Construction de Suites Minimisantes en Optimisation de Forme

O. Pantz[1], K. Trabelsi[2]

[1] CMAP, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France.
[2] LMCI, Institut Polytechnique des Sciences Avancées, Kremlin Bicêtre, France.

Motivation

Formulation Classique

Déterminer l'ouvert $\Omega^* \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que

$$J(\Omega^*) = \min_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega), \tag{1}$$

- $\mathcal{U}_{ad}$:= Ensemble des formes admissibles (i.e. ouverts de $\mathbb{R}^N$) ;
- $J : \mathcal{U}_{ad} \to \overline{\mathbb{R}}$:= Fonction coût.

On considère le cas où la fonction coût J dépend de la solution u_Ω d'une EDP posée sur de le domaine Ω,

$$J(\Omega) = j(u_\Omega, \Omega).$$

Minimisation de la Compliance

Élasticité Linéaire

$$\begin{cases} \mathrm{div}(Ae(u_\Omega)) = 0 & \text{in } \Omega, \\ Ae(u_\Omega)\cdot n = g & \text{on } \Gamma_N, \\ u_\Omega = 0 & \text{on } \Gamma_D, \\ Ae(u_\Omega)\cdot n = 0 & \text{on } \partial\Omega \setminus (\Gamma_N \cup \Gamma_D). \end{cases}$$

- $u_\Omega :=$ Déplacement de la structure ;
- $A :=$ Loi de Hooke du matériau ;
- $e(u) := (\nabla u + \nabla u^T)/2$ tenseur métrique linéarisé.

Compliance

$$j(u,\Omega) = \int_{\Gamma_N} g \cdot u \, ds.$$

Ensemble Admissible

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^N \text{ tel que } |\Omega| \leq V_{max} \right\}.$$

Quelques Difficultés ...

Problème Mal Posé

En règle général, il n'existe pas de solution à ce type de problème d'optimisation.

