Le REPLICATOR - MUTATOR

'30 $\boxed{\text{Fisher}}$ "The genetical theory of natural selectᵒ"
↳ stats + bio ! formalisme selectᵒ naturelle, selectᵒ sexuelle (paon) etc...

'32 $\boxed{\text{Haldane}}$: "The Causes of Evolutᵒ"
↳ pop. genetics, Chapter "What is fitness ?" ..

⋮

'65 $\boxed{\text{Kimura}}$: "A stochastic model concerning the maintenance of genetics variability in quantitative characters"
↳ eq diffusᵒ, derive génétique ...

$t > 0$

$x \in \mathbb{R}^N$ espace phenotypique
($N=1$ souvent)

$u(t,\cdot)$ densité de proba du trait x

$\boxed{\text{Replicator :}}$

$$u_t = u\,\overbrace{\big(W(x) - \overline{W}(t)\big)}^{\text{fitness relative}}$$

Rq : masse conservée ($\mathcal{Q}$ + tard)

signifie $\frac{\partial u}{\partial t}$

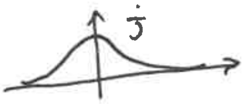
fitness

ex :

fitness moyenne

$$\overline{W}(t) = \int W(y)\,u(t,y)\,dy$$

(parfois notée $\overline{u}(t)$)



$\boxed{\text{Mutator :}}$ J densité probas sur $\mathbb{R}^N$

$x \rightsquigarrow x+y$ avec proba $J(y)$

(Rq : je mets beaucoup de ctes $= 1$)

$$u_t = \underbrace{\int J(x-y)\,u(t,y)\,dy}_{\text{arrivent en } x} - \underbrace{\int J(y-x)\,u(t,x)\,dy}_{\text{partent de } x}$$

$$= \int J(x-y)\,u(t,y)\,dy - u(t,x)$$

$$= J * u(t,\cdot) - u$$

Rq : évidemment les "individus" sont conservés

RM :
$$\boxed{u_t = (J*u - u) + u\left(W(x) - \overline{W}(t)\right) \qquad \begin{matrix} t>0 \\ x\in\mathbb{R}^N \end{matrix}}$$

Approx diffusive :

$$J(y) \leftarrow \frac{1}{\varepsilon} J\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$$

$$J_\varepsilon * u - u = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon} J\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \left(u(t, x-y) - u(t,x)\right) dy$$

$$\frac{y}{\varepsilon} = z$$

$$= \int_{\mathbb{R}} J(z) \left(u(t, x - \varepsilon z) - u(t,x)\right) dz$$

Taylor $\approx \int J(z) \left(- \varepsilon z\, u_x(t,x) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 z^2 u_{xx}(t,x)\right) dz$

$$\approx \left(\frac{1}{2}\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}} z^2 J(z) dz\right) u_{xx} - \underbrace{\left(\varepsilon \int_{\mathbb{R}} z J(z) dz\right)}_{= 0 \text{ si } J \text{ pair}} u_x$$

$$\approx \mathrm{cste}_\varepsilon\, u_{xx}$$

RM diffusif

$$\boxed{u_t = \underbrace{\Delta u}_{= u_{xx} \text{ si } N=1} + u\left(w(x) - \overline{w}(t)\right) \qquad \begin{matrix} t>0 \\ x\in\mathbb{R}^N \end{matrix}}$$

---

puis Lande '75, Fleming '79, Bürger 80-90

+ Récemment Alfaro, Bansaye, Cloez, Gabriel, Hamel, Kaviani, Martin, Mirrahimi, Patout, Roques, Vermete...

Derivato of RM from IBM:

Fournier, Méléard '04

Champagnat, Ferrière, Méléard '08

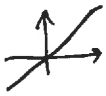
Wakano, Funaki, Yokoyama '17

On regarde donc :

$$\text{RM} \quad \boxed{u_t = \text{Mut}\, u + u\left(w(x) - \overline{w}(t)\right) \qquad \underline{N=1}}$$

avec

$$\text{Mut}\, u \begin{cases} \nearrow u_{xx} \text{ (diffusif)} \\ \searrow J * u - u \text{ (non local)} \end{cases}$$

$w(x)$ $\nearrow$ x  (cf Tsimring et al '96)

$\rightarrow$ $-x^2$ 

$\searrow$ confinante ie $w(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} -\infty$ 

$\underline{\underline{\text{Rq}}}$: $m(t) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\,dx$

En "intégrant RM :

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dt} = \overline{w}(t)\left(1 - m(t)\right) \\ m(0) = 1 \end{cases} \quad \text{"}\Longrightarrow\text{"} \quad m(t) \equiv 1 \qquad \text{MASSE CONSERVÉE}$$

$\uparrow$ car u_0 densité proba.

