

Propagation dans une équation de réaction-diffusion

Nathanaël Boutillon

Directeurs de thèse :

Raphaël Forien, Lionel Roques (BioSP), François Hamel (I2M)

BioSP, Inrae

I2M, Aix-Marseille Université

École d'Aussois – 13 juin 2023

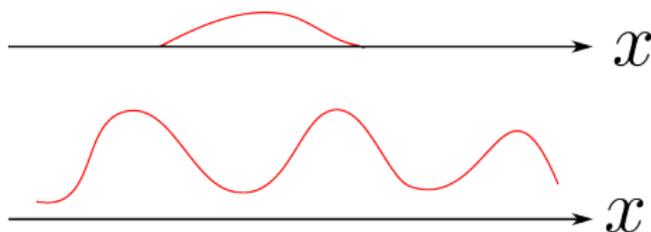


Equation de Fisher-KPP

$u(t, x)$: quantité d'individus

$$\begin{aligned} \text{Évolution} &= \text{mouvements} + \text{démographie-compétition} \\ \partial_t u(t, x) &= \Delta u + (r(x) - u)u \end{aligned}$$

Environnement hétérogène :

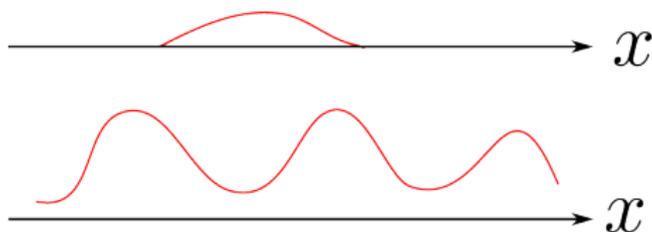


Equation de Fisher-KPP

$u(t, x)$: quantité d'individus

$$\begin{aligned} \text{Évolution} &= \text{mouvements} + \text{démographie-compétition} \\ \partial_t u(t, x) &= \Delta u + (r(x) - u)u \end{aligned}$$

Environnement hétérogène :

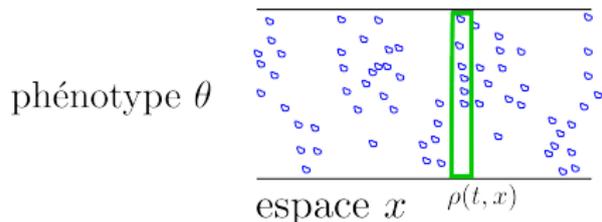


Origine : Fisher (1937), Kolmogorov, Petrovski et Piskounov (1937)

Ajout d'une variable phénotypique

$$u(t, x) \rightarrow u(t, x, \theta), \quad \theta \in [0, 1]$$

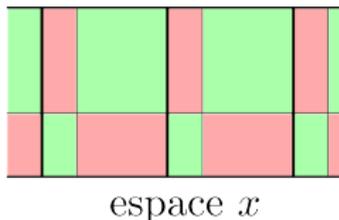
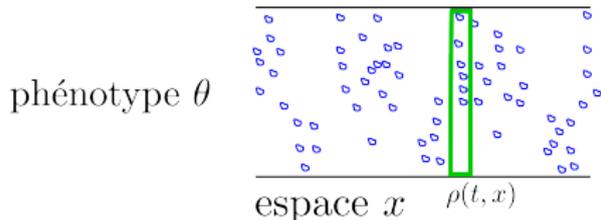
$$\begin{aligned} \text{Évolution} &= \text{mouvements} + \text{mutations} + \text{démographie-compét.} \\ \partial_t u(t, x, \theta) &= \Delta_x u + \Delta_\theta u + (r(x, \theta) - \rho)u \end{aligned}$$



Ajout d'une variable phénotypique

$$u(t, x) \rightarrow u(t, x, \theta), \quad \theta \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned} \text{Évolution} &= \text{mouvements} + \text{mutations} + \text{démographie-compét.} \\ \partial_t u(t, x, \theta) &= \Delta_x u + \Delta_\theta u + (r(x, \theta) - \rho)u \end{aligned}$$