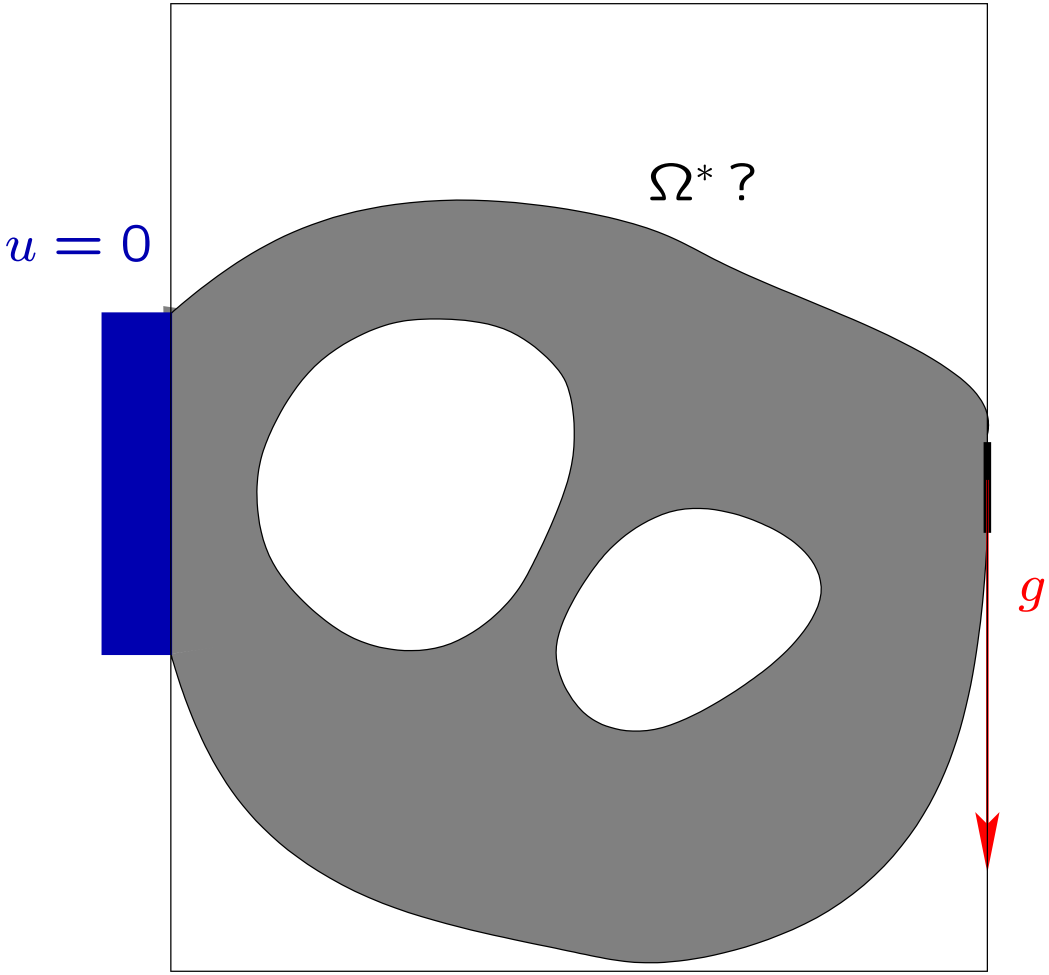
Minima Locaux

L'ajout d'une contrainte géométrique permet d'assurer l'existence d'une solution. Mais cette dernière dépend de la contrainte choisie. De plus, cela peut induire la création d'un grand nombre de minima locaux.

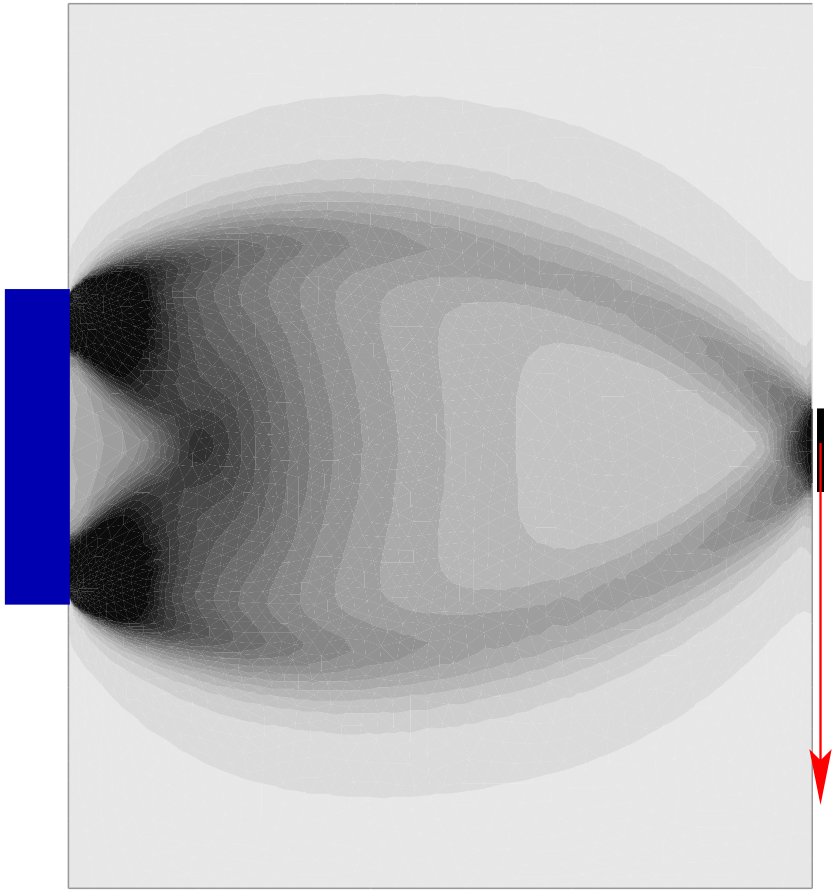
Une solution : La méthode d'homogénéisation

La méthode d'homogénéisation consiste à élargir l'espace de recherche en autorisant les formes composites (mélange de vide et de matière).

