



# Optimisation géométrique et topologique du drapage des composites

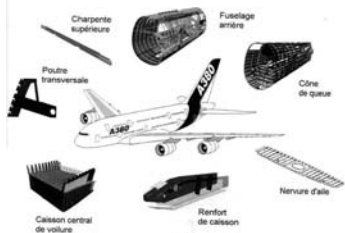
Gabriel Delgado Keeffe  
Grégoire Allaire

13 octobre 2010

# Matériaux pour les avions du siècle XXI



(a)

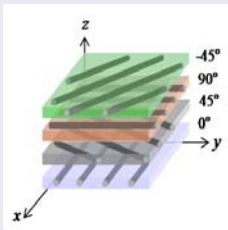
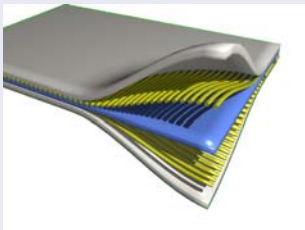


(b)

- Recherche très actif dans le domaine aéronautique.
- Matériaux ad-hoc : alliages métalliques et composites.

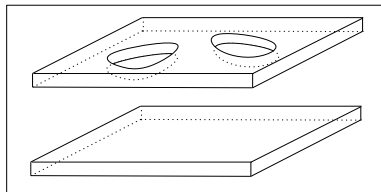
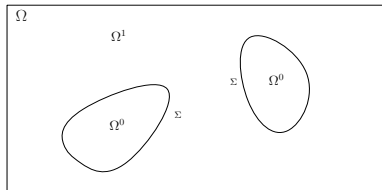


# Matériaux composites stratifiés ou laminés



## Caractéristiques

- Combinaison des fibres résistantes à des résines faibles.
- Fort sollicitation mécanique, conditions d'environnement sévères.
- Coût relativement faible.



## Enjeux

Trouver la structure  $\Omega$  la **plus rigide** sous une restriction de poids, quand il y a des forces externes qui s'appliquent sur l'objet.

$$\inf_{\Omega^0, \Omega^1 \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega^0, \Omega^1)$$

où  $J$  est la **fonction objective** et  $\mathcal{U}_{ad}$  **l'ensemble de formes admissibles**.

## Optimisation géométrique

- Méthode de Hadamard
- Difficulté de gérer changements de topologie
- Couteux à cause de remaillage

## Optimisation topologique

- Méthode de Homogénéisation
- Capture de formes sur un maillage fixe

## Combinaison des avantages de chaque approche

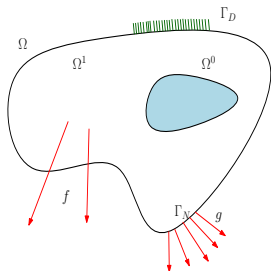
- Maillage fixe, changement de topologie  
→ **Méthode de lignes de niveau**
- Minimisation de la fonction objectif et déplacement du bord  
→ **Dérivée de forme**

# Description du modèle dans le cadre d'élasticité linéaire

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  fixe, composé de deux sous-domaines (phases) distincts  $\Omega^0$  et  $\Omega^1$ . La fonction caractéristique de  $\Omega^0$  est dénoté par  $\chi(x)$ . Le tenseur d'élasticité composite sur  $\Omega$  est,

$$A_\chi = A^0\chi + A^1(1 - \chi)$$

Les tenseurs de déformation et contraintes son liés aux déplacements  $u$  comme  $e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^T u)$  et  $\sigma(u) = A_\chi e(u)$ .



## Équation constitutive

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_\chi e(u)) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ A_\chi e(u)n = g & \text{sur } \Gamma_N \end{cases}$$

Sous hypothèses de régularité, il existe une solution unique.

- 1 Calcul de la dérivée de forme pour une fonction objective choisi (cadre continu).
- 2 La dérivée est discrétisée et régularisée sur tout le domaine.
- 3 La forme de la structure est modélisée par une fonction ligne de niveau sur un maillage fixe. La forme est déplacée par advection en suivant le flux du gradient de forme, à travers d'une équation de type Hamilton-Jacobi.

