

Energies de ligne en micromagnétisme

Benoît Merlet (CMAP)

(avec Radu Ignat, Université Paris-Sud)

ANR - MicroMANIP

SURESNES, Octobre 2010

Micromagnétisme

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un domaine.

On considère une **aimantation** $m : \Omega \rightarrow \mathbf{S}^2$

$$E^{3D}(m) = \underbrace{d^2 \int_{\Omega} |\nabla m|^2}_{\text{Energie d'échange}} + \underbrace{\int_{\Omega} \varphi(m)}_{\text{Anisotropie}} + \underbrace{\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u|^2}_{\text{Energie démagnétisante}}$$

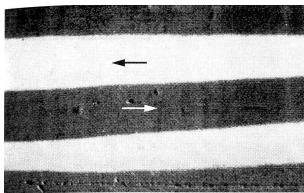
1. L'énergie d'échange pénalise les variations de m ;
2. L'anisotropie ($\varphi(m) = Qm_3^2$) favorise les aimantations planaires.
3. L'énergie démagnétisante pénalise la divergence $\operatorname{div}(m \mathbf{1}_{\Omega})$.

$$\Delta u = -\nabla \cdot (m \mathbf{1}_{\Omega}) \quad \text{dans } \mathbf{R}^3,$$

Domaines magnétiques

- paramètres intrinsèques : $\left\{ \begin{array}{l} d : \text{longueur d'échange } O(nm); \\ Q : \text{facteur de qualité}; \end{array} \right.$
- paramètres extrinsèques : épaisseur et diamètre de Ω .

~> Beaucoup de régimes asymptotiques possibles.



Observations physiques : $\left\{ \begin{array}{l} \text{Grandes régions uniformes (domaines)} \\ \text{séparées par des couches limites (parois)} \end{array} \right.$

Prédiction (de Van der Berg): Configurations limites

$$\begin{cases} m_3 = 0, & |m| = 1, & \text{i. e. } m(x) \in S^1 \\ \nabla \cdot m = 0 & \text{dans } \omega, & m \cdot \nu = 0 \text{ sur } \partial\omega. \end{cases} \quad (1)$$

Prédiction (de Van der Berg): Configurations limites

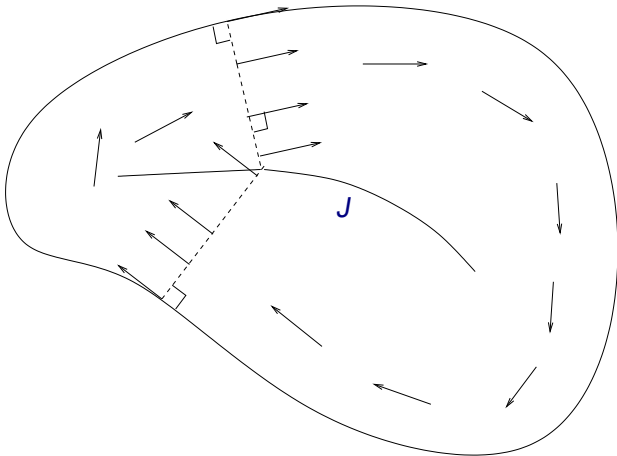
$$\begin{cases} m_3 = 0, & |m| = 1, & \text{i. e. } m(x) \in S^1 \\ \nabla \cdot m = 0 & \text{dans } \omega, & m \cdot \nu = 0 \text{ sur } \partial\omega. \end{cases} \quad (1)$$

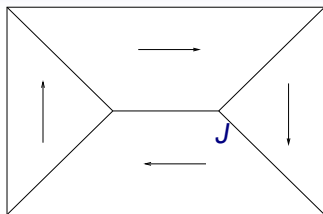
Soit $m = \nabla^\perp \psi$. Alors

$$|\nabla \psi| = 1 \text{ dans } \omega \quad \text{et} \quad \psi = 0 \text{ sur } \partial\omega.$$

