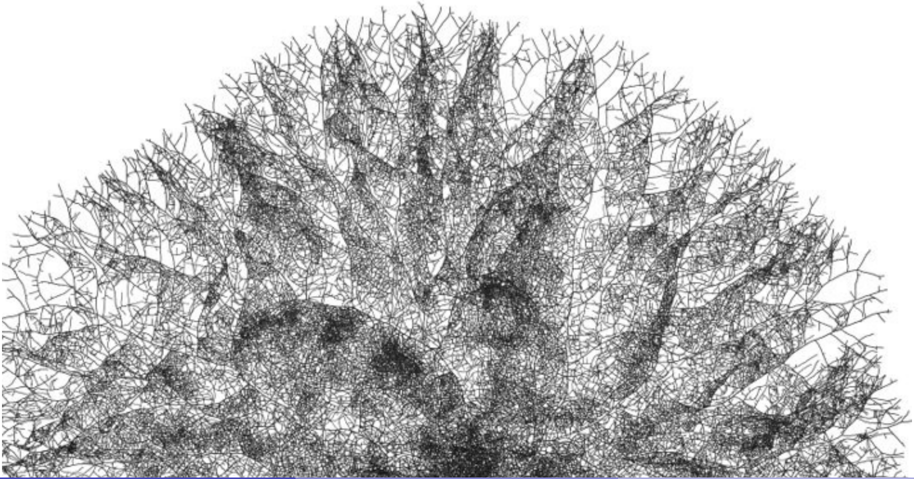


Figure : Photographié au LIED, Paris 7

Caractéristiques du développement

1. la **croissance** et la **“naissance”** de filaments primaires : exploration d’espace, recherche de ressources;
2. la **création** de filaments secondaires : captage de ressources, densification du réseau.



Outline

Un premier modèle

But : Mieux comprendre **les effets** de la création des filaments secondaires (**densification**) sur la structure du réseau. On négligera l'aspect spatial pour le moment.

- Réseau de **filaments** = population d'**individus**.
- Les individus z^i caractérisé par $z^i = (\text{Taille}^i, \text{Type}^i)$.

Un premier modèle

<u>But</u> : Mieux comprendre **les effets** de la création des filaments secondaires (**densification**) sur la structure du réseau. On négligera l'aspect spatial pour le moment.

- Réseau de **filaments** = population d'**individus**.
- Les individus z^i caractérisé par $z^i = (\text{Taille}^i, \text{Type}^i)$.

- Deux types :

Type F **Fermés** : filaments internes, de Taille fixée;
Type O **Ouverts** : filaments en croissance.

Un premier modèle

But : Mieux comprendre **les effets** de la création des filaments secondaires (**densification**) sur la structure du réseau. On négligera l'aspect spatial pour le moment.

- Réseau de **filaments** = population d'**individus**.
- Les individus z^i caractérisé par $z^i = (\text{Taille}^i, \text{Type}^i)$.
- Deux types :

Type F **Fermés** : filaments internes, de Taille fixée;
Type O **Ouverts** : filaments en croissance.

- Règles d'évolution :
  1. Croissance d'Ouverts à vitesse v;
  2. Branchement de (O, x) à taux b_1 pour : **produire** $2 \times (\mathrm{O}, 0)$ et **se transformer** en (F, x);
  3. Branchement de $(\mathrm{O/F}, x)$ à taux $b_2 x$ pour : **produire** $(\mathrm{O}, 0)$ et **se fragmenter** en $(\mathrm{F}, \alpha x)$ et $(\mathrm{O/F}, (1-\alpha)x)$. $(\alpha \sim U[0,1])$

Un premier modèle

But : Mieux comprendre **les effets** de la création des filaments secondaires (**densification**) sur la structure du réseau. On négligera l'aspect spatial pour le moment.

- Réseau de **filaments** = population d'**individus**.
- Les individus z^i caractérisé par $z^i = (\mathrm{Taille}^i, \mathrm{Type}^i)$.
- Deux types :

Type F **Fermés** : filaments internes, de Taille fixée;
Type O **Ouverts** : filaments en croissance.

