

# Chaire Modélisation mathématique et Biodiversité

S. Méléard, Ecole Polytechnique, CMAP

30 novembre 2009



- ▶ Un mécénat scientifique soutenu par Veolia Environnement, l'Ecole Polytechnique, le Muséum national d'Histoire naturelle, La Fondation de l'Ecole Polytechnique, dans le but de soutenir sur 6 ans, la thématique spécifique "Modélisation mathématique et Biodiversité".
- ▶ Ses activités s'articulent dans une perspective internationale, autour de 3 axes :
  - ▶ Enseignement
  - ▶ Recherche
  - ▶ Promotion et diffusion scientifique

- ▶ Echanges scientifiques entre mathématiciens appliqués, biologistes et spécialistes des métiers de l'environnement.
- ▶ Visibilité de nos activités de recherche auprès de l'entreprise .
- ▶ Un accès pour nous, institutions publiques, aux problématiques des métiers de l'environnement.
- ▶ Une dynamique pour attirer les élèves de l'Ecole Polytechnique et les étudiants vers des masters et des thèses dans ces thématiques.

# La Recherche

Les équipes engagées :

- ▶ Equipe Modélisation pour l'évolution du vivant (MEV), Centre de Mathématiques Appliquées (CMAP), Ecole Polytechnique.
- ▶ Equipe Conservation des espèces, restauration et suivi des populations, Centre de recherches sur la Biologie des populations d'oiseaux (CRBPO), Muséum national d'Histoire naturelle.
- ▶ Equipe Botanique, Origine, structure et évolution de la biodiversité (OSEB), Muséum national d'Histoire naturelle.

- ▶ Organiser régulièrement des workshops et des conférences pour favoriser les échanges scientifiques
- ▶ Favoriser l'invitation dans nos laboratoires de chercheurs d'excellence.
- ▶ Financer des allocations de thèses. Recruter des post-doctorants.

# La Formation

- ▶ Favoriser l'accès des élèves polytechniciens aux métiers de l'environnement, avec une solide formation en Mathématiques Appliquées et en Ecologie
- ▶ Développer un programme international de Master et de Doctorat.
  - ▶ Parcours Mathématiques Appliquées et Ecosciences de l'Ecole Polytechnique et Masters associés (Ecole Polytechnique ou MNHN, avec l'Université Pierre et Marie Curie, l'ENS Ulm, AgroParisTech)
  - ▶ Doctorats en lien avec les écoles doctorales de l'Ecole Polytechnique et du MNHN.

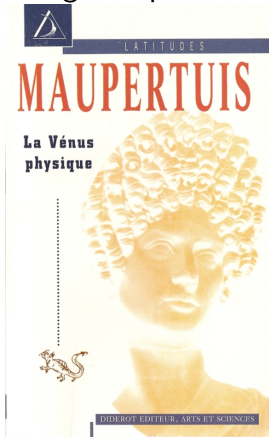




# Quelques anniversaires ...

250ème anniversaire de la mort de Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759).

Mathématicien, astronome, géographe, naturaliste. Précurseur de la génétique moderne.



## Chapitre III

### PRODUCTIONS DE NOUVELLES ESPECES

“La nature contient le fonds de toutes ces variétés : mais le hasard ou l’art les mettent en oeuvre... Nous voyons paraître des races de chiens, de pigeons, de serins qui n’étaient point auparavant dans la nature. Ce n’ont été d’abord que des individus fortuits ; l’art et les générations répétées en ont fait des espèces.”

# 200ème anniversaire de l'ouvrage de Lamarck (1744-1829) "Philosophie zoologique (1809)".

L'image linéaire de la grande Chaîne des Etres est remplacée par un arbre buissonnant, ancêtre des processus de branchement et du coalescent.