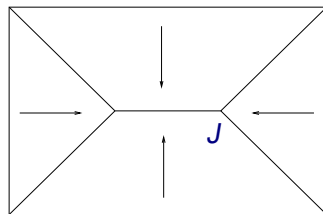
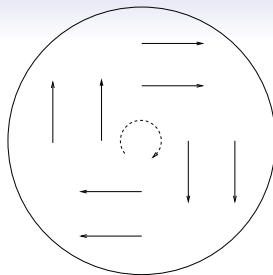
\Rightarrow PAS de solutions régulières (**lignes de saut** ou **vortex** pour m)

Une solution particulière: l'état de Landau : $m_0 := \nabla^\perp \text{dist}(x, \partial\omega)$

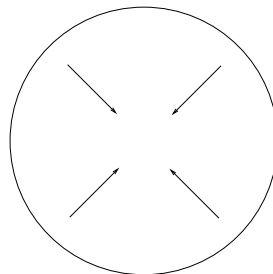


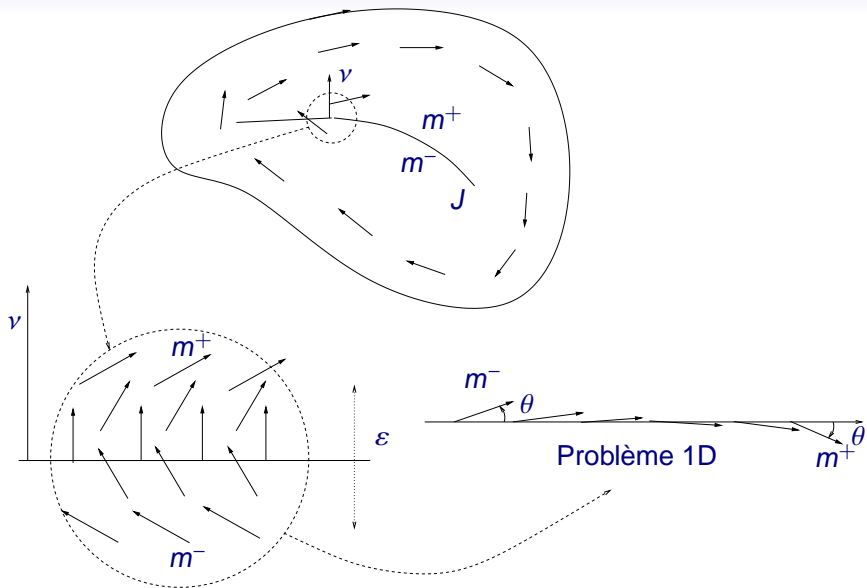


m



$\nabla\psi$





Energies de ligne

Pour ces configurations limites, l'énergie à considérer est du type

$$\mathcal{I}_f(m) := \int_J f(|m^+ - m^-|) d\mathcal{H}^1,$$

où f dépend du problème 1D.

Energies de ligne

Pour ces configurations limites, l'énergie à considérer est du type

$$\mathcal{I}_f(m) := \int_J f(|m^+ - m^-|) d\mathcal{H}^1,$$

où f dépend du problème 1D.

Exemples :

- Modèle étudié par Aviles et Giga ('86) $\leadsto f(d) = d^3$,
- Modèle étudié par Alouges, Rivières et Serfaty ('02).
 $\leadsto f(d) = \sin \theta - \theta \cos \theta$, où $m^\pm = (\cos \theta, \pm \sin \theta)$.
- Ignat, Merlet ('10). $\leadsto f(d) = d^2$,

Energies de Lignes

Soit $f \in C([0, 2], \mathbf{R}_+)$ une fonction coût.

Pour $m \in BV(\omega, S^1)$ telle que $\nabla \cdot m \equiv 0$ et $m \cdot \nu = 0$ sur $\partial\omega$,
on pose

$$\mathcal{I}_f(m) := \int_J f(|m^+ - m^-|) d\mathcal{H}^1.$$

Energies de Lignes

Soit $f \in C([0, 2], \mathbf{R}_+)$ une fonction coût.

Pour $m \in BV(\omega, \mathbf{S}^1)$ telle que $\nabla \cdot m \equiv 0$ et $m \cdot \nu = 0$ sur $\partial\omega$,
on pose

$$\mathcal{I}_f(m) := \int_J f(|m^+ - m^-|) d\mathcal{H}^1.$$

Question 1 : Etablir l'existence de minimiseurs.

