Démêler le rôle des variations temporelles et spatiales dans l'inflation en dynamique des populations

Édouard STRICKLER (CNRS, Nancy, France)

Travail avec Michel Benaïm (Université de Neuchâtel), Claude Lobry (Nice) et Tewfik Sari (Inrae Montpellier)

Journée de la Chaire MMB, Véolia

8 février 2023

Début d'une épidémie dans un pays isolé

$\rightsquigarrow$ Environnement Normal : chaque jour, nombre d'infectés multiplié par $R_N > 1$

$\rightsquigarrow$ Environnement Contraint : chaque jour, nombre d'infectés multiplié par $R_C < 1$

Début d'une épidémie dans un pays isolé

$\rightsquigarrow$ Environnement Normal : chaque jour, nombre d'infectés multiplié par $R_N > 1$

$\rightsquigarrow$ Environnement Contraint : chaque jour, nombre d'infectés multiplié par $R_C < 1$

Politique sanitaire périodique : T jours en environnement normal, suivis de T jours en environnement contraint, etc.

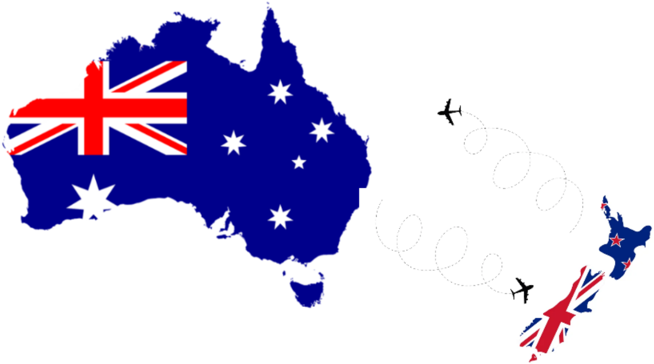
Evolution nombre d'infectés

I_t : nombre d'infectés au temps $t \geq 0$,

$$I_{n2T} = (R_N R_C)^{nT} I_0$$

Si $R_N R_C < 1$, alors $I_{n2T} \to 0$ quand $n \to \infty$

Les pays ne sont pas isolés



Migration représentée par $m \geq 0$: plus m est grand, plus il y a de mouvement entre les deux pays.

Des politiques sanitaires asynchrones[1]

Dans chaque pays,

$\rightsquigarrow$ Environnement Normal : chaque jour, nombre d'infectés multiplié par $R_N > 1$

$\rightsquigarrow$ Environnement Contraint : chaque jour, nombre d'infectés multiplié par $R_C < 1$

Politique sanitaire périodique : T jours en environnement normal, suivis de T jours en environnement contraint, etc.