$\underline{\underline{\text{Rq}}}$: c'est un "Gronwall" pas un "Cauchy Lipschitz" cf plus tard...

1 Sol. gaussiennes (diffusif + $\left\{\begin{matrix} x \\ \text{ou} \\ -x^2 \end{matrix}\right.$)

$$u(t,x)=\sqrt{\frac{a(t)}{2\pi}}\; e^{-a(t)\frac{(x-m(t))^2}{2}}$$

$m(t)$ = moyenne

$\frac{1}{a(t)} = V(t)$ = variance

(1) $u_t = \frac{\dot a}{2a} u + u\left(-\frac{\dot a (x-m)^2}{2} + a\dot m (x-m)\right)$

(2) $u_x = -a(x-m)u$

(3) $u_{xx} = -au + a^2(x-m)^2 u$

1.1 $\boxed{W(x)=x \quad \text{ie} \quad u_t = u_{xx} + u(x-\bar{x})}$

On met (1) ici, (3) ici, m ici puis on égalise les termes en x^2, en x et en x^0. On arrive à :

x^2 : $-\frac{\dot a}{2} = a^2$

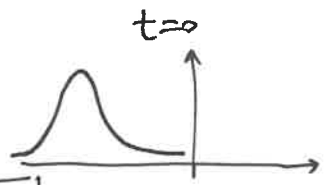
x : $\cancel{m\dot a} + a\dot m = -\cancel{2a^2}m + 1$

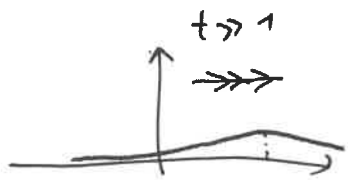
x^0 : $\cancel{\frac{\dot a}{2a}} - \cancel{\frac{\dot a m^2}{2}} - am\dot m = \cancel{-a} + \cancel{a^2m^2} - m$

c'est les mêmes !

$\boxed{\frac{1}{a(t)} = \frac{1}{a_0} + 2t}$ ie $\boxed{V(t) = V_0 + 2t}$

$\dot m(t) = \frac{1}{a_0} + 2t$ ie $\boxed{m(t) = t^2 + V_0 t + m_0}$





$V(t) \underset{+\infty}{\sim} 2t$ APLATISSEMENT

$m(t) \underset{+\infty}{\sim} t^2$ FUITE A L'INFINI EN ACCELERANT

1.2 $\boxed{W(x) = -x^2 \quad \text{i.e} \quad u_t = u_{xx} + u(-x^2 + \overline{x^2})}$

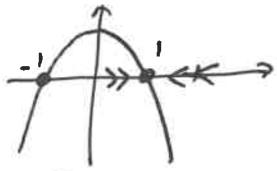
$V + m^2 = \frac{1}{a} + m^2$

Idem ci-dessus, on arrive à :

$\dot{a} = 2(1 - a^2)$ qu'on peut résoudre explicitement mais

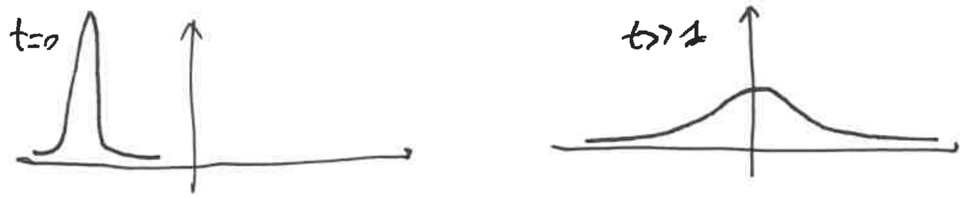
ttes les sol. positives vérifient

$\boxed{a(t) \xrightarrow{t \to +\infty} 1}$ car



$\frac{\dot{m}}{m} = -\frac{2}{a}$ ie $\boxed{m(t) = m_0 e^{-2\int_0^t \frac{ds}{a(s)}} \xrightarrow{t \to +\infty} 0}$ (car $a(t) \to 1$)