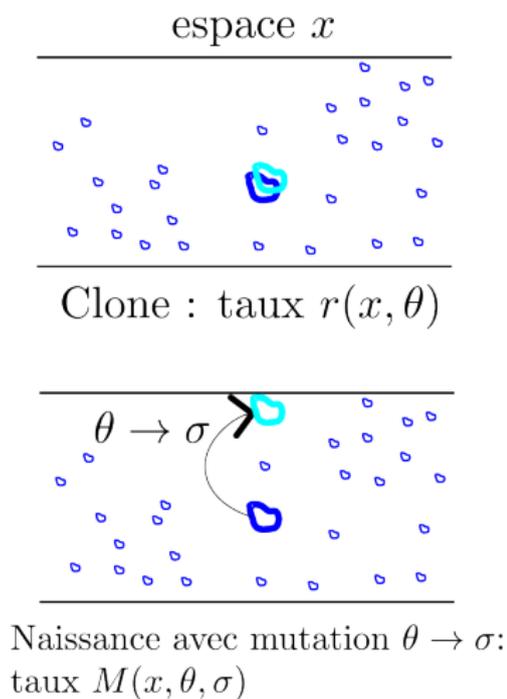
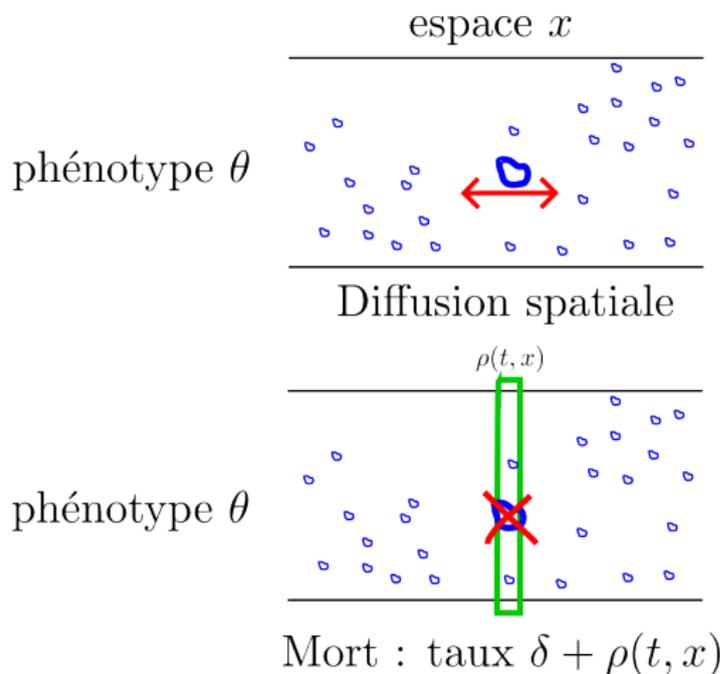


- Environnement hétérogène périodique
- **But : Vitesse de propagation.**

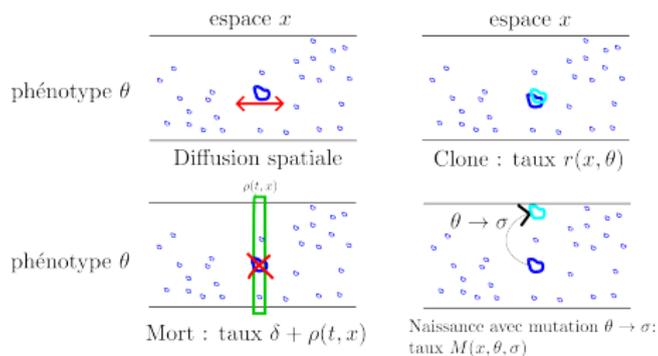
Origine : modèle individu-centré

Prévost, 2004 : Thèse, modèle similaire

Champagnat et Méléard, 2007 :



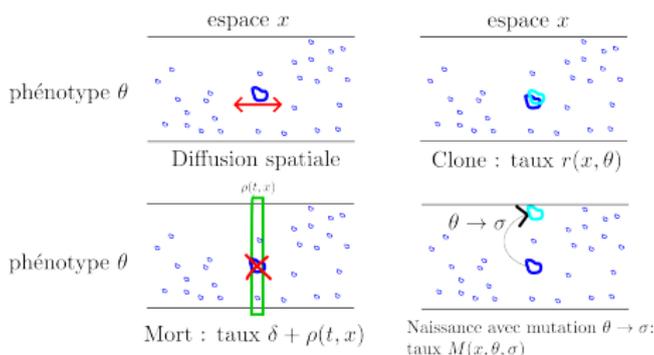
Origine : modèle individu-centré



Processus à valeurs mesure : $K =$ nombre d'individus à l'instant initial

$$X_t^K = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{N^K(t)} \delta_{Y_t^K, i}$$

Origine : modèle individu-centré



Processus à valeurs mesure : $K =$ nombre d'individus à l'instant initial

$$X_t^K = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{N^K(t)} \delta_{Y_t^K, i}$$

