

Présentation des activités de la Chaire MMSN
Modélisation mathématique et simulation numérique
F-EADS – INRIA – F-X – X

Grégoire Allaire

13 octobre 2010

1. Brève présentation de la chaire
2. Recrutements
3. Activités d'enseignement
4. Activités de recherche
5. Un exemple en optimisation de formes

I - Brève présentation de la chaire MMSN

- ✗ Convention signée le 30/03/08. Inauguration officielle le 20/10/08.
- ✗ Budget annuel consolidé (y compris salaires chargés) : environ 1 MEuros.
- ✗ Comité d'orientation et d'évaluation (F-EADS – INRIA – F-X – X) : décide et valide (une réunion annuelle).
- ✗ Comité de pilotage : conduit les activités (fréquentes réunions physiques ou virtuelles).
- ✗ Responsable de la chaire : Grégoire Allaire.
- ✗ L'objectif de la Chaire est double :
 - ★ encourager des recherches innovantes et originales dans le domaine de la modélisation mathématique et de la simulation numérique,
 - ★ développer l'enseignement dans cette thématique en augmentant le flux d'X et d'étudiants, notamment étrangers, vers le Master Mathématiques de la Modélisation, puis vers le doctorat.

II - Recrutements

✦ Enseignants-chercheurs :

- ✍ Professeur associé (plein temps) : François Alouges (2008).
- ✍ Professeur chargé de cours (plein temps) : Benoit Merlet (2009).
- ✍ CR2 INRIA : Armin Lechleiter (2009).

✦ Post-doctorants :

- ✍ Alex Kelly (Caltech), 2008/2009. Erik Lindgren (KTH), 2009/2010.
Jutta Steiner (Bonn), 2011

✦ Programme Master en 2009-2010 (tous commencent une thèse) :

- ✍ H R Harsha (Bangalore, thèse au CMAP), Gabriel Delgado (Chili, thèse à EADS), Charles Dapogny (X05, thèse avec Renault).

✦ Soutien aux élèves de 3ème année pour leur stage de recherche (sous condition d'orientation vers le Master "Maths de la modélisation) : 2 X06, 1 X07.

III - Activités d'enseignement

- ✗ 2ème année, "analyse numérique et optimisation" : cours essentiellement assuré par F. Alouges.
- ✗ 3ème année (M1), "transport et diffusion" : nouveau cours par G. Allaire et F. Golse.
- ✗ 4ème année (M2), "homogénéisation" : nouveau cours par G. Allaire.
- ✗ 4ème année (M2) : suivi individualisé des étudiants par F. Coquel.
- ✗ 4ème année (M2) : enseignement (possible) en anglais des cours de M2 du parcours "analyse numérique & EDP".

IV - Activités de recherche

Manifestations scientifiques

- ✗ Journée de bilan de la Chaire MMSN, 29 Septembre 2009 .
- ✗ WORKSHOP ON INVERSE PROBLEMS FOR WAVES, 29 et 30 Mars 2010.
- ✗ Soutien au cours CIMPA "optimisation dynamique" à Tandil, Argentine, septembre 2010.
- ✗ Colloque "Mathematical models of quantum field dynamics", 7 et 8 décembre 2010.
- ✗ **A venir** : congrès PICOF en 2012.

Equipes de recherches du CMAP liées à la chaire

- ✗ Mécanique, matériaux et optimisation de formes : exposés d'A. Chambolle et O. Pantz.
- ✗ DEFI : exposé d'H. Haddar
- ✗ EDP pour la physique : exposés de F. Coquel et B. Merlet.
- ✗ COMMANDS : exposé de F. Bonnans.

Trois exposés d'étudiants en thèse : F. Casenave, G. Delgado, H. Hutridurga.