Bilan $V(t) \to 1$
$m(t) \to 0$ $\boxed{\text{STABILISATION et CENTRAGE}}$



2 Sol. explicites (non gaussiennes) (diffusif + $\begin{cases} x \\ \text{ou} \\ -x^2 \end{cases}$)

<u>Lemme 1</u> $\boxed{u_t = u_{xx} + u(W(x) - \bar{u}(t)) \iff v_t = v_{xx} + W(x) v}$

"<u>Proof</u>": $\Rightarrow$ $\boxed{v(t,x) = u(t,x)\, e^{\int_0^t \bar{u}(s)ds}}$

et c'est "inversible" car, en multipliant par $W(x)$ puis intégrant :

$$\bar{v}(t) = \bar{u}(t)\, e^{\int_0^t \bar{u}(s)ds}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(e^{\int_0^t \bar{u}(s)ds}\right) \Rightarrow \int_0^t \bar{v}(s)ds = e^{\int_0^t \bar{u}(s)ds} - 1$$

et donc

$$\boxed{u(t,x) = \frac{v(t,x)}{1 + \int_0^t \bar{v}(s)ds} = \frac{v(t,x)}{m_v(t)}}$$ avec $m_v(t) = \int_{\mathbb{R}} v(t,y)dy$

En effet $\frac{d}{dt} m_v(t) = \bar{v}(t)$ par l'éq sur v

donc $m_v(t) = 1 + \int_0^t \bar{v}(s)ds$

2.1 $W(x) = x$

<u>Lemme 2</u> $\boxed{v_t = v_{xx} + xv \iff w_t = w_{xx}}$

"<u>Proof</u>" : $\boxed{v(t,x) = w(t, x + t^2)\, e^{tx + \frac{t^3}{3}}}$ cf Avron-Herbst formula en méca. quantique

En combinant Lemme 1 et Lemme 2 on a :

Th

$$u_t = u_{xx} + u(x-\bar{x}(t))$$

$$\hookrightarrow u(t,x) = \frac{e^{tx}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-(x+t^2-y)^2/4t}\, u_0(y)\,dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{ty}\, u_0(y)\,dy}$$

as long as denominator $< +\infty$

$$\tilde{u}(t) = t^2 + \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{ty}\, y\, u_0(y)\,dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{ty}\, u_0(y)\,dy}$$

Cor: Extinction for heavy tails

$u_0(y) \underset{+\infty}{\sim} e^{-\alpha y} \Rightarrow u \equiv 0$ at $T=\alpha$

$u_0(y) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{y^\alpha} \Rightarrow u \equiv 0$ immédiatement

Cor u_0

$$\Rightarrow \sup_x \left| u(t,x) - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{(x-t^2)^2}{4t}}} \right| \le \frac{C}{t}$$

c'est la gaussienne qui fuit et s'aplatit trouvée en ①.

Elle est aussi obtenue en mettant $u_0(y) = \delta_0(y)$ dans la formule $u(t,x)$ du Th.

Ref: Alfaro, Carles 2014

2.2 $\boxed{W(x) = -x^2}$

<u>Lemme 2'</u> $v_t = v_{xx} - x^2 v \iff w_t = w_{xx}$

<u>"Proof"</u> $$v(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} 2t}}\, e^{-\frac{\operatorname{th} 2t}{2} x^2}\, w\left(\frac{\operatorname{th} 2t}{2}, \frac{x}{\operatorname{ch} 2t}\right)$$ cf Lens transform

<u>Th.</u> [[Sol. explicite globale (in contrast with 2.1)

<u>Cor</u> [[$$\sup_x \left| \underbrace{v(t,x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi \operatorname{th} 2t}}\, e^{-\frac{1}{2 \operatorname{th} 2t} x^2}} \right| \leq \frac{C}{\operatorname{sh} 2t}$$

$\downarrow \approx$

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

c'est la gaussienne centrée
et "stabilisée" trouvée en (1)

<u>Réf</u> Alfaro, Carles 2017

<u>Bilan:</u> Diffusion et $W(x) = \begin{cases} x \\ \text{ou} \\ -x^2 \end{cases}$ <u>OK</u>!

