Approximation gaussienne de dynamiques de populations sur de grandes échelles de temps

Adrien Prodhomme

(CMAP / Institut Denis Poisson)

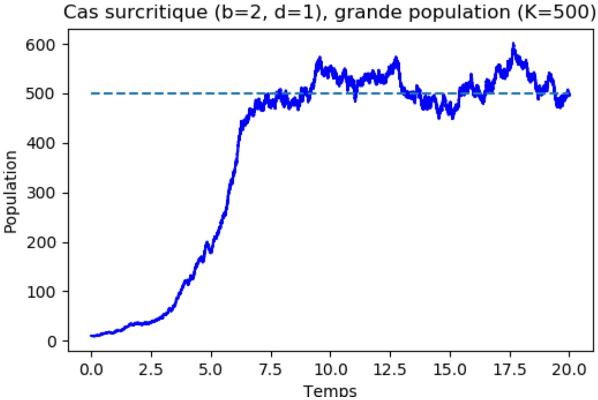
Ecole d'Aussois, chaire MMB, 15 septembre 2020

Cas modèle : naissance et mort logistique

Processus markovien $(N^K(t))_{t\in\mathbf{R}_+}$ à valeurs dans $\mathbf{N}$, de transitions

$$\begin{array}{lcl} n \to n+1 & \text{à taux} & bn \\ n \to n-1 & & n(d+n/K) \end{array}$$

où $b > d > 0$, et $K > 0$ est un paramètre d'échelle réglant l'intensité de la compétition.



Cas modèle : naissance et mort logistique

Que sait-on dire en grande population (K grand) ?

Supposons $N^K(0) = \lfloor K x_0 \rfloor$, fixons $T > 0$. On pose $X^K = N^K / K$.

- **Loi des grands nombres** : p.s. uniformément sur $[0, T]$

$$X^K \underset{K \to +\infty}{\to} x,$$

où $\dot{x} = x(b - d - x)$, $x(0) = x_0$.

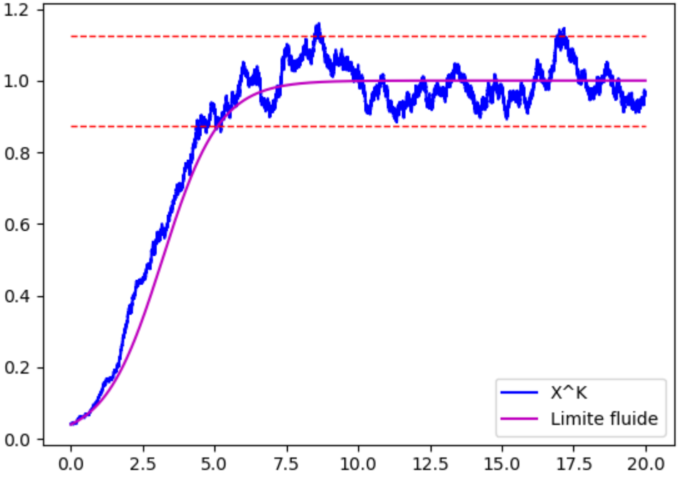
- **TCL** : dans $D([0, T])$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, on a la convergence en loi

$$\sqrt{K}(X^K - x) \Rightarrow U$$

où U est un processus gaussien.

De plus $U(t) \Rightarrow \mathcal{N}(0, b)$.

Cas modèle : naissance et mort logistique



Cas modèle : naissance et mort logistique

Que sait-on dire sur le comportement en temps grand ? L'approximation gaussienne reste-t-elle valide ?

Le processus X^K s'éteint presque sûrement, $\mathbf{E}\left(\tau_0^K\right) \simeq e^{CK}$ (Chazottes, Collet et Méléard, 2016).
Le processus $x + U/\sqrt{K}$ atteint 0 en un temps d'ordre $e^{C'K}$ où $C' \neq C$.

Plus généralement : l'approximation gaussienne ne décrit pas correctement les grandes déviations.

D'un autre côté : pour $\log(K) \ll t \ll e^{CK}$, la loi de $\sqrt{K}(X^K(t) - (b-d))$ est proche de la gaussienne $\mathcal{N}(0,b)$.

Question : Etant donné $\varepsilon(K) \ll 1$, pour quelles échelles de temps $T(K)$ peut-on écrire

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq T(K)} \left\| X^K(t) - x(t) - U(t)/\sqrt{K} \right\| \leq \varepsilon(K)\right) \underset{K \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

... pour un couplage (X^K, U) à définir ?

Processus de Markov densité-dépendants

Soit $(N^K)_{K>0}$ une famille de processus de Markov à valeurs dans $\mathbf{N}^d$. On suppose que les transitions de N^K sont de la forme

$$n \to n + e \text{ à taux } K\beta_e(n/K),$$

pour e parcourant un ensemble fini E.