Question 2 : Identifier les minimiseurs ?

Existence de minimiseurs

Méthode usuelle :

- Compacité des suites minimisantes

$$\mathcal{I}_f(m_k) \leq \lambda \quad \Longrightarrow \quad m_k \xrightarrow{k \uparrow \infty} m;$$

- La fonctionnelle \mathcal{I}_f doit être semi-continue inférieurement pour la même topologie

$$\mathcal{I}_f(m) \leq \liminf_{k \uparrow \infty} \mathcal{I}_f(m_k).$$

Existence de minimiseurs

Méthode usuelle :

- Compacité des suites minimisantes

$$\mathcal{I}_f(m_k) \leq \lambda \quad \Longrightarrow \quad m_k \xrightarrow{k \uparrow \infty} m;$$

- La fonctionnelle \mathcal{I}_f doit être semi-continue inférieurement pour la même topologie

$$\mathcal{I}_f(m) \leq \liminf_{k \uparrow \infty} \mathcal{I}_f(m_k).$$

Problème :

Les ensembles $\{m : \mathcal{I}_f(m) < \lambda\}$ ne sont pas compacts dans BV .

Existence de minimiseurs

Méthode usuelle :

- Compacité des suites minimisantes

$$\mathcal{I}_f(m_k) \leq \lambda \quad \Longrightarrow \quad m_k \xrightarrow{k \uparrow \infty} m;$$

- La fonctionnelle \mathcal{I}_f doit être semi-continue inférieurement pour la même topologie

$$\mathcal{I}_f(m) \leq \liminf_{k \uparrow \infty} \mathcal{I}_f(m_k).$$

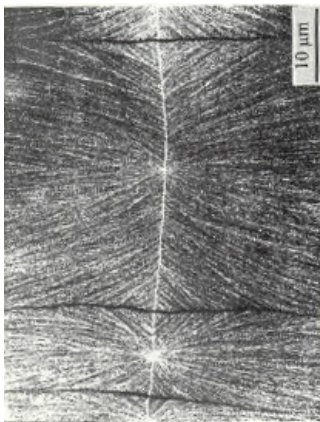
Problème :

Les ensembles $\{m : \mathcal{I}_f(m) < \lambda\}$ ne sont pas compacts dans BV .

Méthode : On va étendre \mathcal{I}_f comme une fonctionnelle \mathcal{E} définie sur L^1 , s.c.i. et telle que les ensembles $\{\mathcal{E} < \lambda\}$ soient compacts.

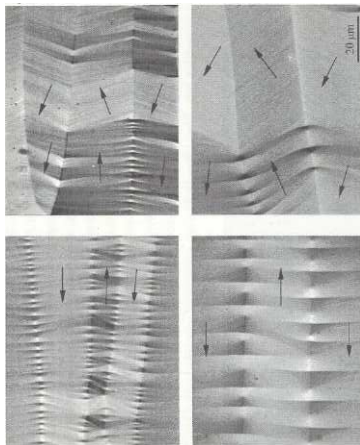
Semi-continuité inférieure et microstructure

$$f(d) = \sin \theta - \theta \cos \theta.$$



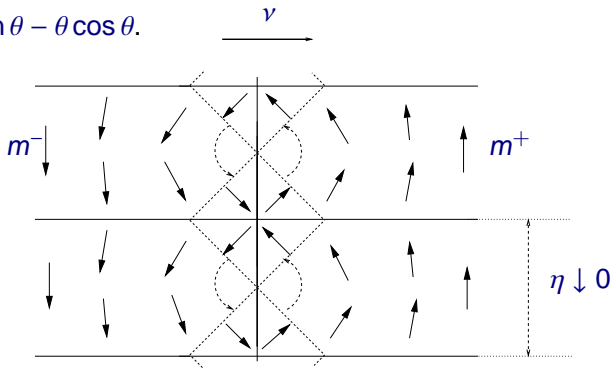
Semi-continuité inférieure et microstructure

