

# Modélisation mathématique et Biodiversité

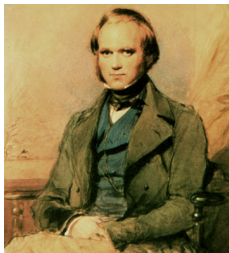
S. Méléard, Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques Appliquées, Responsable de la chaire "Modélisation mathématique et biodiversité"

28 Octobre 2010



"After years, I have deeply regretted that I did not proceed far enough at least to understand something of the great leading principles of mathematics : for men thus endowed seem to have an extra-sense".

Charles DARWIN, Uses and abuses of Mathematics in Biology.



LA MODELISATION MATHEMATIQUE : UN ENJEU DE  
L'ECOLOGIE MODERNE ?

# Pourquoi des mathématiques ?

- ▶ Les problèmes scientifiques liés à la biodiversité sont extrêmement complexes.
- ▶ Modèles mathématiques novateurs : simplifier (intelligemment) un phénomène pour le mettre en équation.  
Associer des quantités calculables (temps pour arriver à l'extinction d'une espèce, abondance d'une espèce, ...).
- ▶ Développer des algorithmes de simulation : outils d'expérimentation théorique pour prédire certains comportements. (Très longues échelles de temps).
- ▶ A partir de données observées, construire des outils statistiques permettant de prédire et quantifier différents scénarios de la biodiversité.

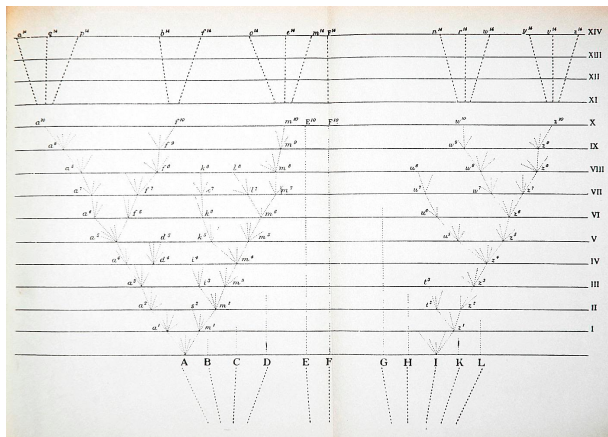
# Pourquoi maintenant ?

- ▶ Quantité de données disponibles de plus en plus importante. Valeur ajoutée d'avoir une théorie pour les analyser.
- ▶ Prise de conscience des biologistes et des spécialistes de l'environnement de la nécessité d'une modélisation mathématique.
- ▶ La complexité des problèmes nécessite des outils mathématiques qui commencent à être assimilés et maîtrisés.
- ▶ Intérêt des mathématiciens pour les modèles et outils nouveaux (à inventer), motivés par les questions écologiques.

# Exemples de questions posées

- ▶ Quel est l'avantage de la reproduction sexuée pour la biodiversité et la survie des espèces ?
- ▶ Impact de la migration et de la fragmentation de l'habitat sur la conservation de la biodiversité.
- ▶ Comment la structuration génétique des populations influe sur leur dynamique et leur évolution ?
- ▶ Comprendre comment les interactions écologiques produisent la sélection des gènes.
- ▶ Impact des variations de l'environnement sur la biodiversité.

# L'arbre de Darwin



On the Origin of Species by Natural Sélection (1859). Unique illustration de l'ouvrage.

## Théorie de l'évolution et modélisation.

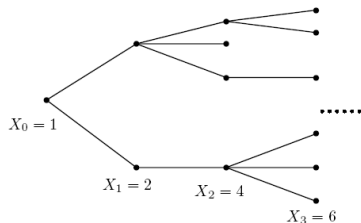
- ▶ **Hérédité** : Transmission des caractères
- ▶ **Diversité** : la variabilité d'une espèce est issue des mutations aléatoires qu'introduit chaque nouvel individu.
- ▶ **Sélection des individus les plus adaptés à l'environnement.**

**Modèles de biodiversité** : Modéliser la dynamique des individus en prenant en compte l'information génétique qu'ils contiennent et les interactions qu'ils développent.

# Plus dans les mathématiques :

**Processus de branchement et processus de coalescence** : deux sens du temps pour décrire la dynamique et l'évolution d'une population.

Le processus de Galton-Watson :



Ce processus décrit l'évolution d'une population qui à chaque génération se reproduit aléatoirement.

# Problème d'extinction d'espèce

- ▶ Si le nombre moyen  $m$  d'enfants par individu est supérieur ou égal à 1, la population explose de manière exponentielle en fonction du temps.
- ▶ Si le nombre moyen  $m$  d'enfants par individu est inférieur ou égal à 1, la population s'éteint sauf dans des cas très exceptionnels.
- ▶ Le temps d'extinction moyen se calcule : si  $m < 1$  et si la population initiale est de taille  $K$ , il est de la forme  $C \ln K$ . Ce temps est très petit par rapport à la taille de la population, quand  $K$  est grand.