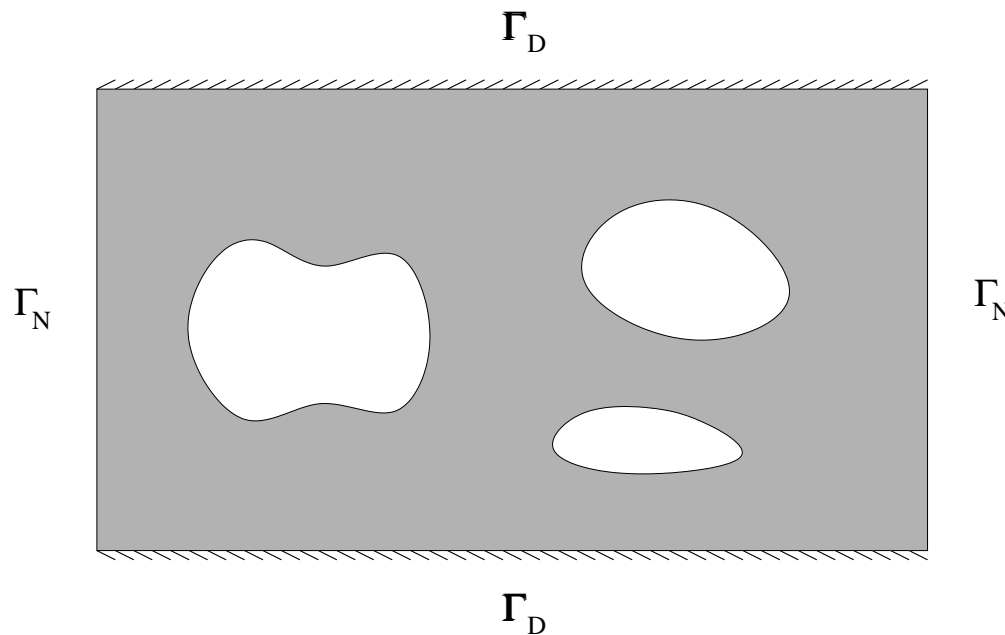
V - OPTIMAL DESIGN IN SMALL AMPLITUDE HOMOGENIZATION

Joint work with Alex Kelly, post-doc of the MMSN chair (2009).

We consider a **two-phase** optimal design problem for wave propagation :

$$A_\chi(x) = (1 - \chi(x))A^0 + \chi(x)A^1, \quad \rho_\chi(x) = (1 - \chi(x))\rho^0 + \chi(x)\rho^1$$

where $\chi(x) = 0$ or 1 is a characteristic function.



Optimal design problem

$$\inf_{\chi \in \mathcal{U}_{ad}} J(\chi) = \int_0^T \int_{\Omega} j(u, \nabla u) \, dx \, dt$$

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \chi \in L^{\infty}(\Omega; \{0, 1\}), \text{ such that } \int_{\Omega} \chi(x) \, dx = \Theta |\Omega| \right\}.$$

State equation \equiv [wave equation](#)

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{\chi} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div} (A_{\chi} \nabla u) = f \quad \text{in } \Omega \times (0, T) \\ + \text{boundary conditions on } \partial\Omega \\ u(x, 0) = u_{init}(x) \quad \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_{init}(x) \quad \text{in } \Omega \end{array} \right.$$

[Linear elasticity and multiple loads optimization](#) are also possible.

HOMOGENIZATION METHOD

The **optimal solutions** are usually made of composite materials (the properties of which are computed by **homogenization**).

The homogenization method has been applied in the following cases :

➡ **Conductivity setting** : any objective function of the type

$$J(\chi) = \int_0^T \int_{\Omega} j(\chi, u) dx dt$$

➡ **Elasticity setting** : only the stationary compliance

$$J(\chi) = \int_{\Omega} f \cdot u dx + \int_{\Gamma_N} g \cdot u ds$$

(or related functionals as eigenfrequency or robust compliance)

HOMOGENIZATION METHOD (continued)

What about elastodynamics or objective functions depending on the gradient ?

$$J(\chi) = \int_0^T \int_{\Omega} j(\nabla u) dx dt$$

- Almost nothing is known !
- This problem is too difficult for us : **so we simplify it!**