Tout est EXPLICITE !!!!

Extinction / Aplatissement (x) vs. cv to steady state ($-x^2$)

③ Approche CGF

$$m_n(t) := \int x^n u(t,x)\,dx$$

Fct° gén. des moments

Transfo Laplace

$u(t,x)$

$u(t,\cdot)$ densité proba

$$\longrightarrow \text{MGF} \quad M(t,z) := \mathbb{E}\left[e^{zX}\right] = \int_{\mathbb{R}} e^{zx} u(t,x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \sum_n \frac{z^n x^n}{n!} u(t,x)\,dx$$

$$= \sum_n \frac{m_n(t)}{n!} z^n$$

$$\Rightarrow \boxed{m_n(t) = \frac{d^n}{dz^n} M(t,z)\Big|_{z=0}}$$

Fct° gén. des cumulants

$$\boxed{\text{CGF}} \quad \boxed{C(t,z) := \ln M(t,z) = \ln \int_{\mathbb{R}} e^{zx} u(t,x)\,dx} \qquad t>0, \; z \in \mathbb{R}$$

Disons $\boxed{u_t = \mathrm{Mut}(u) + u\,(x - \bar{x}).}$

$$(1) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\int e^{zx} u_t}{\int e^{zx} u} = \frac{\int e^{zx}\, \mathrm{Mut}\, u}{\int e^{zx} u} + \frac{\int e^{zx} x u}{\int e^{zx} u} - \bar{x}$$

$$(2) \quad \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\int e^{zx} x u}{\int e^{zx} u}$$

et en particulier $\dfrac{\partial C}{\partial z}(t, z=0) = \dfrac{\int xu}{\int u} = \bar{x}$ = moyenne

$$(3) \quad \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = \frac{\int e^{zx} x^2 u}{\int e^{zx} u} - \left(\frac{\int e^{zx} x u}{\int e^{zx} u}\right)^2$$

et en part $\dfrac{\partial^2 C}{\partial z^2}(t, z=0) = \int x^2 u - \left(\int xu\right)^2$

= Variance

(1) et (2) donnent :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial z}(z=0) + \frac{\int e^{zx} \cancel{\mathrm{Mot}}\, u}{\int e^{zx} u}.$$

$\boxed{3.1 \quad \cancel{\mathrm{Dept}}\, u = u_{xx}}$ Diffusion

$$\frac{\int e^{zx} u_{xx}}{\int e^{zx} u} \overset{2\,\mathrm{IPP}}{=} \frac{\int z^2 e^{zx} u}{\int e^{zx} u} = z^2$$

$$\boxed{C_t = C_z - C_z(z=0) + z^2} \qquad (\star)$$

EDP d'ordre 1
Loi conservation
non locale avec source

$+$ CI $\quad C(0,z) = \ln \int e^{zx} u_0(x)\,dx =: C_0(z)$

$+$ CB en $z=0$ $\quad C(t,0) = \ln 1 = 0$

$$\begin{cases} C_t = C_z - C_z(z=0) + z^2 & t>0,\ z>0 \\ C(t,0) = 0 & z=0 \\ C(0,z) = C_0(z) & t=0 \end{cases}$$

Méthode des caractéristiques : Pour $t>0$, $z>0$ donnés (pt cible)

$$\psi(s) := C(t+s, z-s) \qquad -t \le s \le z$$

$$\psi'(s) = C_t(t+s, z-s) - C_z(t+s, z-s)$$

$$= \beta(z-s) - C_z(t+s, 0)$$

disons $\beta(z) = z^2$

qu'on intègre de $s=-t$ à $s=0$:

$$C(t,z) - C_0(z+t) = \int_{-t}^{0} \beta(z-s)\,ds - \int_{-t}^{0} C_z(t+s,0)\,ds$$

$$= \int_0^t \beta(z+s)\,ds - \int_0^t C_z(s,0)\,ds$$

$$C(t,z) = C_0(z+t) + \int_0^t \beta(z+s)\,ds - \int_0^t C_z(s,0)\,ds \qquad (*)$$

