

CHAIRE MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET BIODIVERSITÉ

La chaire Modélisation Mathématique et Biodiversité développe une synergie entre Mathématiques Appliquées et Écologie-Évolution autour du thème de la biodiversité. Son but est de répondre à des enjeux clés de l'environnement pour lesquels une modélisation fine du comportement des écosystèmes s'avère essentielle. Ses activités s'articulent autour de la Recherche et de la Formation, dans une perspective de promotion et de diffusion des connaissances scientifiques. Son originalité réside dans une approche pluridisciplinaire de la modélisation des écosystèmes, et dans l'utilisation d'outils mathématiques novateurs.

Quelques exemples de problèmes probabilistes liés à l'évolution des populations.

EXEMPLE 1 : comment modéliser les naissances et morts des individus d'une population ?

On utilise différents modèles, en voici quelques-uns.

- **Le modèle de Wright-Fisher** : la taille de la population est constante. À chaque génération, le parent de chaque descendant est choisi au hasard.
- **Le modèle de Galton-Watson** : à chaque génération, chaque individu donne naissance à un nombre aléatoire d'enfants. Les individus évoluent indépendamment les uns des autres et ont tous les mêmes capacités reproductrices. Si Z_n désigne le nombre d'individus au temps n on aura :

$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} Y_k^n,$$

où Y_k^n est le nombre (aléatoire) d'enfants du k -ième individu de la n -ième génération.

- **Les processus de naissance et mort en temps continu** : Les naissances et morts des individus se produisent de manière aléatoire, suivant des lois exponentielles. Ce type de modèle peut intégrer des caractéristiques écologiques variées comme la compétition ou la coopération entre les individus et prendre en compte différents types de reproduction.

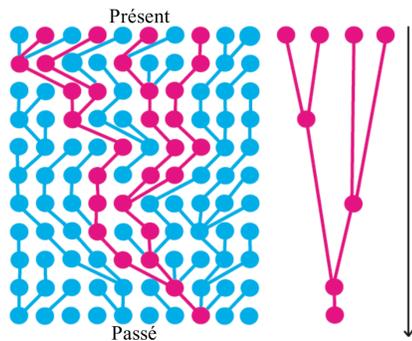
Tous ces modèles peuvent aussi prendre en compte des événements de **mutation** : celles-ci se produisent en général à la naissance des individus et de manière aléatoire. Une fois le modèle défini, on s'intéresse à l'évolution génétique, phénotypique, démographique, spatiale, ... de la population.

EXEMPLE 2 : Comment modéliser la généalogie des individus ?

Dans une population donnée, un échantillon d'individus est sélectionné et l'on cherche à tracer leur arbre généalogique. Cet arbre permet de répondre à des questions essentielles pour la compréhension de la biodiversité, comme :

- de quand date l'ancêtre commun à tous les individus de l'échantillon ?
- combien de mutations en moyenne séparent deux individus de la population ?

La généalogie des individus est construite progressivement en remontant le temps. Si la population suit un modèle de Wright-Fisher, l'**arbre aléatoire** obtenu est le suivant :

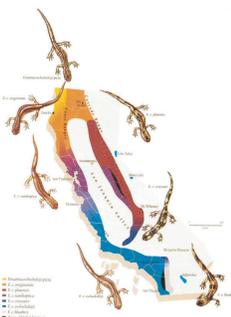


Arbre généalogique d'un échantillon d'individus

En supposant que la taille de la population est très grande et en changeant l'échelle de temps on obtient un arbre aléatoire limite appelé **Coalescent de Kingman**. Le temps entre deux coalescences (fusion de deux branches de l'arbre) est aléatoire et suit une loi exponentielle.

EXEMPLE 3 : Comment étudier l'évolution génétique des populations et la spéciation ?

Dans un modèle de population avec mutations, une question importante est : quelle est la probabilité pour qu'une nouvelle mutation soit un jour portée par tous les individus (on dit qu'elle se fixe) ? La réponse à cette question ouvre la voie à une meilleure compréhension de l'adaptation des populations et de l'**évolution darwinienne**. En effet, l'apparition successive de mutations qui sont sélectionnées et se fixent peut entraîner la séparation d'une espèce en plusieurs espèces qui n'interagissent plus entre elles. On parle de **spéciation**.