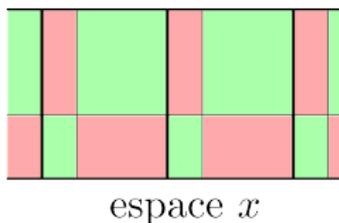
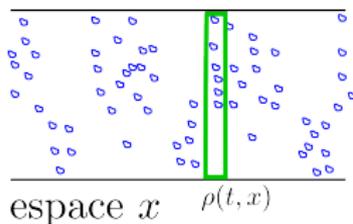
$X_t := \lim X_t^K$: mesure limite déterministe de densité $v(t, \cdot)$ et

$$\partial_t v(t, x, \theta) = \Delta_x v + \int_0^1 v(t, x, \sigma) M(\theta, \sigma) d\sigma + (r(x, \theta) - \delta - \rho)v.$$

But : vitesse de propagation

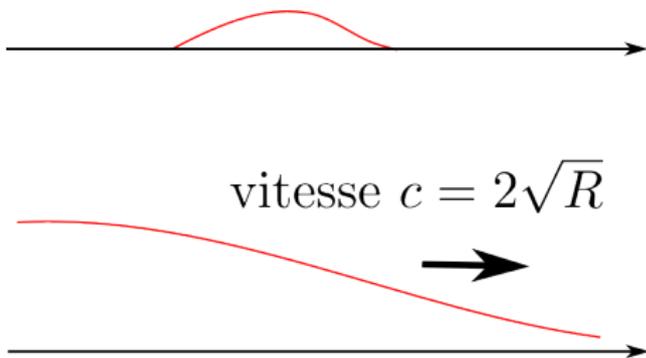
$$\begin{aligned} \text{Évolution} &= \text{mouvements} + \text{mutations} + \text{démographie-compét.} \\ \partial_t u(t, x, \theta) &= \Delta_x u + \Delta_\theta u + (r(x, \theta) - \rho)u \end{aligned}$$

phénotype θ



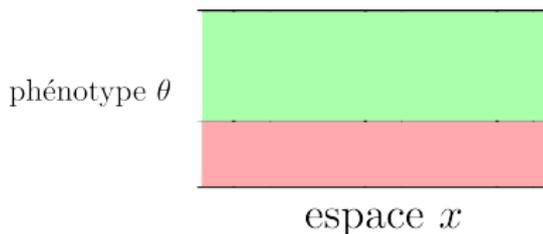
Cas homogène 1 : Sans phénotype (Fisher-KPP)

$$\partial_t u(t, x) = \Delta_x u + Ru - u^2.$$



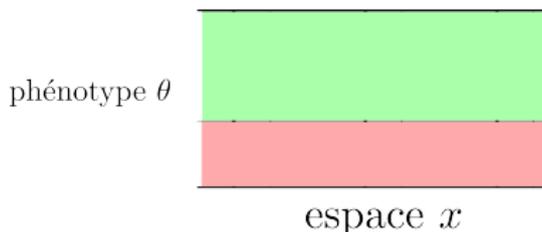
Cas homogène 2 : Avec phénotype (Berestycki, Jin, Silvestre, 2014)

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x, \theta) &= \Delta_x u + \Delta_\theta u + r(\theta)u - \rho u \\ &= \Delta_x u + (\Delta_\theta + r(\theta))u - \rho u\end{aligned}$$



Cas homogène 2 : Avec phénotype (Berestycki, Jin, Silvestre, 2014)

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x, \theta) &= \Delta_x u + \Delta_\theta u + r(\theta)u - \rho u \\ &= \Delta_x u + (\Delta_\theta + r(\theta))u - \rho u\end{aligned}$$

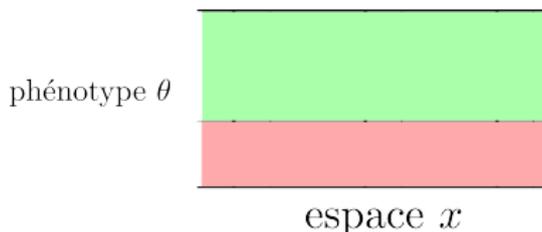


R : valeur propre principale (\simeq moyenne) de $(\Delta_\theta + r(\theta))$:

$$\begin{cases} (\Delta_\theta + r(\theta))\psi(\theta) = R\psi(\theta) \\ \psi > 0 \quad + \text{condition au bord} \end{cases}$$

Cas homogène 2 : Avec phénotype (Berestycki, Jin, Silvestre, 2014)

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x, \theta) &= \Delta_x u + \Delta_\theta u + r(\theta)u - \rho u \\ &= \Delta_x u + (\Delta_\theta + r(\theta))u - \rho u\end{aligned}$$



R : valeur propre principale (\simeq moyenne) de $(\Delta_\theta + r(\theta))$:

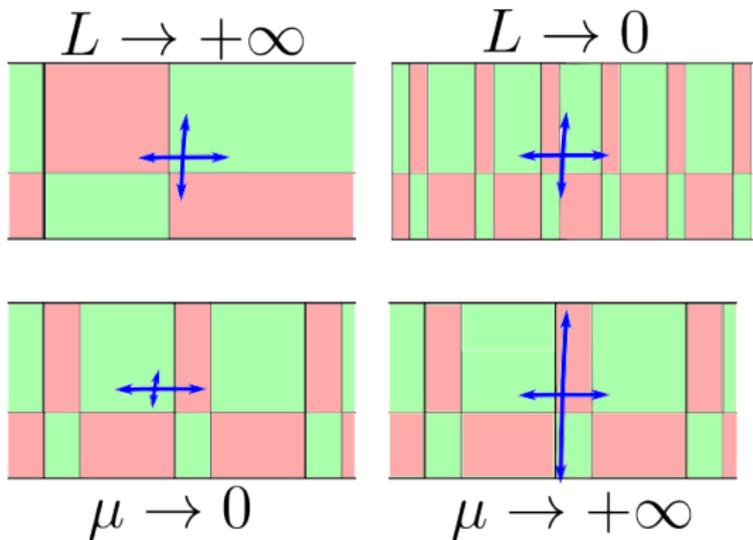
$$\begin{cases} (\Delta_\theta + r(\theta))\psi(\theta) = R\psi(\theta) \\ \psi > 0 \quad + \text{condition au bord} \end{cases}$$

$$\partial_t u(t, x, \theta) \simeq \Delta_x u + Ru - \rho u$$

\rightarrow Propagation à vitesse $c = 2\sqrt{R}$

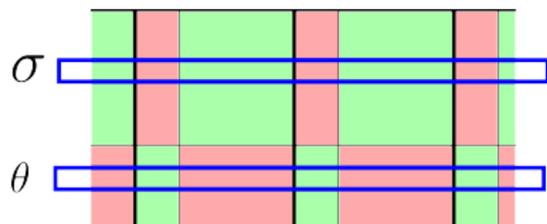
Plusieurs échelles

$$\begin{aligned} \text{Évolution} &= \text{mouvements} + \text{mutations} + \text{démographie-compét.} \\ \partial_t u(t, x, \theta) &= \Delta_x u + \mu \Delta_\theta u + r\left(\frac{x}{L}\right) u - \rho u \end{aligned}$$



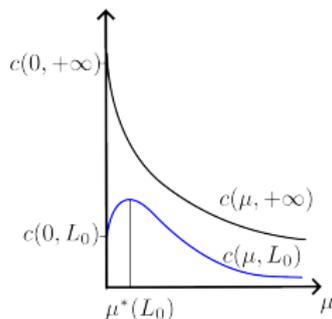
Quand $\mu \rightarrow 0$

Conjecture : Quand il y a très peu de mutations, la propagation est menée par le phénotype qui irait le plus vite individuellement.



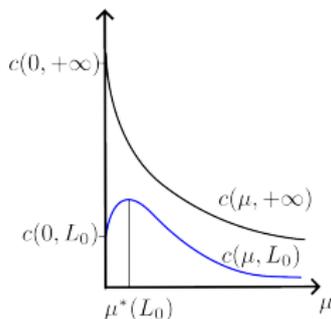
$$r(\cdot, \sigma) \rightarrow c^1(\sigma)$$

$$r(\cdot, \theta) \rightarrow c^1(\theta)$$



Conséquence : pour L assez grand : taux de mutation $\mu^*(L) > 0$ optimal :

$$c(\mu^*) = \max_{\mu > 0} c(\mu)$$

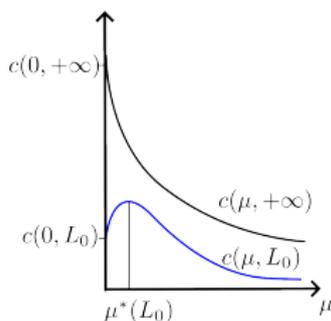


Conséquence : pour L assez grand : taux de mutation $\mu^*(L) > 0$ optimal :

$$c(\mu^*) = \max_{\mu > 0} c(\mu)$$

→ **Compromis** :

- μ trop petit : on ne profite pas des phénotypes avantageux ;
- μ trop grand : on subit les phénotypes délétères.



Conséquence : pour L assez grand : taux de mutation $\mu^*(L) > 0$ optimal :

$$c(\mu^*) = \max_{\mu > 0} c(\mu)$$

→ **Compromis** :

- μ trop petit : on ne profite pas des phénotypes avantageux ;
- μ trop grand : on subit les phénotypes délétères.

À faire : Interprétation biologique des différentes échelles

Merci !

Bibliographie :

Fisher, 1937.

Kolmogorov, Petrovski, Piskounov, 1937.

Prévost, Thèse, 2004.

Champagnat, Méléard, 2007.

Berestycki, Jin, Silvestre, 2014.