$$f(d) = \sin \theta - \theta \cos \theta.$$



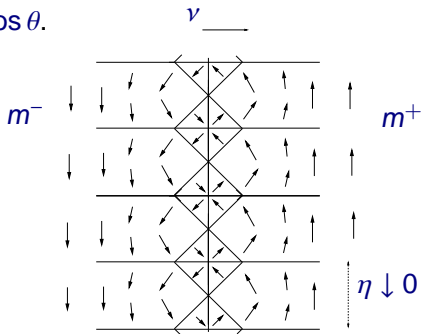
Semi-continuité inférieure et microstructure

$$f(d) = \sin \theta - \theta \cos \theta.$$



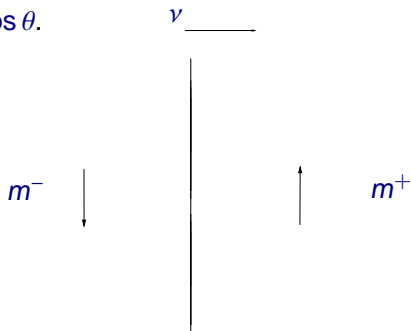
Semi-continuité inférieure et microstructure

$$f(d) = \sin \theta - \theta \cos \theta.$$



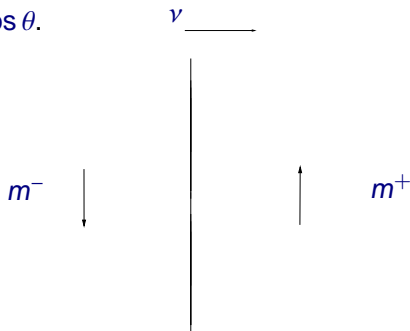
Semi-continuité inférieure et microstructure

$$f(d) = \sin \theta - \theta \cos \theta.$$



Semi-continuité inférieure et microstructure

$$f(d) = \sin \theta - \theta \cos \theta.$$



Le coût minimal d'un saut d'angle 2θ est

$$\tilde{f}(d) = \begin{cases} \sin \theta - \theta \cos \theta & \text{si } 0 \leq \theta \leq \pi/4, \\ \sqrt{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cos \theta - \sin \theta & \text{si } \pi/4 < \theta \leq \pi/2 \end{cases}$$

Si $f(d) = d^p$, $p > 3$, on sait que \mathcal{I}_f n'est pas s.c.i. (Ambrosio, DeLellis, Mantegazza '99)

Si $f(d) = d^3$ (ADLM), \mathcal{I}_f est s.c.i.

Question : Est-ce qu'il peut exister des microstructures favorables énergétiquement pour $f(d) = d^2$?

Entropies

Définition (DKMO '00)

On dit que $\Phi \in C^\infty(S^1, \mathbf{R}^2)$ est une entropie si pour tout $m \in C^\infty(\omega, \mathbf{R}^2)$,

$$\nabla \cdot m \equiv 0 \quad \text{et} \quad |m| = 1 \quad \implies \quad \nabla \cdot \{\Phi(m)\} \equiv 0.$$

On note *ENT* l'espace de ces entropies.

Entropies

Définition (DKMO '00)

On dit que $\Phi \in C^\infty(S^1, \mathbf{R}^2)$ est une entropie si pour tout $m \in C^\infty(\omega, \mathbf{R}^2)$,

$$\nabla \cdot m \equiv 0 \quad \text{et} \quad |m| = 1 \quad \implies \quad \nabla \cdot \{\Phi(m)\} \equiv 0.$$

On note *ENT* l'espace de ces entropies.

Proposition

Si $m \in BV(\omega, S^1)$ satisfait $\nabla \cdot m = 0$, la production d'entropie s'écrit

$$\mu_{\Phi(m)} = [\Phi(m^+) - \Phi(m^-)] \cdot \nu \mathcal{H}^1 \llcorner J.$$

En particulier

$$\int_\omega d\mu_{\Phi(m)} = \int_J [\Phi(m^+) - \Phi(m^-)] \cdot \nu d\mathcal{H}^1.$$

Pour $\alpha \in C_c^\infty(\omega)$, on a :

$$\langle \mu_\Phi, \alpha \rangle = \int_J [\Phi(m^+) - \Phi(m^-)] \cdot \nu(x) \alpha(x) d\mathcal{H}^1(x).$$