Soit  $\omega$  un ensemble régulier ouvert  $\omega \subset \Omega$  qui peut varier. On dénote par  $\chi$  la fonction caractéristique de  $\omega$ , et on considère les variations du type

$$\chi_\theta = \chi \circ (Id + \theta), \text{ c'est à dire } \chi_\theta = \chi \circ (x + \theta(x))$$

où  $\theta \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ ,  $\theta$  petit, tel que  $\theta$  est tangential sur  $\partial\Omega$ , On définit l'ensemble des formes admissibles  $\mathcal{U}_{ad}$  par

$$\mathcal{U}_{ad} = \{\omega_\theta \subset \Omega : \chi_\theta = \chi \circ (Id + \theta)\}$$

**Définition :** La dérivée de forme de  $J(\chi) : \mathcal{U}_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$  est défini comme la dérivée au sens de Fréchet dans  $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^2)$  de l'application  $\theta \rightarrow J(\chi \circ (Id + \theta))$ .



Soit  $\Omega$  et  $\Sigma$  réguliers et  $\theta \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ . Soit  $u_\chi$  solution du problème élastique et  $p_\chi$  l'état adjoint associé. Si

$$J(\chi) = \int_{\Omega} j_\chi(x, u_\chi) dx + \int_{\partial\Omega} h_\chi(x, u_\chi) ds$$

$$\begin{aligned} J'(\chi)(\theta) &= \int_{\Omega} M_\theta(A_\chi, u_\chi, p_\chi) dx \quad \text{(forme volumétrique)} \\ &= \int_{\Sigma} D\theta \cdot n ds \quad \text{(forme surfacique)} \end{aligned}$$

avec,

$$D(x) = -\sigma_{nn}(p_\chi)[e_{nn}(u_\chi)] - 2\sigma_{tn}(p_\chi)[e_{tn}(u_\chi)] + [\sigma_{tt}(u_\chi)]e_{tt}(p_\chi),$$

$$M_\theta(A_\chi, u_\chi, p_\chi) = A_\chi e(u_\chi) e(p_\chi) \operatorname{div} \theta - A_\chi e(u_\chi, \theta) e(p_\chi) - A_\chi e(p_\chi, \theta) e(u_\chi)$$

$$e(u, \theta) = \frac{1}{2} (\nabla u \nabla \theta + (\nabla u \nabla \theta)^t)$$

Les formes ne sont pas maillées, mais capturées sur un maillage fixe dans un domaine  $\Omega$ .

On définit la **fonction ligne de niveau**  $\phi$  sur  $\Omega$  comme

$$\begin{cases} \phi(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \partial\Omega^0 \cap \Omega, \\ \phi(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \Omega^0, \\ \phi(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (\Omega \setminus \bar{\Omega}^0). \end{cases}$$

- vecteur normal  $n = \nabla\phi/|\nabla\phi|$
- courbure  $\kappa = \operatorname{div} n$
- Ces formules ont un sens sur tout le domaine  $\Omega$ .

# Équation de Hamilton-Jacobi et schéma de transport

Si le domaine  $\Omega^0(t)$  évolue en pseudo-temps  $t \in \mathbb{R}$  avec vitesse normale  $\mathcal{V}(x, t)$ , alors

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathcal{V} |\nabla \phi| = 0$$

On utilisera un **schéma numérique upwind** pour transporter  $\phi$  pour un maillage structuré,

$$0 = \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + \min(\mathcal{V}_i^n, 0) g^-(D_x^+ \phi_i^n, D_x^- \phi_i^n) + \max(\mathcal{V}_i^n, 0) g^+(D_x^+ \phi_i^n, D_x^- \phi_i^n),$$

$$g^+(d^+, d^-) = \sqrt{\min(d^+, 0)^2 + \max(d^-, 0)^2},$$

$$g^-(d^+, d^-) = \sqrt{\max(d^+, 0)^2 + \min(d^-, 0)^2}.$$

Comme le schéma est explicite en temps, le pas de temps est déterminé par une condition CFL.