$\rightsquigarrow$ **mais pas de manière synchrone !**

$t \in$	$[0, \quad T[$	$[T, 2T[$	$[2T, 3T, [$	$[3T, 4T[$
AUS	N	C	N	C
N-Z	C	N	C	N

1. Holt et al, *PNAS* 2021

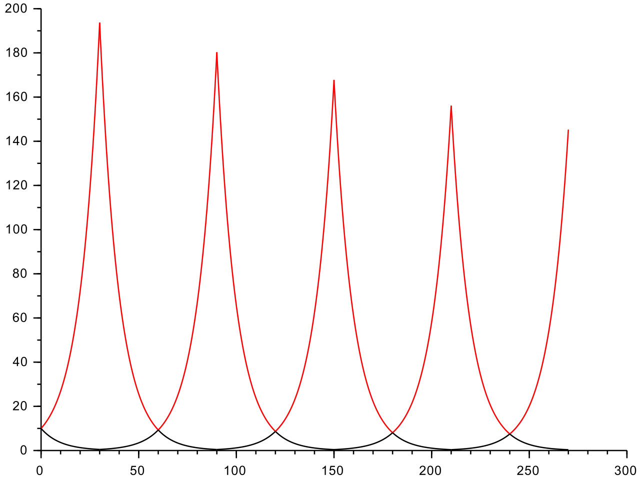


Figure – T = 30, m=0, $I_t(AUS)$ en rouge, $I_t(NZ)$ en noir

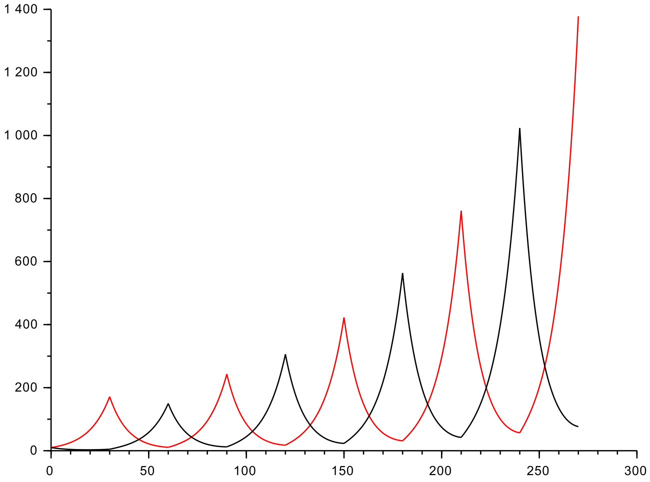


Figure – T = 30, m=0.005, $\rightsquigarrow$ inflation !

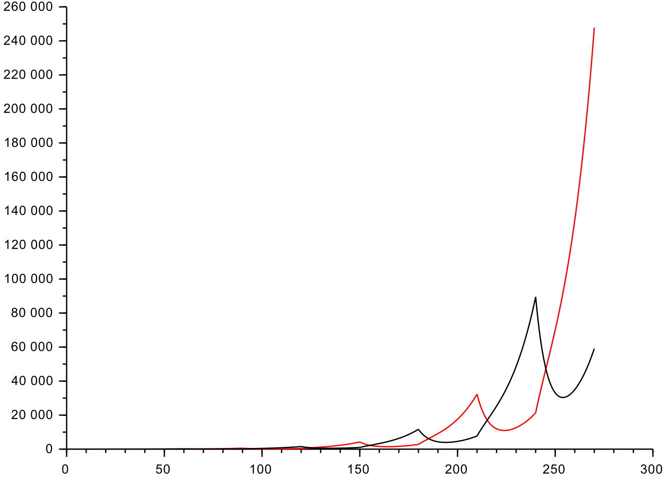


Figure – T = 30, m=0.05, $\rightsquigarrow$ encore pire !

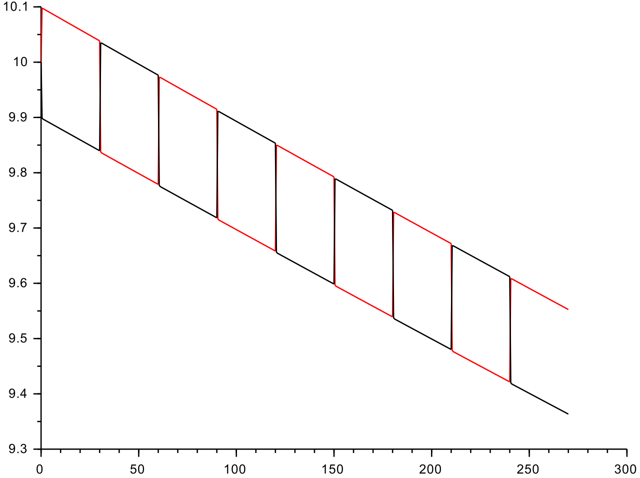


Figure – T = 30, m=5, $\rightsquigarrow$ plus d'inflation !

$\rightsquigarrow$ lorsque $m = 0$, l'épidémie est contenue
$\rightsquigarrow$ une très petite valeur de m entraîne une explosion des cas (inflation)
$\rightsquigarrow$ Il semble qu'il y ait une valeur de m menant au pire cas
$\rightsquigarrow$ pour m assez grand, l'épidémie est contenue

Notre objectif

1. Mieux comprendre ce phénomène, et comment les paramètres m et T jouent un rôle
2. Vérifier qu'il est robuste à des perturbations stochastiques

Modèle mathématique général

On regarde

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= r_1(\tfrac{t}{T})x_1 + m(x_2 - x_1)\\ \frac{dx_2}{dt} &= r_2(\tfrac{t}{T})x_2 + m(x_1 - x_2)\end{aligned}$$

où :

- r_i : taux de croissance (déterministe ou aléatoire) dans le patch i
- T : temps typique de variation de l'environnement
- m : taux de migration