Exemple : Le cantilever



La solution composite



Noir : Densité maximale ; Blanc : Vide.

Optimale mais difficile à fabriquer ...

Reformulation

Trouver une suite Ω_ε de formes dans $\mathcal{U}_{ad}$ de complexité géométrique (et topologique) croissante tel que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} J(\Omega_\varepsilon) = \inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega),$$

- $\varepsilon :=$ Taille caractéristique des détails.

But Principal

Pondérer la complexité géométrique et topologique de la forme par rapport à son optimalité.

Stratégie

- Définir un espace $\mathcal{S}_{ad}$ de suites de forme "convergeant" vers des formes composites.
- Trouver $\Omega_\varepsilon^* \in \mathcal{S}_{ad}$ tel que

$$\overline{J}(\Omega_\varepsilon^*) = \inf_{\Omega_\varepsilon \in \mathcal{S}_{ad}} \left\{ \overline{J}(\Omega_\varepsilon) := \lim_{\varepsilon \to 0} J(\Omega_\varepsilon) \right\}.$$

Suite de formes convergeant vers le composite optimal

Formes Composites

Les formes composites sont caractérisées par

- $\theta :=$ Densité locale ;
- $A^* :=$ Loi de Hooke (qui dépend de la densité et de la micro-structure).

Le déplacement u_{A^*} de la structure vérifie

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{div}(A^* e(u_{A^*})) = f & \text{in } D, \\ A^* e(u_{A^*}) \cdot n = g & \text{on } \Gamma_N, \\ u_{A^*} = 0 & \text{on } \Gamma_D, \\ A^* e(u_\Omega) \cdot n = 0 & \text{on } \partial D \setminus (\Gamma_N \cup \Gamma_D). \end{array}\right. ,$$

tandis que la compliance est définie par

$$J(A^*) = \int_{\Gamma_N} g \cdot u_{A^*} \, ds,$$

$D :=$ domaine contenant la forme (simplement connexe).

Construction de Suites Convergentes I
Composites Périodiques

$$\Omega_\varepsilon(\omega) = \{x \in D \ : \ \varepsilon^{-1} x \in \omega\}$$

où

- $\omega \in \mathcal{U}_\#$:= Cellule de périodicité ;
- $\mathcal{U}_\#$:=Ensemble des ouverts Y-périodiques ;
- Y :=$]0,1[^N$ carré unité.

La loi de Hooke limite A^* est donnée par

$$A^*\xi \cdot \xi = \inf_{u \in H^1_\#(\omega)} \int_{Y \cap \omega} A(\xi + e(u)) \cdot (\xi + e(u))\, dx, \tag{2}$$

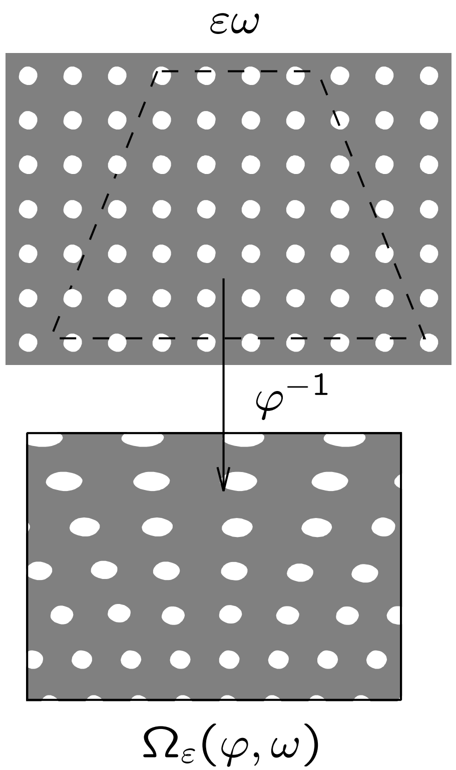
Construction de Suites Convergentes II Composites localement périodiques sur un réseau structuré

$$\Omega_\varepsilon(\omega) = \{x \in D \text{ tel que } \varepsilon^{-1}x \in \omega(x)\},$$

où $\omega(x) \in \mathcal{U}_\#$ dépend de $x \in D$.