Simplifying assumption : following the lead of L. Tartar, we assume **a low contrast** between the two phases.

$$A^1 = A^0(1 + \eta), \quad \rho^1 = \rho^0(1 + \eta) \quad \text{with } \eta \text{ small.}$$

Second order expansion for small η :

$$u = u^0 + \eta u^1 + \eta^2 u^2 + \mathcal{O}(\eta^3).$$

- ☞ Plug this ansatz in the state equation and in the objective function.
- ☞ Drop all terms of order $\mathcal{O}(\eta^3)$ or higher.

State equation

Original one : $\rho_\chi \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div} (A_\chi \nabla u) = f \quad \text{in } \Omega \times (0, T)$

0-th order equation (without χ !)

$$\rho^0 \frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} - \operatorname{div} (A^0 \nabla u^0) = f \quad \text{in } \Omega \times (0, T)$$

1-st order equation (linear in χ)

$$\rho^0 \frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} - \operatorname{div} (A^0 \nabla u^1) = -\rho^0 \chi \frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} + \operatorname{div} (\chi A^0 \nabla u^0) \quad \text{in } \Omega \times (0, T)$$

2-nd order equation (quadratic in χ)

$$\rho^0 \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} - \operatorname{div} (A^0 \nabla u^2) = -\rho^0 \chi \frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} + \operatorname{div} (\chi A^0 \nabla u^1) \quad \text{in } \Omega \times (0, T)$$

Objective function

$$J(\chi) = \int_0^T \int_{\Omega} j(\nabla u) \, dx \, dt \quad \Rightarrow \quad J(\chi) = J_{sa}(\chi) + \mathcal{O}(\eta^3)$$

with $u = u^0 + \eta u^1 + \eta^2 u^2 + \mathcal{O}(\eta^3)$ and

$$\begin{aligned} J_{sa}(\chi) &= \int_0^T \int_{\Omega} j(\nabla u^0) \, dx \, dt + \eta \int_0^T \int_{\Omega} j'(\nabla u^0) \cdot \nabla u^1 \, dx \, dt \\ &\quad + \eta^2 \int_0^T \int_{\Omega} \left(j'(\nabla u^0) \cdot \nabla u^2 + \frac{1}{2} j''(\nabla u^0) \nabla u^1 \cdot \nabla u^1 \right) \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Small amplitude optimal design

$$\inf_{\chi \in \mathcal{U}_{ad}} J_{sa}(\chi)$$







$$\text{with } \mathcal{U}_{ad} = \left\{ \chi \in L^\infty(\Omega; \{0, 1\}), \text{ such that } \int_{\Omega} \chi(x) dx = \Theta |\Omega| \right\}.$$

- ➡ **Still an ill-posed problem!** The optimal solutions are composite materials.
- ➡ The optimal composite are rank-one laminates.
- ➡ The optimal lamination direction does not depend on the phase volume fraction.
- ➡ **Relaxation by means of H -measures (P. Gérard, L. Tartar).**