$\rightsquigarrow$ *dans l'exemple précédent,* r_1 *et* r_2 *sont des fonctions* 2 - *périodiques*

$$r_1(t) = \begin{cases}\ln(R_N) & t \in [0,1)\\ \ln(R_C) & t \in [1,2)\end{cases} \quad ; \quad r_2(t) = \begin{cases}\ln(R_C) & t \in [0,1)\\ \ln(R_N) & t \in [1,2)\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= r_1(\tfrac{t}{T})x_1 + m(x_2 - x_1) \\
\frac{dx_2}{dt} &= r_2(\tfrac{t}{T})x_2 + m(x_1 - x_2)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= r_1(\tfrac{t}{T})x_1 + m(x_2 - x_1)\\ \frac{dx_2}{dt} &= r_2(\tfrac{t}{T})x_2 + m(x_1 - x_2)\end{aligned}$$

Hypothèse sur r_i

On suppose qu'il existe $\bar{r}_i \in \mathbb{R}$ (déterministe) tel que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t r_i(s)ds = \bar{r}_i$$

Alors, **si** $m = 0$,

$$x_i(t) \sim x_0 e^{\bar{r}_i t}$$

et donc $x_i(t) \to 0$ si $\bar{r}_i < 0$ et $x_i(t) \to \infty$ si $\bar{r}_i > 0$.

$\rightsquigarrow$ $\bar{r}_i$ *donne le comportement en temps long dans le patch* i *en l'absence de migration*

$\rightsquigarrow$ dans l'exemple initial, $\bar{r}_1 = \bar{r}_2 = \frac{1}{2}\ln(R_N R_C) < 0$.

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= r_1(\tfrac{t}{T})x_1 + m(x_2 - x_1)\\ \frac{dx_2}{dt} &= r_2(\tfrac{t}{T})x_2 + m(x_1 - x_2)\end{aligned}$$

Lorsque $m > 0$

Sous de bonnes hypothèses [a], il existe $\Lambda(r_1, r_2, m, T) \in \mathbb{R}$ (déterministe) tel que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln(x_1(t)) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln(x_2(t)) = \Lambda(r_1, r_2, m, T).$$

a. e.g. r_i périodique ou semi-Markovien ou Markovien Feller

$\rightsquigarrow$ si $m > 0$, le taux de croissance en temps long est le même dans les deux patchs

$\rightsquigarrow$ but : comprendre le comportement de $\Lambda(r_1, r_2, m, T)$ en fonction de m et T

Remarque : en général, pas de formule explicite pour $\Lambda(r_1, r_2, m, T)$

Un cas particulier

Si r_1 et r_2 sont constantes (égales à $\bar{r}_1$ et $\bar{r}_2$, resp.)

$$\Lambda(r_1, r_2, m, T) = \lambda(r_1, r_2, m)$$

où $\lambda(r_1, r_2, m)$ est la valeur propre principale de la matrice

$$A(r_1, r_2, m) = \begin{pmatrix} r_1 - m & m \\ m & r_2 - m \end{pmatrix}$$

donnée par

$$\lambda(r_1, r_2, m) = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) + \frac{1}{2}\sqrt{(r_1 - r_2)^2 + 4m^2} - m.$$

En particulier,

$$\lim_{m \to 0} \lambda(r_1, r_2, m) = \max(r_1, r_2).$$

Formule explicite pour l'exemple initial

$$\Lambda(r_1, r_2, m, T) = \frac{1}{2T} \ln \frac{\left(e^{TA}\right)^4 m^2 + 2\left(e^{TA}\right)^2 + m^2 + \sqrt{\left(e^{TA}\right)^8 m^4 + 4\left(e^{TA}\right)^6 m^2 - 2\left(e^{TA}\right)^4 m^4 - 8\left(e^{TA}\right)^4 m^2 + 4\left(e^{TA}\right)^2 m^2 + m^4}}{2\left(e^{TA}\right)^2 (m^2+1)\left(e^{Tm}\right)^2 \left(e^{T\epsilon}\right)^2}$$

avec $A = \sqrt{m^2+1}$ et $\varepsilon = -\frac{\ln(R_N R_C)}{\ln(R_N) - \ln(R_C)} > 0$