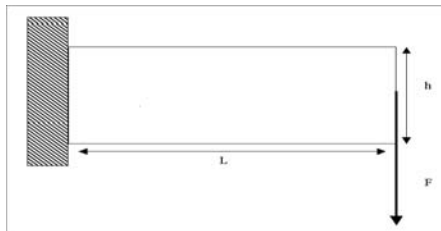
Pour des raisons de stabilité, il faut aussi **réinitialiser la fonction ligne de niveau**  $\phi$ . En effet on résout de manière périodique l'équation,

$$\begin{cases} -\frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{sign}(\phi_0)(|\nabla \phi|) = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \phi(t = 0, x) = \phi_0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

que admet comme solution stationnaire la distance signée à l'interface originale  $\{\phi_0 = 0\}$ .

**Réinitialiser la fonction ligne de niveau est vraiment important pour des raisons de stabilité et précision numériques.**

- 1 La fonction ligne de niveau  $\phi^0$  est initialisée comme la distance signée à la frontière  $\Sigma$ .
- 2 Itération k
  - Calcul de l'état  $u_{\chi,k}$  en résolvant le problème d'élasticité linéaire  $A_{\chi^k} = (1 - \chi^k)A^1 + \chi A^0$
  - Calcul de la vitesse  $\mathcal{V}^k$  tel que  $J'(\chi^k)(\mathcal{V}^k n) \leq 0$ .
  - Extension de la vitesse sur tout le domaine.
  - Évolution de l'équation de transport de Hamilton-Jacobi en un pas  $\Delta s^k$ . Le pas  $\Delta s_k$  est choisi de tel manière que  $J(\chi^{k+1}) \leq J(\chi^k)$ .



$$J(\chi) = \int_{\Gamma_N} g \cdot u_\chi ds + \kappa \int_{\Omega} (1 - \chi) dx$$

## Topologie initiale



## Composition de chaque phase

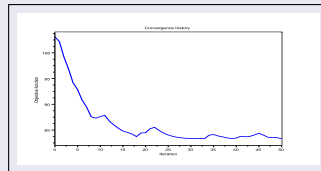
- Exemple I : Deux matériaux isotropes, un d'eux très mou (facteur 0.01)
- Exemple II : Deux matériaux orthotropes ( $45^\circ, -45^\circ$ ), avec restriction de poids nul.

# Exemple I

Forme optimale gradient  
surfactive



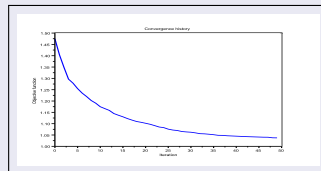
Courbe de convergence gradient  
surfactive



Forme optimale gradient  
volumétrique



Courbe de convergence gradient  
volumétrique

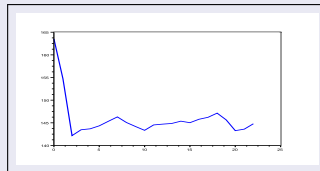


# Exemple II

Forme optimale gradient  
surfactive



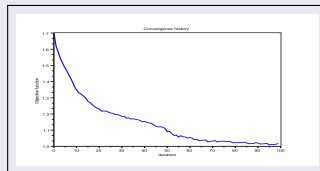
Courbe de convergence gradient  
surfactive



Forme optimale gradient  
volumétrique



Courbe de convergence gradient  
volumetrique





- [1] G. Allaire, *Conception Optimale de structures*, volume 58 of *Mathématiques et Applications*. Springer, 2007.
- [2] G. Allaire, F. Jouve, and A. Toader. *Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method*. *Journal of Computational Physics*, 194 :363393,2004.
- [3] G. Allaire, F. Jouve, and N. van Goethem. *Damage evolution in brittle materials by shape and topological*. Internal report, n. 676, CMAP, Ecole Polytechnique, March 2010.
- [4] O. Pantz. *Sensibilité de l'équation de la chaleur aux sauts de conductivité*. *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 341 :333337, 2005.
- [5] J. Sokolowski, J.P Zolesio, *Introduction to Shape Optimization*, volume 16 of *Springer series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, 1992.