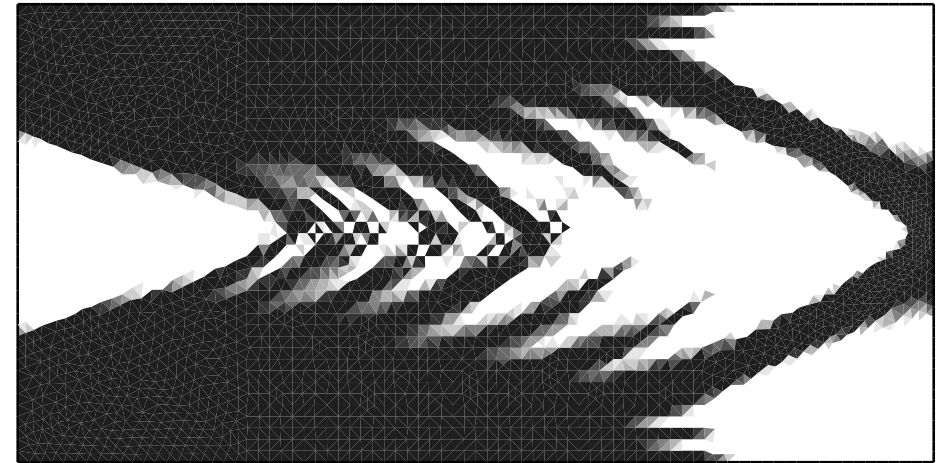
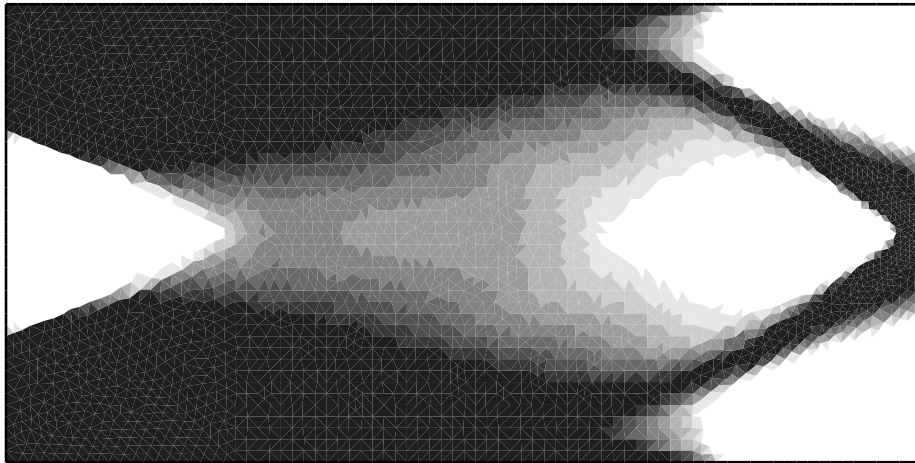
NUMERICAL RESULTS

Numerical algorithm (steepest descent) :

- **Initialization** : We introduce an adjoint to compute the optimal lamination direction of lamination which is **independent** of the volume fraction θ .
- **Iterations for $k \geq 1$** : We introduce another adjoint to compute the derivative $\nabla_{\theta} J_{sa}(\theta_k)$ and update the volume fraction θ_{k+1} .

-  The microstructure (direction of lamination) is computed **once**!
-  The two adjoints are integrated **backwards** with a stored state.
-  The rigidity matrix is factorized by Cholesky algorithm only **once**!
-  **Finite element solver** : FreeFem++ (Hecht-Pironneau), P_2/P_0 FEM.
-  **Black = strong phase on the pictures.**
-  All computations are done for the **elasticity system**.

Cantilever : steady-state case (with S. Gutierrez)



Compliance minimization for the long cantilever with $\eta = 0.99$ and volume=60% : relaxed (left), penalized (right).