Formule explicite pour l'exemple initial

$$\Lambda(r_1, r_2, m, T) = \frac{1}{2T} \ln \frac{\left(e^{TA}\right)^4 m^2 + 2\left(e^{TA}\right)^2 + m^2 + \sqrt{\left(e^{TA}\right)^8 m^4 + 4\left(e^{TA}\right)^6 m^2 - 2\left(e^{TA}\right)^4 m^4 - 8\left(e^{TA}\right)^4 m^2 + 4\left(e^{TA}\right)^2 m^2 + m^4}}{2\left(e^{TA}\right)^2 (m^2+1)\left(e^{Tm}\right)^2\left(e^{T\epsilon}\right)^2}$$

avec $A = \sqrt{m^2+1}$ et $\varepsilon = -\frac{\ln(R_N R_C)}{\ln(R_N) - \ln(R_C)} > 0$

$\rightsquigarrow$ difficile d'en tirer quelque chose ! !

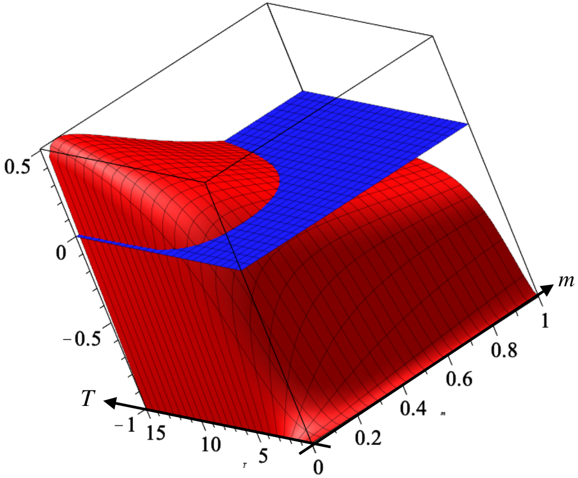


Figure – Graphique de $(m, T) \mapsto \Lambda(r_1, r_2, m, T)$ pour $\varepsilon = 0.5$

Bornes sur $\Lambda(r_1, r_2, m, T)$

Proposition

On a pour tous $m, T > 0$,

$$\frac{1}{2}\bar{r}_1 + \frac{1}{2}\bar{r}_2 \leq \Lambda(r_1, r_2, m, T) \leq \overline{\max(r_1(\cdot), r_2(\cdot))}$$

$\rightsquigarrow$ **Le taux de croissance asymptotique avec $m > 0$ est toujours plus élevé qu'une moyenne des taux de croissance de chaque patch avec $m = 0$.**

$\rightsquigarrow$ **Le taux de croissance asymptotique ne peut pas être plus grand que celui d'un patch idéalisé au taux de croissance maximal en tout temps**

Bornes sur $\Lambda(r_1, r_2, m, T)$

Proposition

On a pour tous $m, T > 0$,

$$\frac{1}{2}\bar{r}_1 + \frac{1}{2}\bar{r}_2 \leq \Lambda(r_1, r_2, m, T) \leq \overline{\max(r_1(\cdot), r_2(\cdot))}$$

Preuve borne inférieure : On pose $U = \frac{1}{2}\ln(x_1) + \frac{1}{2}\ln(x_2)$. Alors,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} = \Lambda(r_1, r_2, m, T)$$

et

$$\frac{dU(t)}{dt} = \frac{1}{2}r_1(\frac{t}{T}) + \frac{1}{2}r_2(\frac{t}{T}) + m\underbrace{\left(\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} - 2\right)}_{\geq 0}$$

Asymptotiques de $\Lambda(r_1, r_2, m, T)$

Théorème

Pour tout $m > 0$ fixé,

$$\lim_{T \to 0} \Lambda(r_1, r_2, m, T) = \lambda(\bar{r}_1, \bar{r}_2, m)$$

$$\lim_{T \to \infty} \Lambda(r_1, r_2, m, T) = \overline{\lambda(r_1(\cdot), r_2(\cdot), m)}$$

En particulier,

$$\lim_{m \to 0} \lim_{T \to \infty} \Lambda(r_1, r_2, m, T) = \overline{\max(r_1(\cdot), r_2(\cdot))} = \sup_{m', T' > 0} \Lambda(r_1, r_2, m', T')$$