Pour $\alpha \in C_c^\infty(\omega)$, on a :

$$\langle \mu_\Phi, \alpha \rangle = \int_J [\Phi(m^+) - \Phi(m^-)] \cdot \nu(x) \alpha(x) d\mathcal{H}^1(x).$$

Définition

Soit $S \subset ENT$. Pour $m \in L^1(\omega, S^1)$ telle que $\nabla \cdot m = 0$, on pose

$$\mathcal{E}_S(m) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \langle \mu_{\Phi_i}, \alpha_i \rangle : (\Phi_i, \alpha_i) \in S \times C_c^\infty(\omega, \mathbf{R}_+), \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 1 \right\}.$$

Pour $\alpha \in C_c^\infty(\omega)$, on a :

$$\langle \mu_\Phi, \alpha \rangle = \int_J [\Phi(m^+) - \Phi(m^-)] \cdot \nu(x) \alpha(x) d\mathcal{H}^1(x).$$

Définition

Soit $S \subset ENT$. Pour $m \in L^1(\omega, S^1)$ telle que $\nabla \cdot m = 0$, on pose

$$\mathcal{E}_S(m) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \langle \mu_{\Phi_i}, \alpha_i \rangle : (\Phi_i, \alpha_i) \in S \times C_c^\infty(\omega, \mathbf{R}_+), \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 1 \right\}.$$

Pour obtenir l'invariance par isométrie, on suppose de plus que

- S est symétrique ($S = -S$),
- S est équivariant ($S = R \circ S \circ R^{-1}$ pour toute rotation R).

Fonctions coûts

Proposition

La fonctionnelle \mathcal{E}_S est semi-continue inférieurement pour la topologie L^1 .

Fonctions coûts

Proposition

La fonctionnelle \mathcal{E}_S est semi-continue inférieurement pour la topologie L^1 .

Proposition

Pour tout $m \in BV(\omega, \mathcal{S}^1)$ satisfaisant $\nabla \cdot m = 0$, on a

$$\mathcal{E}_S(m) = \mathcal{I}_{c_S}(m),$$

où

$$c_S(d) := \sup \left\{ \left[\Phi(z^+) - \Phi(z^-) \right] \cdot \nu : \right. \\ \left. \Phi \in \mathcal{S}, (z^+, z^-, \nu) \in \mathcal{S}^1, (z^+ - z^-) \cdot \nu = 0, |z^+ - z^-| = d \right\}.$$

Retour à la fonction coût de départ.

Étant donnée une fonction coût f , pour prouver la semi-continuité \mathcal{I}_f , il suffit de trouver $S \subset ENT$ tel que $c_S = f$.

Donc, on recherche une famille $S = \langle S_\theta \rangle$, telle que

$$f(2 \sin \theta) = \sup_{\Phi \in S} \left| [\Phi(z^+) - \Phi(z^-)] \cdot e_1 \right|,$$

$$z^\pm = (\cos \theta, \pm \sin \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2.$$

Retour à la fonction coût de départ.

Étant donnée une fonction coût f , pour prouver la semi-continuité \mathcal{I}_f , il suffit de trouver $S \subset ENT$ tel que $c_S = f$.

Donc, on recherche une famille $S = \langle S_\theta \rangle$, telle que

$$f(2 \sin \theta) = \sup_{\Phi \in S} \left| [\Phi(z^+) - \Phi(z^-)] \cdot e_1 \right|,$$

$$z^\pm = (\cos \theta, \pm \sin \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2.$$

Lemme

En notant $z = (\cos \theta, \sin \theta)$,

$$\Phi \in ENT \iff \exists \lambda \in C^\infty(S^1) \quad \text{tel que} \quad \frac{d}{d\theta} \Phi(z) = \lambda(\theta) z^\perp.$$

Retour à la fonction coût de départ.

Étant donnée une fonction coût f , pour prouver la semi-continuité \mathcal{I}_f , il suffit de trouver $S \subset ENT$ tel que $c_S = f$.