## PHILOSOPHIE ZOOLOGIQUE, OU EXPOSITION

Des considérations relatives à l'histoire naturelle des Animaux ; à la diversité de leur organisation et des facultés qu'ils en obtiennent ; aux causes physiques qui modifient en eux la vie et déterminent leur mode de mouvement qu'ils exercent sans, à celles qui produisent les uns le sentiment, et les autres l'intelligence de ceux qui en sont doués ;

*Jean-Baptiste Lamarck, 1809*  
PAR **J. B. P. A. LAMARCK**, 1809

Professeur de Zoologie au Muséum d'Histoire Naturelle, secrétaire de l'Institut de France, et de la Légion d'Honneur, de la Société Philologique de Paris, de celle des Naturalistes de Monaco, Honorable correspondant de l'Académie Royale des Sciences de Suède, de la Société des Amis de la Nature de Berlin, de la Société Médecins d'Éducation de Bordeaux, de celle d'Agriculture du département de l'Yonne, de celle d'Agriculture de Lyon, Associé libre de la Société des Philosophes de Paris, etc.

Seule édition.

TOME PREMIER.

PARIS.

J. B. BAILLIÈRE, LIBRAIRE  
DE L'ACADÉMIE ROYALE DE MÉDECINE,  
RUE DE L'ÉCOLE DE MÉDECINE, N° 13 (1819).

LONDRES. Même Maison, 3 Bedford street, Bedford square.  
BRUXELLES. Au Dépôt de la Librairie Médicale Française.

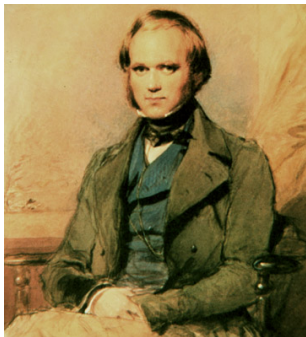
## AVERTISSEMENT.

L'EXPÉRIENCE dans l'enseignement m'a fait sentir combien une *Philosophie zoologique*, c'est-à-dire, un corps de préceptes et de principes relatifs à l'étude des animaux, et même applicables aux autres parties des sciences naturelles, seroit maintenant utile, nos connoissances de faits zoologiques ayant, depuis environ trente années, fait des progrès considérables.

En conséquence, j'ai essayé de tracer une esquisse de cette Philosophie, pour en faire usage dans mes leçons, et me faire mieux entendre de mes élèves : je n'avois alors aucun autre but.

Mais, pour parvenir à la détermination des principes, et d'après eux, à l'établissement des préceptes qui doivent guider dans l'étude, me trouvant obligé de considérer l'organisation dans les différens animaux connus ; d'avoir égard aux diffé-

200ème anniversaire de la naissance de Darwin (1809-1882) et  
150ème anniversaire de l'ouvrage "On the origin of species"  
(1859) .



"After years, I have deeply regretted that I did not proceed far enough at least to understand something of the great leading principles of mathematics : for men thus endowed seem to have an extra-sense".

La théorie de l'évolution est profondément probabiliste et ouvre les portes à la modélisation.

- ▶ **Hérédité** : Transmission des caractères
- ▶ **Diversité** : la variabilité d'une espèce est issue des mutations aléatoires qu'introduit chaque nouvel individu.
- ▶ **Sélection des individus les plus adaptés à l'environnement.**

Modèles de biodiversité : Modéliser la dynamique des individus en prenant en compte l'information génétique qu'ils contiennent et les interactions qu'ils développent.

# Modélisation mathématique et Biodiversité

- ▶ Les problèmes scientifiques liés à la biodiversité sont extrêmement complexes.
- ▶ Modèles mathématiques novateurs : simplifier (intelligemment) un phénomène pour le mettre en équation. Associer des quantités calculables (temps pour arriver à l'extinction d'une espèce, abondance d'une espèce, ...).
- ▶ Développer des algorithmes de simulation : outils d'expérimentation théorique pour prédire certains comportements (Très longues échelles de temps).
- ▶ A partir de données observées, construire des outils statistiques permettant de prédire et quantifier différents scénarios de la biodiversité.