IMPLICITE mais

$$\partial_z C = C_0'(z+t) + \beta(z+t) - \beta(z)$$

qu'on évalue en $z=0$:

$$C_z(z=0) = C_0'(t) + \beta(t) - \cancel{\beta(0)}$$ qu'on replonge dans $(*)$:

$$C(t,z) = C_0(z+t) + \int_0^t \beta(z+s)\,ds - \int_0^t \left(C_0'(s) + \beta(s)\right) ds$$

ie $$\boxed{C(t,z) = C_0(z+t) - C_0(t) + \int_0^t \left(\beta(z+s) - \beta(s)\right) ds}$$

$C(t,z)$ nous intéresse pas... ce qu'on veut c'est $\left.\frac{\partial C}{\partial z}\right|_{z=0}$, $\left.\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right|_{z=0}$ ...

$$\frac{\partial C}{\partial z} = C_0'(z+t) + \beta(z+t) - \beta(z) \xRightarrow{z=0} \boxed{\text{moyenne} = C_0'(t) + \beta(t)} = C_0'(t) + t^2$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = C_0''(z+t) + \beta'(z+t) - \beta'(z) \xRightarrow{z=0} \boxed{\text{variance} = C_0''(t) + \beta'(t)} - \cancel{\beta'(0)} = C_0''(t) + 2t$$

cf 1.1 et 2.1

Effet distribution initiale

Effet mutation

mais tout ça on le savait déjà....

$$\boxed{3.2 \quad \partial_t u = J * u - u} \quad NL$$

$$\int_x e^{zx} (\dot{J} * u)\, dx = \int_x e^{zx} \int_y \dot{J}(x-y)\, u(t,y)\, dy\, dx$$

$$= \int_y u(t,y)\, e^{zy} \left(\int_x \dot{J}(x-y)\, e^{z(x-y)}\, dx \right) dy$$

$$\shortparallel \quad \int_\theta \dot{J}(\theta) e^{z\theta}\, d\theta =: M(z)$$

c'est la MGF du noyau $\dot{J}$

$$= M(z) \int_x u(t,x)\, e^{zx}\, dx$$

et $(\star)$ devient :

$$C_t = C_z - C_z(z=0) + \underbrace{M(z) - 1}_{=\beta(z)}$$

et ok !

$$\boxed{\begin{aligned} m(t) &= C_0'(t) + \beta(t) \\ V(t) &= C_0''(t) + \beta'(t) - \beta'(0) \end{aligned}}$$

Recall that ds le cas diffus $\quad m(t) \longrightarrow +\infty$, $\quad V(t) \longrightarrow +\infty$

Prenons $u_0 = \delta_{m_0}$

$$C_0'(z) = \frac{\int x e^{zx} u_0}{\int e^{zx} u_0} = \frac{m_0 e^{zm_0}}{e^{zm_0}} = m_0 .$$

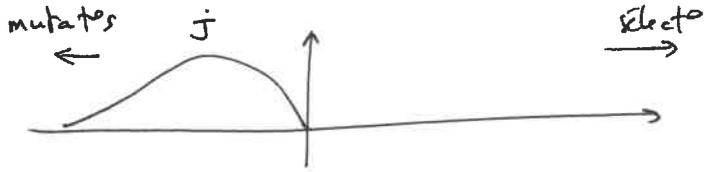
$$C_0''(z) = \frac{\int x^2 e^{zx} u_0}{\int e^{zx} u_0} - (\quad)^2 = m_0^2 - m_0^2 = 0 .$$

$$\beta(t) = -1 + \int \dot{J}(\theta) e^{t\theta}\, d\theta \quad \xrightarrow{t \to +\infty} -1$$

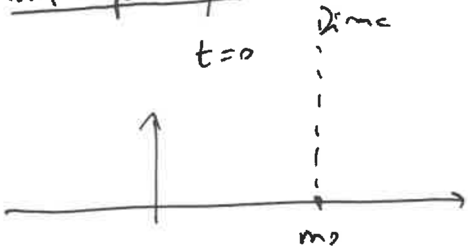
Si $\operatorname{Supp} \dot{J} \subset (-\infty, 0]$ ie ttes les mutations sont délétères et ds ce cas $V(t) \to$ cte > 0

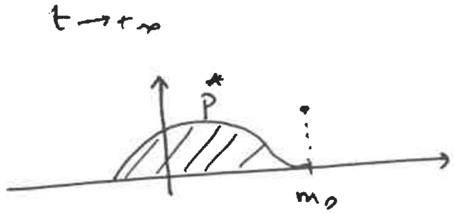
$$\beta(t) \xrightarrow{t \to +\infty} +\infty$$