- Règles d'évolution :
  1. Croissance d'Ouverts à vitesse v;
  2. Branchement de (O, x) à taux b_1 pour : **produire** $2 \times (\mathrm{O}, 0)$ et **se transformer** en (F, x);
  3. Branchement de $(\mathrm{O}/\mathrm{F}, x)$ à taux $b_2 x$ pour : $\leftarrow$ densification **produire** $(\mathrm{O}, 0)$ et **se fragmenter** en $(\mathrm{F}, \alpha x)$ et $(\mathrm{O}/\mathrm{F}, (1-\alpha)x)$. $(\alpha \sim U[0,1])$

- N_t - nombre total d'individus à l'instant t.
- Le réseau est décrit par le processus à valeurs mesures ponctuelles :

$$M_t = \sum_{i}^{N_t} \delta_{z_t^i}.$$

- Une première difficulté : **densification** $\rightarrow$ tous les z_t^i sont toujours actifs.
- Question : $(M_t)_{t\geq 0}$ **n'explose pas** en temps fini ?

- N_t - nombre total d'individus à l'instant t.
- Le réseau est décrit par le processus à valeurs mesures ponctuelles :

$$M_t = \sum_{i}^{N_t} \delta_{z_t^i}.$$

- Une première difficulté : **densification** $\rightarrow$ tous les z_t^i sont toujours actifs.
- Question : $(M_t)_{t\geq 0}$ **n'explose pas** en temps fini ?

Theorem 1

Le processus $(M_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Markov bien définit et on sait caractriser son générateur infinitésimal $\mathcal{A}$.

Comportement en temps long - travail en cours

Objectif : Estimer les paramétes du modèle : b_1, b_2, v.

Outil : Montrer que **la répartition des filaments** en fonction de leur tailles **atteint un état stationnaire** au cours de temps.

Comportement en temps long - travail en cours

Objectif : Estimer les paramétes du modèle : b_1, b_2, v.

Outil : Montrer que **la répartition des filaments** en fonction de leur tailles **atteint un état stationnaire** au cours de temps.

- On définit n_t par $\langle n_t, f \rangle = \mathbb{E}(\langle M_t, f \rangle)$, où $f \in \mathcal{C}_b^1(S)$.

Comportement en temps long - travail en cours

Objectif : Estimer les paramétes du modèle : b_1, b_2, v.

Outil : Montrer que **la répartition des filaments** en fonction de leur tailles **atteint un état stationnaire** au cours de temps.

- On définit n_t par $\langle n_t, f\rangle = \mathbb{E}(\langle M_t, f\rangle)$, où $f \in \mathcal{C}_b^1(S)$.
- Théorème 1 implique :

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n_t, f\rangle = \mathbb{E}\langle M_t, \mathcal{A}f\rangle,$$

où l'opérateur $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal suivant :

$$\mathcal{A}f(e,x) = v\frac{\partial}{\partial x}f(e,x)\mathbb{1}\{e=O\} + b_1\mathbb{1}\{e=O\}(2f(O,0) + f(F,x) -$$

$$- f(e,x)) + b_2 x\left(f(O,0) + \int_0^1 [f(e,\alpha x) + f(F,(1-\alpha)x)]\ d\alpha\right).$$

  - Population non homogène $\rightarrow$ les résultats de la littérature (Doumic et. al (2015), Bertoin et Watson (2018)) **ne s'appliquent pas directement** .

Outline

Objectifs futurs

- Généralisation à un processus **spatial** avec des **interactions** entre les individus :
  - **Composante spatiale** : individus $u^i = (x^i, \theta^i)$
    $x \in \mathbb{R}^2$ - position, θ - l'angle du vecteur vitesse
  - **Interactions** environnement-réseau : **vitesse, branchement, densification;**.
    (Ex. : communication chimique au sein du réseau)
- Comportement en temps long.
- Application aux données réels.