L'expression de la loi de Hooke est donnée par la même formule que celle donnée dans le cas périodique.

Construction de Suites Convergentes III
Composites localement périodiques sur un réseau régulier



$$\Omega_\varepsilon(\varphi,\omega) = \{x \in D \ : \ x \in \varphi^{-1}(\varepsilon\omega(x))\},$$

où $\varphi : D \to \mathbb{R}^N$.

$$A^*\xi{\cdot}\xi = \inf_{u \in H^1_\#(\omega)} \int_{Y\cap\omega(x)} A(\xi + e_{v^*}(u)){\cdot}(\xi + e_{v^*}(u))dx,$$

$$\text{où } e_F(u) := \frac{1}{2}(\nabla u F^T + F\nabla u)$$

$$\text{et } v^* := \det(D_x\varphi)^{-1/N} D_x\varphi^T.$$

La loi de Hooke ne dépend que de v^* et ω et est notée $A^*(v^*,\omega)$.

Formulation en terme de variables locales

On est conduit à résoudre le problème d'optimisation

$$\inf_{(\varphi,\omega)} \overline{J}(\Omega_\varepsilon(\varphi,\omega)).$$

Une minimisation directe par rapport au variables (φ,ω) conduit à des minima locaux.

Une formulation équivalente

$$\inf_{(\varphi,\omega)} \overline{J}(\Omega_\varepsilon(\varphi,\omega)) = \inf_{(v^*,\omega)\in\mathcal{V}_{ad}} J(A^*(v^*,\omega))$$

$\mathcal{V}_{ad}$:= Ensemble des paramètres admissibles décrivant une forme composite. On se limite au cas bidimensionnel ($N=2$).

$$\mathcal{V}_{ad} = \Big\{(v^*,\omega) : D \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathcal{U}_{\#} \text{ tel que } v^* \text{ est intégrable}\Big\},$$

où v^* est dit intégrable s'il existe une application $r : D \to \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla r = (\nabla \wedge v_1^*)v_2^* - (\nabla \wedge v_2^*)v_1^*.$$

La Méthode Proposée

- Trouver $(v^*, \omega) \in \mathcal{V}_{ad}$ solution de

$$\min_{(v^*,\omega)\in\mathcal{V}_{ad}} J(A^*(v^*, \omega))$$

  – Trouver inf $J(A^*)$, (Méthode d'homogénéisation) ;
  – Puis imposer graduellement la contrainte d'intégrabilité.

- Construire une suite de formes Ω_ε convergeant vers le composite de loi de Hooke $A^*(v^*, \omega)$.

– Trouver φ tel que

$$v^* = \det(D_x\varphi)^{-1/N} D_x\varphi^T.$$

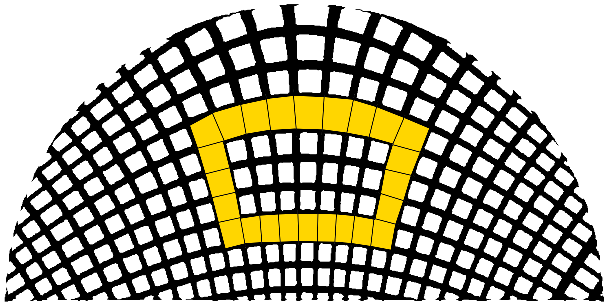
L'existence est assurée par la contrainte d'intégrabilité.

– La suite optimale est $\Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon(\varphi, \omega)$.

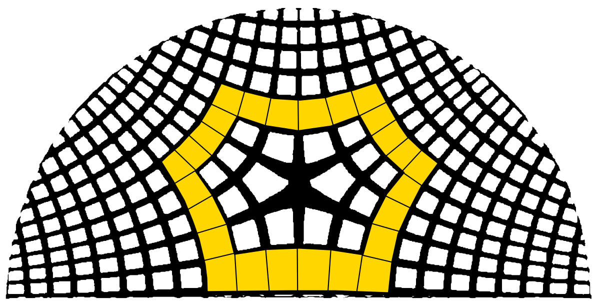
Fin de l'histoire ?