Si $\operatorname{Supp} \dot{J} \cap (0, +\infty) \neq \emptyset$ ie $\exists$ mutations bénéfiques et ds ce cas $V(t) \longrightarrow +\infty$



<u>Conditos pour que</u>:





$$p_\infty = \rho\,\delta_{m_0} + (1-\rho)\, p^*$$

mesure supportée dans $(-\infty, m_0)$

<u>Ref</u>: Gil, Hamel, Martin, Roques 2017 SIAM J. Appl. Math.

———————— 2019 Nonlinearity

<u>Rq</u>: CGF + Avron.-Herbst in

A., Vernete 2020 DCDS B.

4. CAS CONFINANT "général"

4.1 Cas linéaire local : $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\mu^2}{2} \Delta u + W(x) u$

Hyp : $\boxed{W(x) \xrightarrow{x \to \pm\infty} -\infty \quad \text{Fitness confinante}} + W < 0$

$u(t,x) \leftarrow \varphi(x) e^{-\lambda t}$ donne $-\dfrac{\mu^2}{2} \Delta \varphi - W(x)\varphi = \lambda \varphi$ pb valeur propre fct propre

on $*\ \varphi$ puis $\int$ et :

$$\frac{\mu^2}{2}\int |\nabla \varphi|^2 - \int W(x)\varphi^2 = \lambda \int \varphi^2$$

Prop :

$$\lambda := \operatorname{Min} \quad \Phi(\psi) := \frac{\mu^2}{2}\int |\nabla\psi|^2 - \int W(x)\psi^2$$

$\psi \in H^1$

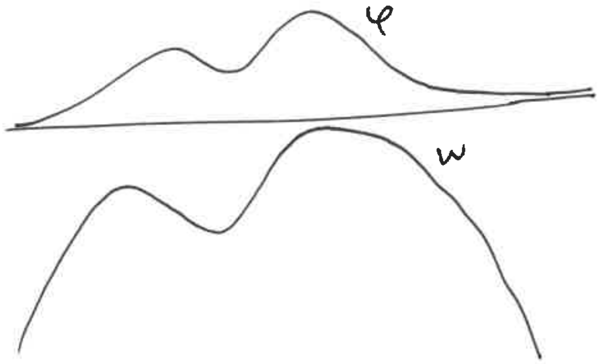
$\psi \in L^2_W := \{\psi,\ x \mapsto \sqrt{-W(x)}\,\psi(x) \in L^2\}$

$\int \psi^2 = 1$

Minimum atteint en $\varphi > 0$ $\leftarrow$ unique positive fct propre (et $-\varphi < 0$)

$$-\frac{\mu^2}{2}\Delta\varphi - W(x)\varphi = \lambda\varphi$$

De +, $\varphi > 0$, $\varphi \in H^1 \cap L^2_W$, $\int \varphi^2 = 1$ $\quad + \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ (et même décroissance exponentielle en $\pm\infty$)



De + Survie "$\Longleftrightarrow$" $\lambda \leqslant 0$

Rq: $-\frac{\mu^2}{2}\Delta - W(x)$: $\exists$ BON (ds L^2) de $\vec{vp}$:

$$\lambda_0 = \lambda < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$
$$\varphi_0 = \varphi \quad \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dots$$

$$\hookrightarrow \quad u(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{-\lambda_k t} \varphi_k(x) \qquad \text{avec } a_k = \langle \varphi_k, u_0 \rangle$$

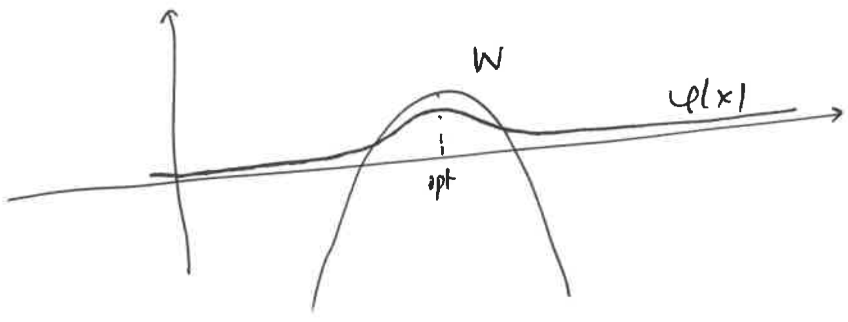
$$\Rightarrow \quad u(t,\cdot) - a_0 \phi_0 \xrightarrow{t \to +\infty} 0 \quad \text{dans } L^p_{1 \leq p \leq +\infty}$$

cf A. Venuete 2019 J. Dynamics Diff. Eq.