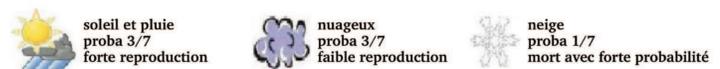


Ci-contre un exemple de spéciation due à un éloignement géographique des différentes populations, chez *Ensatina eschscholtzii*. Dans ce cas particulier on parle de variation clinale : les espèces les plus proches géographiquement peuvent se reproduire entre elles, mais les plus éloignées ne le peuvent pas.

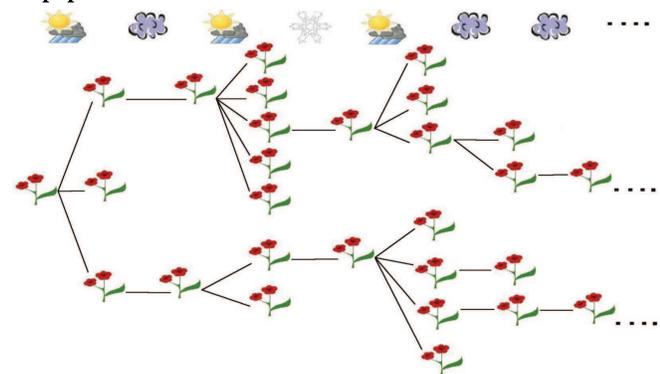
EXEMPLE 4 : L'environnement aléatoire, comment ? Avec quelles conséquences ?

Étude de l'évolution d'une population de fleurs se reproduisant dans un environnement aléatoire. Suivant la qualité de l'environnement, la reproduction des individus est plus ou moins favorisée.

Environnements aléatoires :



Dynamique de la population :



Quelques questions :

- la population de fleurs va-t-elle disparaître, ou croître ? Selon quels critères ?
- dans le cas où la population est censée s'éteindre, une survie inattendue des fleurs est-elle due :
 - à une reproduction exceptionnelle ? (stochasticité démographique)
 - à des environnements particulièrement favorables ? (stochasticité environnementale)
 - aux deux ?

Quelques réponses :

- la disparition ou la survie des fleurs se détermine grâce au nombre moyen d'enfants d'un individu.
- on définit un nombre, appelé entropie de l'environnement. Dans le cas d'une entropie négative, la survie est due à une reproduction exceptionnelle des fleurs. Si l'entropie est positive, la survie est due à des environnements anormalement favorables.

EXEMPLE 5 : la répartition aléatoire des individus dans l'espace : quelles conséquences ?

La répartition et le déplacement aléatoire des individus (éventuellement dus aux variations de l'environnement) soulèvent des questions intéressantes, notamment dans le cadre de la **préservation des espèces**.

Quelques questions :

- comment estimer le nombre d'individus d'une population sans tous les compter ? On utilise des **méthodes statistiques** pour déduire de données géographiques partielles l'intégralité de la population.
- quel est l'impact du fractionnement de l'habitat sur les populations ? Lorsque l'habitat d'une population est séparé en plusieurs parties (si une route passe au milieu d'une forêt, par exemple), la population sera divisée en plusieurs populations ayant des interactions particulières. On parle de **métapopulation**. Leur étude peut aider à définir la forme optimale d'une réserve naturelle.

EXEMPLE 6 : l'extinction des populations : à quelle vitesse ? Comment ?

Toute espèce soumise à la sélection naturelle est amenée à s'éteindre, et l'extinction des populations est un élément crucial de l'évolution de la biodiversité. Plusieurs thèmes d'études liés à ce phénomène nous intéressent :

- les temps d'extinction : peut-on estimer le temps moyen d'extinction d'une population en fonction de ses paramètres démographiques (taille de population, taux de naissance, taux de mort...) ?
- les petites populations : une population proche de l'extinction est de petite taille. Son comportement aléatoire risque alors d'accélérer son extinction. Peut-on quantifier ce phénomène ?
- le conditionnement à la survie : les populations observées sur terre ont survécu jusqu'à maintenant. Pour les étudier et donc connaître la loi d'évolution d'une population conditionnée à la survie, on utilise un outil mathématique appelé **distribution quasi-stationnaire**.