Asymptotiques de $\Lambda(r_1, r_2, m, T)$

Théorème

Pour tout $m > 0$ fixé,

$$\lim_{T \to 0} \Lambda(r_1, r_2, m, T) = \lambda(\bar{r}_1, \bar{r}_2, m)$$

$$\lim_{T \to \infty} \Lambda(r_1, r_2, m, T) = \overline{\lambda(r_1(\cdot), r_2(\cdot), m)}$$

En particulier,

$$\lim_{m \to 0} \lim_{T \to \infty} \Lambda(r_1, r_2, m, T) = \overline{\max(r_1(\cdot), r_2(\cdot))} = \sup_{m', T' > 0} \Lambda(r_1, r_2, m', T')$$

Pour tout $T > 0$ fixé,

$$\lim_{m \to 0} \Lambda(r_1, r_2, m, T) = \max(\bar{r}_1, \bar{r}_2)$$

$$\lim_{m \to \infty} \Lambda(r_1, r_2, m, T) = \frac{1}{2}\bar{r}_1 + \frac{1}{2}\bar{r}_2 = \inf_{m', T' > 0} \Lambda(r_1, r_2, m', T')$$

Sur l'exemple initial...

$$\lim_{m\to\infty} \Lambda(r_1, r_2, m, T) = \inf_{m', T'>0} \Lambda(r_1, r_2, m', T') = \frac{1}{2}\bar{r}_1 + \frac{1}{2}\bar{r}_2$$

Dans l'exemple initial,

$$\inf_{m', T'>0} \Lambda(r_1, r_2, m', T') = \frac{1}{2}\ln(R_N R_C) < 0$$

$$\lim_{m\to 0}\lim_{T\to\infty} \Lambda(r_1, r_2, m, T) = \overline{\max(r_1(\cdot), r_2(\cdot))} = \sup_{m', T'>0} \Lambda(r_1, r_2, m', T')$$

Dans l'exemple initial,

$$\sup_{m', T'>0} \Lambda(r_1, r_2, m', T') = \ln(R_N) > 0$$

$\leadsto$ **Si les états ne peuvent pas synchroniser leur politique sanitaire, vaut-il mieux encourager le mouvement plutôt que d'essayer de le contrôler ? ?**

Seuil exponentiel dans le cas périodique

Théorème

Si r_1 et r_2 sont des fonctions 1 - périodiques, avec $\bar{r}_1 < 0$, $\bar{r}_2 < 0$ et $\chi = \overline{\max(r_1(\cdot), r_2(\cdot))} > 0$, alors

$$\Lambda(r_1, r_2, m, T) = 0$$

admet une solution minimale $m \sim_{T \to \infty} e^{-\chi T}$

$\rightsquigarrow$ en d'autres termes, la valeur critique de m pour laquelle le phénomène d'inflation apparaît est exponentiellement petite !

$\rightsquigarrow$ *Dans l'exemple initial,* $\bar{r}_1 = \bar{r}_2 = \frac{1}{2} \ln(R_N R_C) < 0$ *et*

$$\max(r_1(t), r_2(t)) = \ln(R_N) > 0$$

donc $\chi = \ln(R_N) > 0.$

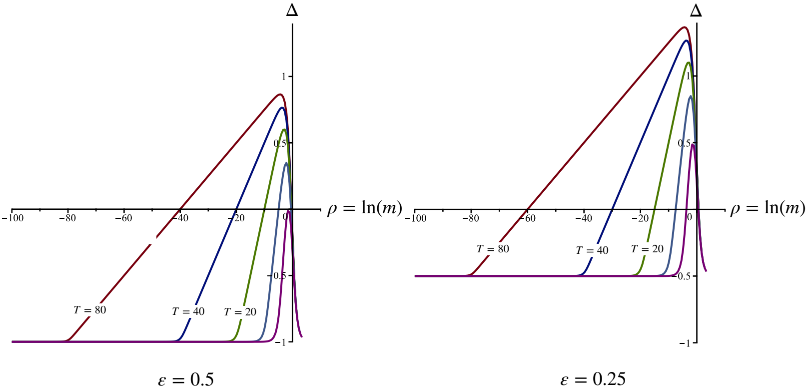


Figure – Graphique de $\rho \mapsto \Lambda(r_1, r_2, e^{\rho}, T)$ dans l'exemple initial

Merci pour votre attention !