# Extinction des baleines noires dans l'Atlantique Nord

Caswell et al. (1999).



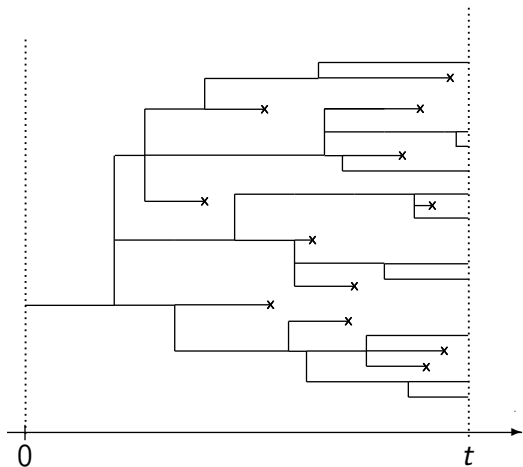
- ▶ 150 baleines femelles en 1994.
- ▶ Nombre moyen de petits : 0,976.
- ▶ 99% de chances de ne plus avoir de baleines dans 200 ans.

## Le processus de coalescence :



Au temps  $T$  : échantillon de 12 individus (en rouge). On remonte le temps pour trouver les ancêtres communs jusqu'au **plus récent ancêtre commun (MRCA)**. Cela définit des lignées ancestrales et un processus de coalescence aléatoire. Ce processus peut prendre en compte les mutations du génôme dans les philogénies.

## Le processus de naissance et mort :



- ▶ Le temps entre les naissances est aléatoire : Le temps moyen entre deux naissances est proportionnel à la taille de la population (paramètre  $b$ ).
- ▶ La durée de vie est aléatoire avec compétition entre les individus pour se partager les ressources : Le temps moyen entre deux morts est proportionnel au carré de la taille de la population (paramètre  $c$ ).

On montre que dans ce cas

La population va toujours s'éteindre, sauf très exceptionnellement.

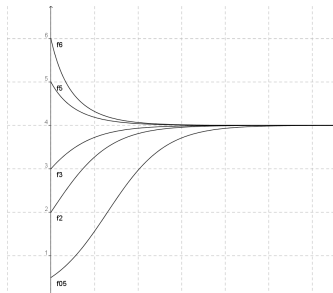
# Approximations en grande population

- ▶ On suppose que la taille initiale est très grande.
- ▶ La taille de la population au temps  $t$  est proche de  $x(t)$ , solution de l'équation

$$x'(t) = x(t) (b - cx(t)).$$

## Equation logistique

- ▶ Pas d'extinction.
- ▶ La taille de la population va se stabiliser sur la capacité de charge  $= \frac{b}{c}$ .

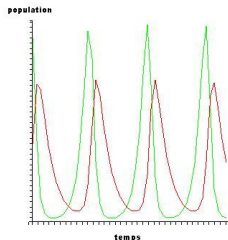


# Modèles de Lotka-Volterra

- ▶ En dimension deux : Modèles de proies-prédateurs - archétype d'un modèle déterministe de réseau trophique. ( En chassant moins, on favorise les espèces plus voraces au dépens des autres.)
- ▶  $x(t)$  = nombre de proies au temps  $t$ ,  
 $y(t)$  = nombre de prédateurs au temps  $t$ .

$$x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t)$$

$$y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t).$$

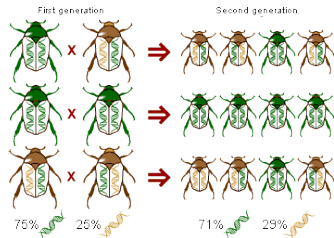


# Spirale (vortex) d'extinction - Populations sexuées

- ▶ Cas diploïde. Ajouter l'information génétique : beaucoup plus difficile.
- ▶ Apparition de mutants délétères (moins favorables à la survie).



- ▶ Ils changent les règles de reproduction



- ▶ Calcul de la probabilité (chance) de fixation d'un allèle mutant. (Tous les scarabées sont marrons).
- ▶ Petite population
  - ⇒ Augmentation de la consanguinité
  - ⇒ Accumulation de mutations délétères dans les petites populations
  - ⇒ Accélération de la vitesse d'extinction.

# Propagation des crapauds-buffles dans les champs de canne à sucre australiens

prise en compte de données génétiques dans des modèles d'invasion spatiale.



Les batraciens dotés de longue pattes se reproduisent entre eux en tête du front d'invasion  $\implies$  batraciens avec de plus en plus longues pattes  $\implies$  accélération de la vitesse d'invasion.

# Evolution adaptative - Branchement évolutionnaire

La dynamique de mutation - sélection entraîne la séparation en plusieurs espèces qui n'interagissent plus entre elles.  
(Spéciation).