$\boxed{\text{ex quadratique:}}$ $W(x) = r_{max} - \underset{\text{pression de sélect}^\circ}{\alpha} \frac{(x-opt)^2}{2}$

$$\varphi(x) = C e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{2\mu}(x-opt)^2}$$

$\lambda = \frac{\mu}{2}\sqrt{\alpha} - r_{max}$ qu'on veut < 0 si μ pt (Fardeau de mutat°)
α pt (peu de pression)
r_{max} gd



$\boxed{\text{4.2 Cas linéaire non local}}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\mu^2}{2}\left(J * u - u\right) + W(x)u$$

Le ground state peut être une mesure singulière (avec atomes)
phénomènes de concentration

cf Bürger 88
Bürger - Bomze 96
Coville et al 10, 13, 17
Griette 19
A., Gabriel, Kavian soon in DCDS B

5) RM PATCH - MODEL

1 pathogène s'adaptant sur H ~~hôtesse~~ épidémio
ou 1 pop ———— H environnements agroécologie

$\boxed{H=1}$ $\partial_t u = \frac{\mu^2}{2}\Delta u + u\left(r(x) - \cancel{\text{compét.}}\right)$ $r(x) = r_{max} - \alpha\frac{\|x-O\|^2}{2}$

$O \in \mathbb{R}^N$ le trait optimal pour vivre dans cet hôte

$$\lambda_1 = \frac{\mu n}{2}\sqrt{\alpha} - r_{max}$$

$$\varphi(x) = C\exp\left(-\frac{\sqrt{\alpha}}{2\mu}\|x-O\|^2\right)$$

$\boxed{H=2}$

$$\begin{cases} \partial_t u_1 = \frac{\mu^2}{2}\Delta u_1 + r_1(x)\,u + \delta(u_2 - u_1) \\ \partial_t u_2 = \frac{\mu^2}{2}\Delta u_2 + r_2(x)\,u + \delta(u_1 - u_2) \end{cases}$$

$$r_i(x) = r_{max} - \alpha\frac{\|x - O_i\|^2}{2}$$

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, bend right, "\delta"'] & H_2 \arrow[l, bend right, "\delta"'] \end{tikzcd}$$

Eléments propres:

$$\begin{cases} -\frac{\mu^2}{2}\Delta\varphi_1 - r_1(x)\varphi_1 - \delta(\varphi_2 - \varphi_1) = \lambda_2\varphi_1 \\ -\frac{\mu^2}{2}\Delta\varphi_2 - r_2(x)\varphi_2 - \delta(\varphi_1 - \varphi_2) = \lambda_2\varphi_2 \end{cases}$$

$$\lambda_2 = \inf_{\int \psi_1^2 + \psi_2^2 = 1}\left(\frac{\mu^2}{2}\int|\nabla\psi_1|^2 + |\nabla\psi_2|^2 - \int r_1(x)\psi_1^2 - \int r_2(x)\psi_2^2 + \delta\int(\psi_1 - \psi_2)^2\right)$$

Ceci est $\geq$ $\underbrace{\lambda_1\int\psi_1^2 + \lambda_1\int\psi_2^2}_{\text{par le Q. de Rayleigh de } \lambda_1} + \delta\int(\psi_1 - \psi_2)^2$

$$\lambda_1'' + \delta\iint(\psi_1 - \psi_2^*)^2$$

Donc $\lambda_1 \leq \lambda_2$ et $\boxed{\lambda_1 < \lambda_2 \text{ dès que } O_1 \neq O_2}$

Diversificat° $\Rightarrow$ spécialisat° du pathogène cf Hamel, Lavigne, Roques 2021 J. Math. Biology

$\boxed{M=3}$ slides...

6 $\boxed{\text{MODELES ECO-EVO}}$

slides...