# Spécificité de cette chaire

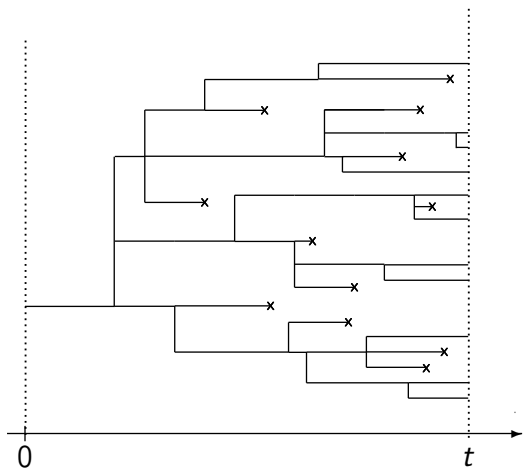
- ▶ Elaborer des modèles mathématiques intégrant différentes échelles d'organisation structurée, spatiales et temporelles.
- ▶ Avancées méthodologiques et conceptuelles dans l'étude des phénomènes écologiques et génétiques .
  - ▶ Comment la structuration génétique des populations influe sur leur dynamique et leur évolution ?
  - ▶ Comprendre comment les interactions écologiques produisent la sélection des gènes.
- ▶ Modélisation probabiliste des processus individuels. Etude des petites populations - vortex d'extinction.
- ▶ Données génétiques ou phylogéniques associées à des graphes ou arbres de coalescence : beaucoup de variables, peu d'observations ou beaucoup de valeurs manquantes.

# Pourquoi maintenant ?

- ▶ Quantité de données disponibles de plus en plus importante. Valeur ajoutée d'avoir une théorie pour les analyser.
- ▶ Prise de conscience des biologistes et des spécialistes de l'environnement de la nécessité d'une modélisation mathématique.
- ▶ La complexité des problèmes nécessite des outils mathématiques qui commencent à être assimilés et maîtrisés.
- ▶ Intérêt des mathématiciens pour les modèles et outils nouveaux (à inventer), motivés par les questions écologiques.
- ▶ Savoir-faire initié dans plusieurs projets de recherche ACI et ANR.

# Quelques idées mathématiques

Processus de naissance et mort :





# Processus aléatoire pour petites populations

## Problème d'extinction d'espèces.

- ▶ Le temps pour se reproduire est aléatoire :  
 $i \rightarrow i + 1$  au taux  $b i$ .
- ▶ La durée de vie est aléatoire avec compétition entre les individus :  $i \rightarrow i - 1$  au taux  $d i + c i(i - 1)$ .

On montre que

- ▶ Ce processus de population s'éteint avec probabilité 1.
- ▶ Le temps d'extinction moyen se calcule : si la population initiale est de taille  $K$ , il est de la forme  $C \ln K$ .

# Vortex d'extinction

- ▶ Ajouter l'information génétique : beaucoup plus difficile.
- ▶ Cas diploïde : calcul de la probabilité de fixation d'un allèle mutant.
- ▶ Cas neutre : La proportion d'allèles mutants est une martingale.
- ▶ Calcul de la proportion de mutations délétères : en cours... (Processus de Markov).
- ▶ Introduire un environnement aléatoire ?

# Approximations en grande population

- ▶ On suppose que la taille initiale  $K$  tend vers l'infini.
- ▶ Etude asymptotique du processus  $X(t)$ .
- ▶ Echelle écologique (naissance et mort) de même ordre que  $K$  :

$$dx(t) = x(t) (b - d - cx(t))$$

Equation logistique. Pas d'extinction. Echelle qui décrit des populations stationnaires.

- ▶ Mais...
- ▶ Si il y a beaucoup plus de naissances et de morts (accélération des paramètres écologiques), le processus devient aléatoire (stochasticité démographique)

$$dX(t) = \sqrt{X(t)} dB_t + X(t) (b - d - cX(t)).$$

On a extinction de la population avec probabilité 1.

- ▶ Question : quantifier les tailles de population de transition.

# Modèles individu-centrés

- ▶ Intégrer dans les modèles des paramètres individuels : trait phénotypique, génotype, variable spatiale, âge.
- ▶ coopération ou compétition entre individus.
- ▶ Mutation ou recombinaison génétique
- ▶ Migration entre différentes niches spatiales.
- ▶ Modèles mathématiques en dimension infinie : processus à valeurs mesures ou équations aux dérivées partielles.

# Evolution adaptative - Branchement évolutionnaire