Réseaux non réguliers

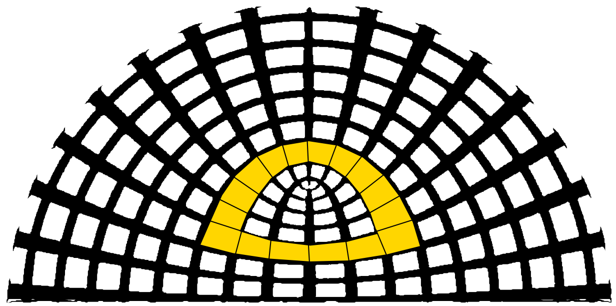
La construction précédente ne permet pas l'inclusion de singularités dans le réseau.



Réseau régulier.
4 virages sont nécessaires pour faire une boucle.

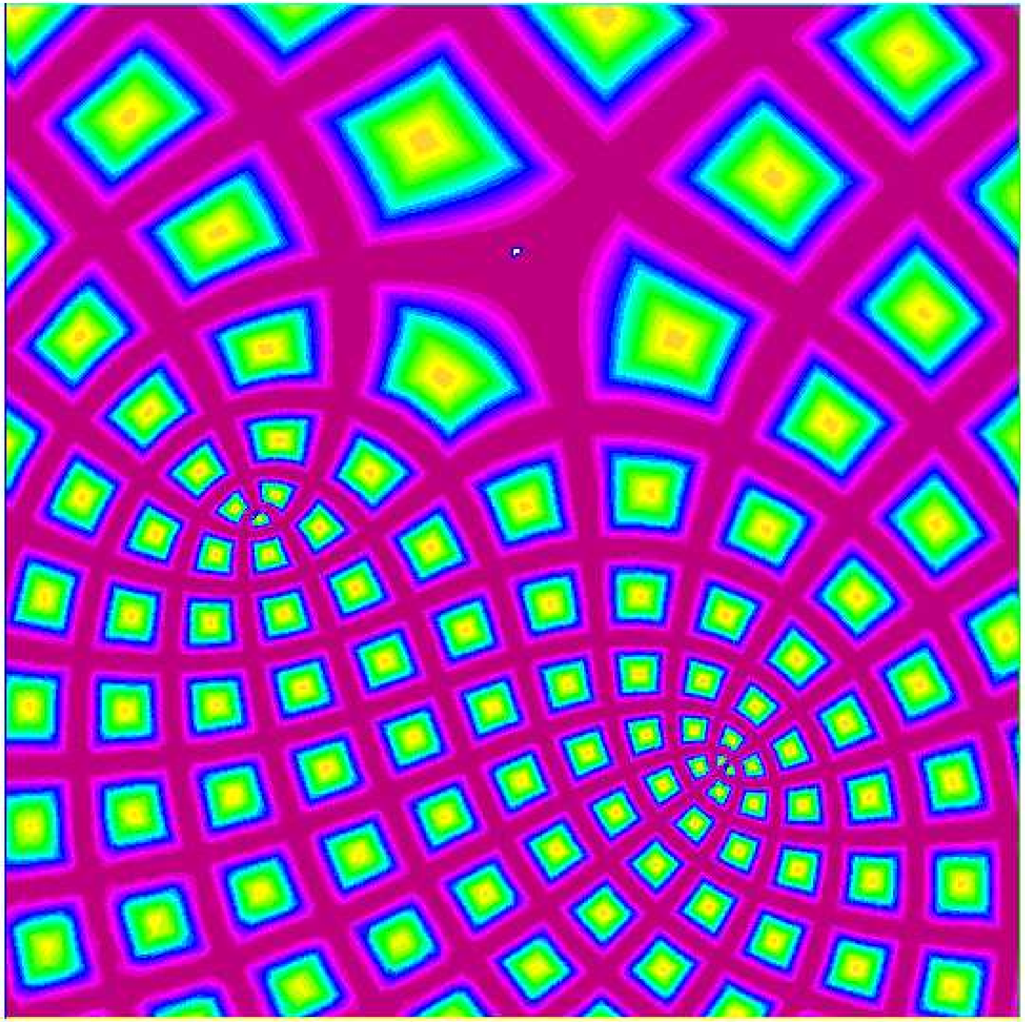


Réseau contenant une singularité "positive".
6 virages sont nécessaires pour faire une boucle.

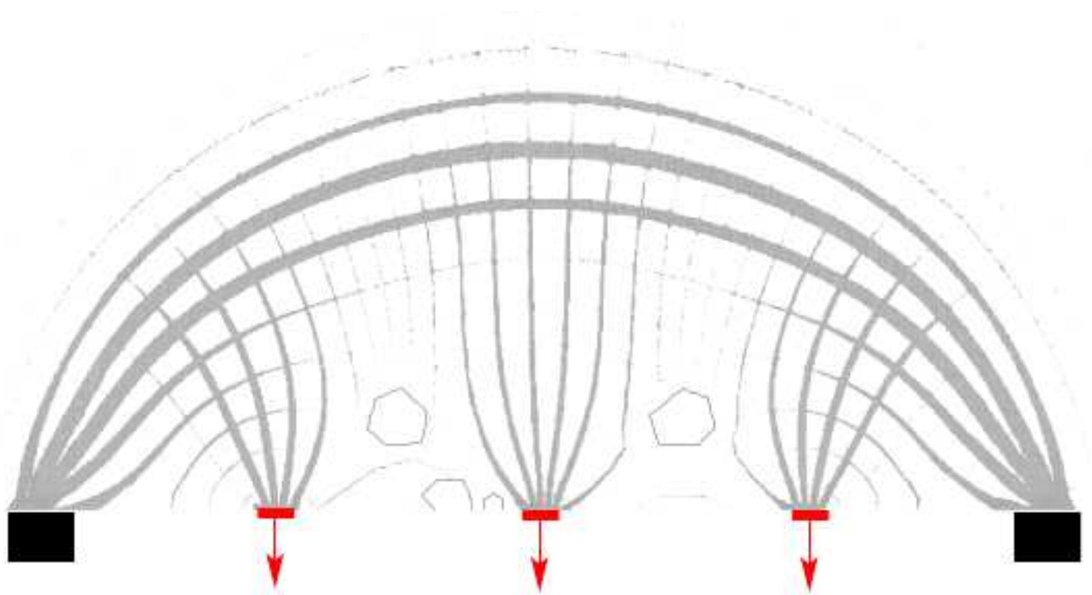


Réseau contenant une singularité "négative".
2 virages sont nécessaires pour faire une boucle.

Avec plusieurs singularités



Les réseaux singuliers peuvent être plus optimaux que les réseaux réguliers



Ce pont optimal possède deux singularités "positives" (entre les forces appliquées)

Construction des suites de formes

Cas singulier I

Quitte à créer des trous dans le domaine D, on peut supposer v^* régulier. On note

$$\mathcal{V}^s_{ad} := \Big\{(v^*, \omega) : D \to \mathsf{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathcal{U}_{\#}/\mathcal{R},\ \text{tel que } v^* \text{ est intégrable}\Big\},$$

où

$$(v^*, \omega)\mathcal{R}(w^*, \widetilde{\omega})$$

ssi

$$(v^*, \omega) = (w^*, \widetilde{\omega}) \text{ ou } (v^*, \omega) = (-w^*, s(\widetilde{\omega})).$$

Pour tout $(v^*, \omega) \in \mathcal{V}^s_{ad}$ il existe une suite convergeant vers le composite de loi de Hooke $A^*(v^*, \omega)$.