Exemples :

- processus de naissance et mort logistique, $d = 1$ $E = \{-1, +1\}$, $\beta_1(x) = bx$, $\beta_{-1}(x) = x(d + x)$.
- modèles d'épidémie, par exemple le SIRS $N^K = (S^K, I^K)$ avec

$$(s,i) \to \begin{cases} (s-1, i+1) & \text{à taux } \alpha si/K \text{ (infection)} \\ (s, i-1) & \beta i \text{ (guérison)} \\ (s+1, i) & \gamma(K - i - s) \text{ (perte d'immunité)} \end{cases}$$

- réseaux de réactions chimiques, Lotka-Volterra, etc.

Cadre général

TCL : Supposons $N^K = \lfloor K x_0 \rfloor$, fixons $T > 0$. On pose $X^K = N^K / K$:

$$\sqrt{K}(X^K - x) \Rightarrow U \text{ dans } \left(D([0,T], \mathbf{R}^d), \|\cdot\|_\infty\right)$$

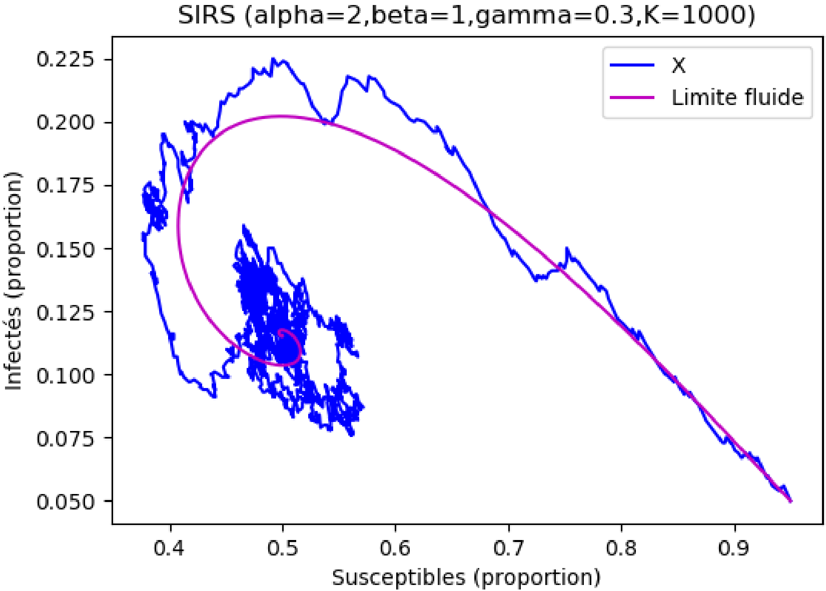
où $\dot{x} = F(x) := \sum_{e \in E} \beta_e(x) e$ et U est gaussien.

Question : Etant donné $\varepsilon(K) \ll 1$, pour quelles échelles de temps $T(K)$ peut-on écrire

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0 \le t \le T(K)} \left\| X^K(t) - x(t) - U(t)/\sqrt{K} \right\| \le \varepsilon(K)\right) \underset{K \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

... pour un couplage (X^K, U) à définir ?

Hypothèse : F admet un point d'équilibre x_* exponentiellement stable, x_0 appartient à son bassin d'attraction


SIRS (alpha=2,beta=1,gamma=0.3,K=1000)
X
Limite fluide
Infectés (proportion)
Susceptibles (proportion)
0.225
0.200
0.175
0.150
0.125
0.100
0.075
0.050
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9

On suppose β_e de classe C^2 et $\sqrt{\beta_e}$ Lipschitz au voisinage de la trajectoire de la limite fluide x.

Théorème (P.)

Il existe un couplage $\left(X^K, U\right)$ et des constantes $C, V, \alpha > 0$ telles que, pour tout $\varepsilon : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*$ tel que $\alpha \log(K)/K \leq \varepsilon(K) \ll 1$, pour tout K assez grand et tout $t \geq 0$,

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} \left\| X^K(s) - x(s) - \frac{U(s)}{\sqrt{K}} \right\| > \varepsilon(K) \right) \leq \frac{C(t+1)}{\exp\left(V K \varepsilon(K)\right)}.$$

Précision $\varepsilon(K)$	Echelle de temps
$\delta/\sqrt{K}$	$\exp(V\delta\sqrt{K})$
$\alpha \log(K)/K$	$K^{V\alpha}$
$K^{-p},\ 0 < p < 1/2$	$\exp(VK^{1-p})$

L'échelle $\exp(VK\varepsilon(K))$ est celle des déviations modérées

$$\inf\left\{t \geq 0 : \|X^K(t) - x(t)\| \geq c\sqrt{\varepsilon(K)}\right\}$$

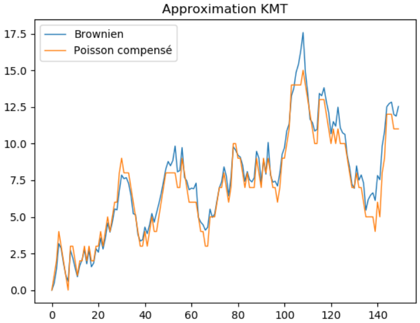
Construction du couplage

Théorème (Komlós, Major, Tusnády, 1976)

Il existe un couplage entre un processus de Poisson P et un mouvement brownien B, et des constantes $a, b, c > 0$, tels que pour tout $t \geq 1$:

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\leq s\leq t} |P(s) - s - B(s)| \geq c\log(t) + x\right) \leq ae^{-bx}.$$

(alors $|P(n) - B(n)| = \mathcal{O}(\log(n))$ p.s.)