Donc, on recherche une famille $S = \langle S_\theta \rangle$, telle que

$$f(2 \sin \theta) = \sup_{\Phi \in S} \left| [\Phi(z^+) - \Phi(z^-)] \cdot e_1 \right|,$$

$$z^\pm = (\cos \theta, \pm \sin \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2.$$

Lemme

En notant $z = (\cos \theta, \sin \theta)$,

$$\Phi \in ENT \iff \exists \lambda \in C^\infty(S^1) \quad \text{tel que} \quad \frac{d}{d\theta} \Phi(z) = \lambda(\theta) z^\perp.$$

On a alors,

$$[\Phi(z^+) - \Phi(z^-)] \cdot e_1 = \int_{-\theta}^{\theta} \lambda(-x) \sin x \, dx.$$

Conclusion

Peut- on appliquer notre théorie ?

Conclusion

Peut- on appliquer notre théorie ?

- AG : $f(d) = d^3$. Oui, avec

$$\Phi(m_1, m_2) = (m_1^3/3 + m_2^2 m_1, m_2^3/3 + m_2^2 m_2)$$

Conclusion

Peut- on appliquer notre théorie ?

- AG : $f(d) = d^3$. Oui, avec

$$\Phi(m_1, m_2) = (m_1^3/3 + m_2^2 m_1, m_2^3/3 + m_2^2 m_2)$$

- ARS : $\tilde{f}(d)$. Oui, avec une seule entropie.

Conclusion

Peut- on appliquer notre théorie ?

- AG : $f(d) = d^3$. Oui, avec

$$\Phi(m_1, m_2) = (m_1^3/3 + m_2^2 m_1, m_2^3/3 + m_2^2 m_2)$$

- ARS : $\tilde{f}(d)$. Oui, avec une seule entropie.
- $f(d) = d^2$. Oui, avec une famille d'entropies

$$\{\Phi_\theta, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}.$$

↪ pas de microstructures.

Quels minimiseurs?

Une solution naturelle est l'état de Landau $m_0(x) := \nabla^\perp d(x, \partial\Omega)$

Quels minimiseurs?

Une solution naturelle est l'état de Landau $m_0(x) := \nabla^\perp d(x, \partial\Omega)$

Conjecture (AG, ADLM): si $f(d) = d^p$, $1 \leq p \leq 3$ et ω est convexe alors m_0 minimise \mathcal{I}_f .

Quels minimiseurs?

Une solution naturelle est l'état de Landau $m_0(x) := \nabla^\perp d(x, \partial\Omega)$

Conjecture (AG, ADLM): si $f(d) = d^p$, $1 \leq p \leq 3$ et ω est convexe alors m_0 minimise \mathcal{I}_f .

Résultats connus (AG) : Si $d = 1$, ω est un polygône convexe, alors m_0 minimise \mathcal{I}_f parmi les aimantations constantes par morceaux (pas de vortex). $\int_J |\nabla\psi| = \int_\omega |\Delta\psi| \geq \left| \int_\omega \Delta\psi \right| = |\partial\omega|$.

Quels minimiseurs?

Une solution naturelle est l'état de Landau $m_0(x) := \nabla^\perp d(x, \partial\Omega)$

Conjecture (AG, ADLM): si $f(d) = d^p$, $1 \leq p \leq 3$ et ω est convexe alors m_0 minimise \mathcal{I}_f .

Résultats connus (AG) : Si $d = 1$, ω est un polygône convexe, alors m_0 minimise \mathcal{I}_f parmi les aimantations constantes par morceaux (pas de vortex). $\int_J |\nabla\psi| = \int_\omega |\Delta\psi| \geq \left| \int_\omega \Delta\psi \right| = |\partial\omega|$.

Conjecture (Ambrosio, DeLellis, Mantegazza '99 et Jin, Kohn '00) : il existe ω non convexe tel que pour $f(d) = d^3$, m_0 n'est pas minimiseur.

Quels minimiseurs?