Cantilever : dynamic case

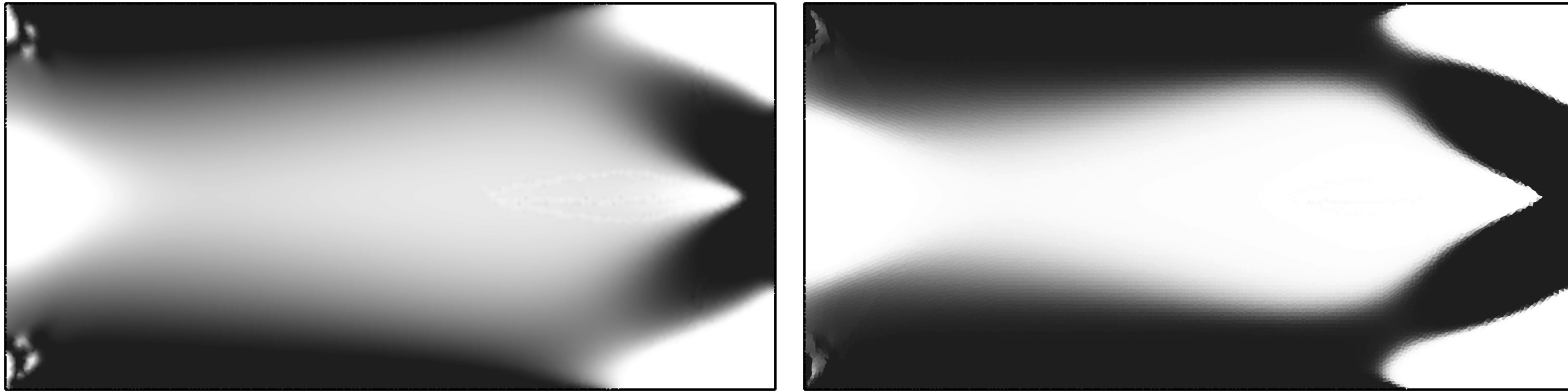
$$T = 10, \Delta t = 0.25$$

$$f(t, x) = (\sin \pi t/20) f(x)$$

$$u_{init} = v_{init} = 0$$

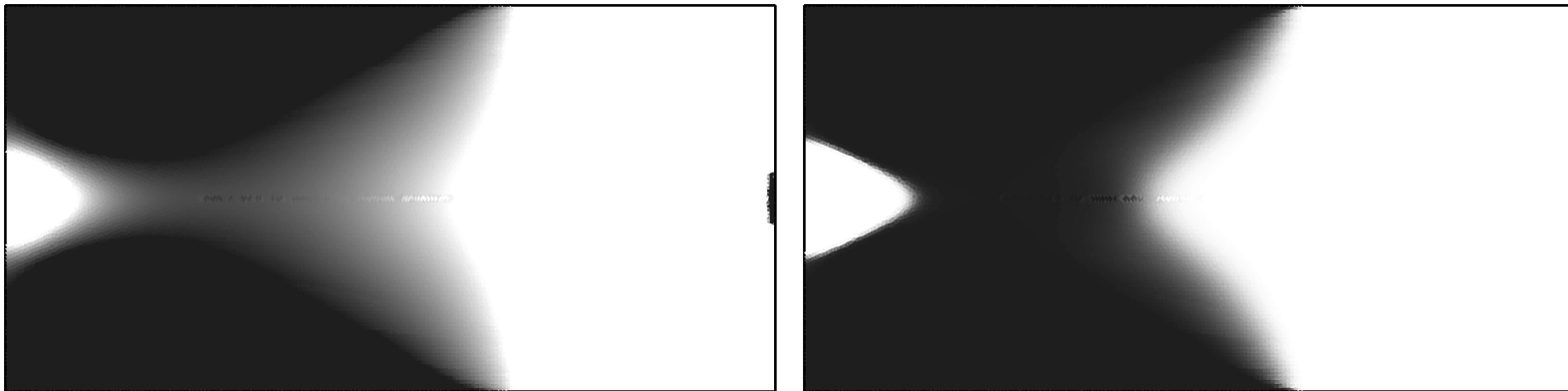
$$J(\chi) = \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t u \cdot f \, dx \, dt = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\rho_{\chi} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + A_{\chi} e(u) \cdot e(u) \right) (T) \, dx$$

$$\eta = 0.90 \text{ and volume} = 50\% :$$



Integral compliance minimization for the long cantilever : relaxed (left),
penalized (right).

Same case with $f(t, x) = (\sin \pi t/5) f(x)$



Minimal dissipation of a wheel



$T = 2\pi$, $f(t, x) = (\sin t, \cos t)$, $u_{init} = v_{init} = \text{solution after 100 rotations}$

$$J(\chi) = \int_0^T \int_{\Omega} (\rho |\partial_t u|^2 + A |\nabla u|^2) dt dx$$