Construction du couplage

On peut construire les processus comme suit (Kurtz) :

$$
\begin{aligned}
X^K(t) &= x_0 + \frac{1}{K}\sum_{e\in E} P_e\left(\int_0^t K\beta_e(X^K(s))\mathrm{d}s\right)e \\
&= x_0 + \int_0^t F(X^K(s))\mathrm{d}s + \frac{1}{K}\sum_{e\in E}\tilde{P}_e\left(\int_0^t K\beta_e(X^K(s))\mathrm{d}s\right)e \\
Y^K(t) &= x_0 + \int_0^t F(Y^K(s))\mathrm{d}s + \frac{1}{K}\sum_{e\in E} B_e\left(\int_0^t K\beta_e\left(Y^K(s)\right)\mathrm{d}s\right)e \\
&= x_0 + \int_0^t F(Y^K(s))\mathrm{d}s + \frac{1}{\sqrt{K}}\sum_{e\in E}\left(\int_0^t \sqrt{\beta_e\left(Y^K(s)\right)}\,\mathrm{d}W_e(s)\right)e, \\
U(t) &= \int_0^t F'(\varphi(s))U(s)\mathrm{d}s + \sum_{e\in E}\left(\int_0^t \sqrt{\beta_e\left(\varphi(s)\right)}\,\mathrm{d}W_e(s)\right)e,
\end{aligned}
$$

où les (P_e, B_e) sont des couplages KMT indépendants

Construction du couplage

Mieux : pour $j \leq t \leq j+1$,

$$X^K(t) = X^K(j) + \int_j^t F(X^K(s))\mathrm{d}s + \frac{1}{K}\sum_{e\in E} P_{e,j}\left(\int_j^t K\beta_e(X^K(s))\mathrm{d}s\right) e$$

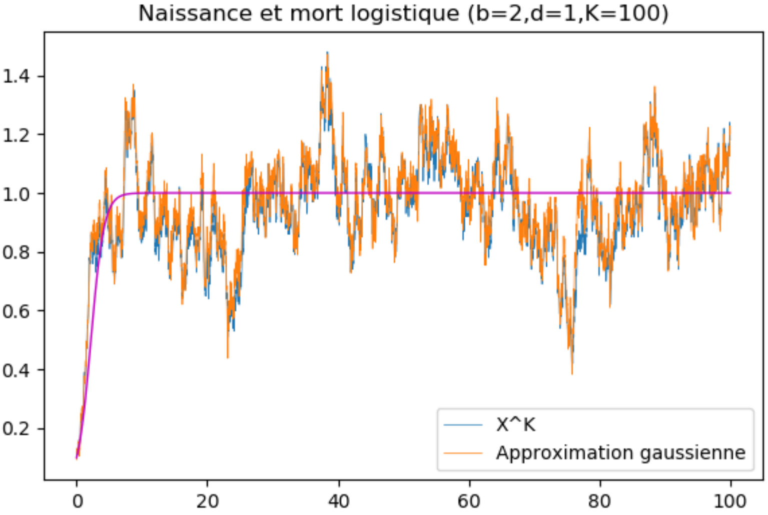
$$Y^K(t) = Y^K(j) + \int_j^t F(Y^K(s))\mathrm{d}s + \frac{1}{K}\sum_{e\in E} B_{e,j}\left(\int_j^t K\beta_e\left(Y^K(s)\right)\mathrm{d}s\right) e$$

où les $(P_{e,j}, B_{e,j})$ sont des couplages KMT Poisson-Brownien indépendants.

Deux influences antagonistes :

- L'écart Poisson-Brownien tend à écarter X^K et Y^K (de l'ordre de $\log(K)/K$)
- L'influence du champ F au voisinage de l'équilibre x_* rapproche les trajectoires, tuant les erreurs

Pour obtenir un écart $\varepsilon(K) \gg \log(K)/K$, il faut attendre un "mauvais tirage" (un mauvais couplage KMT).


Naissance et mort logistique (b=2,d=1,K=100)
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
20
40
60
80
100
X^K
Approximation gaussienne

Quelques conséquences :

- approximation du passé de la trajectoire d'un PNM logistique conditionné à survivre en temps grand par un processus gaussien
- à propos des déviations modérées (Pardoux, 2020)

$$\begin{aligned}\inf\left\{t \geq 0 : \|X^K(t) - x(t)\| \geq \eta(K)\right\} &\simeq \inf\left\{t \geq 0 : \|U(t)\| \geq \sqrt{K}\eta(K)\right\} \\ &\simeq e^{V' K \eta^2(K)}\end{aligned}$$

- approximation gaussienne de quantités intégrales $\int_0^{T(K)} I^K(s)\mathrm{d}s \ldots$

Merci !