Une solution naturelle est l'état de Landau $m_0(x) := \nabla^\perp d(x, \partial\Omega)$

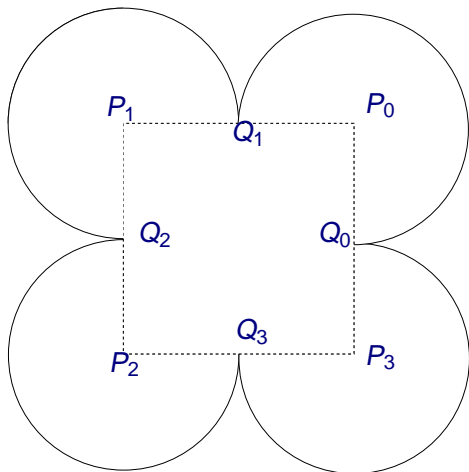
Conjecture (AG, ADLM): si $f(d) = d^p$, $1 \leq p \leq 3$ et ω est convexe alors m_0 minimise \mathcal{I}_f .

Résultats connus (AG) : Si $d = 1$, ω est un polygône convexe, alors m_0 minimise \mathcal{I}_f parmi les aimantations constantes par morceaux (pas de vortex). $\int_J |\nabla\psi| = \int_\omega |\Delta\psi| \geq \left| \int_\omega \Delta\psi \right| = |\partial\omega|$.

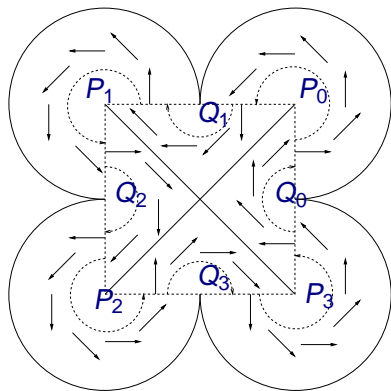
Conjecture (Ambrosio, DeLellis, Mantegazza '99 et Jin, Kohn '00) : il existe ω non convexe tel que pour $f(d) = d^3$, m_0 n'est pas minimiseur.

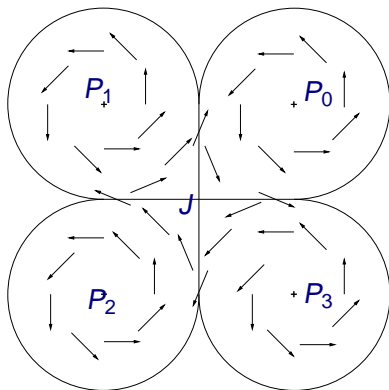
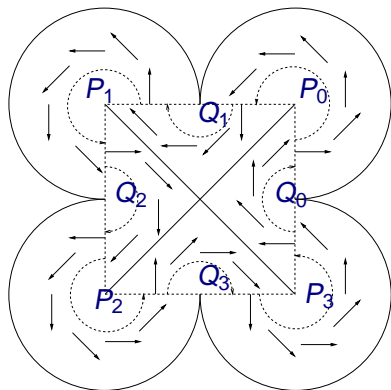
Proposition (Ignat, M. '10) : Il existe ω non convexe tel que si $f(d) > 0$ si $d > 0$, alors m_0 n'est pas minimiseur.

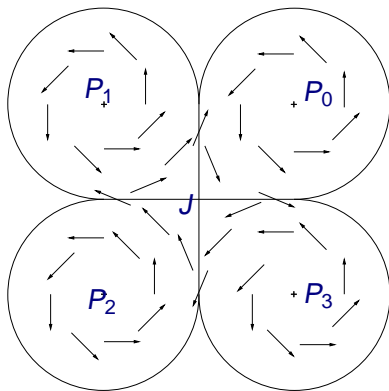
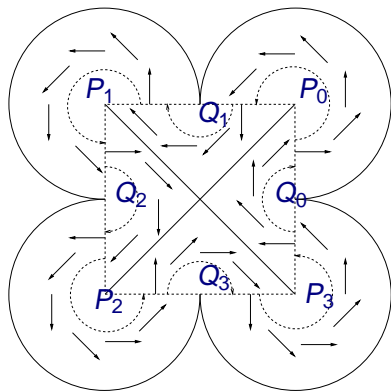
Construction of ω



o







$$I_f(\tilde{m}) = \frac{\sqrt{2}}{2} I_f(m_0).$$

Merci de votre attention !