Construction des suites de formes

Cas singulier II

On introduit un relèvement du domaine D défini par

$$D_{v^*} := \Big\{(x, w^*) \in D \times \mathsf{SL}(2, \mathbb{R}) \text{ tel que } w^*(x) = \pm v^*(x)\Big\}.$$

et pour tout espace X, on note

$$U(v^*, X) := \{\psi : D_{v^*} \to X \text{ tel que } \\ \psi(x, -w) = -\psi(x, w^*) \text{ pour tout } (x, w^*) \in D_{v^*}\}.$$

l'espace des fonctions anti-symétriques de D_{v^*} à valeurs dans X.

Construction des suites de formes

Cas singulier III

Soit I l'ensemble des trous du domaine D, il existe

$$(\psi^i) \in U(v^*, \mathbb{R}/\mathrm{Z})^I$$

Tel que pour tout $(v^*, \omega) \in \mathcal{V}^s_{ad}$, il existe $\varphi \in U(v^*, \mathbb{R})$ et $(c^i) \in (\mathbb{R}^2)^I$ tel que

$$\Omega_\varepsilon((v^*, \omega), \psi, \varphi, s) = \Big\{ x \in D : \\ \varepsilon^{-1}\varphi(x, v^*(x)) + \sum_{i \in I} \left[\varepsilon^{-1} c^i\right] \psi^i(x, v^*(x)) \in \omega(x) \Big\},$$

converge vers la forme composite $A^*(v^*, \omega)$.

Construction des suites de formes

Cas singulier IV

Si $(v^*, \omega) \in \mathcal{V}^s_{ad}$, il existe r tel que

$$\nabla r = (\nabla \wedge v_1^*) v_2^* - (\nabla \wedge v_2^*) v_1^*.$$

On pose $u^* = e^r v^*$ et on introduit la fonctionnelle

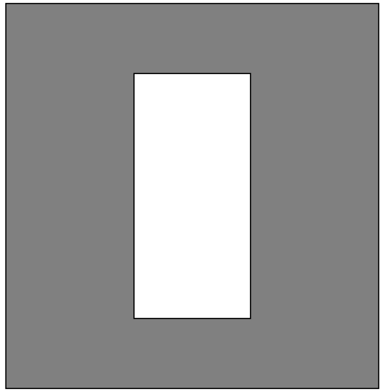
$$J(\varphi, (c^i)) = \|\nabla \cdot (\nabla \varphi + \sum_{i \in I} c^i \nabla \psi^i - u^*)\|^2_{L^2} + \|\nabla \varphi + \sum_{i \in I} c^i \nabla \psi^i - u^*\|^2_{L^2}.$$

Le minimiseur de J par rapport à $\varphi \in U(v^*, \mathbb{R})$ et $(c^i) \in (\mathbb{R}^2)^I$ définit une suite $\Omega_\varepsilon((v^*, \omega), \psi, \varphi, s)$ convergeant vers le composite de loi de Hooke $A^*(v^*, \omega)$.

Implémentation pratique en 2d - I

Cellules de Périodicité

On considère les ouverts ω Y-periodique possédants des trous rectangulaires.



Déformation des cellules

On décompose v^* en deux parties

$$v^* = Q_\alpha e^M, \text{ avec } Q_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix},$$

$|\alpha| = 1$ et $\mathrm{Tr}(M) = 0$. De plus, on suppose que les cellules restent rectangulaires, c'est à dire que M est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & -a_1 \end{pmatrix}$$

Implémentation pratique en 2d - II

Paramètres d'optimisation

Les paramètres d'optimisation sont

- $\beta = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2, 2\alpha_1\alpha_2)$, orientation de la cellule modulo symétrie centrale ;
- $\theta =$ la densité locale ;
- Un paramètre $p =$ décrivant la forme locale du trou effectué dans les cellules de périodicité ;
- $a_1 =$ anisotropie de la cellule.

Approximation des lois de Hooke

Les lois de Hooke sont supposées indépendantes de a_1 et sont calculées approximativement par l'expression analytique connue pour les laminés de rang 2.

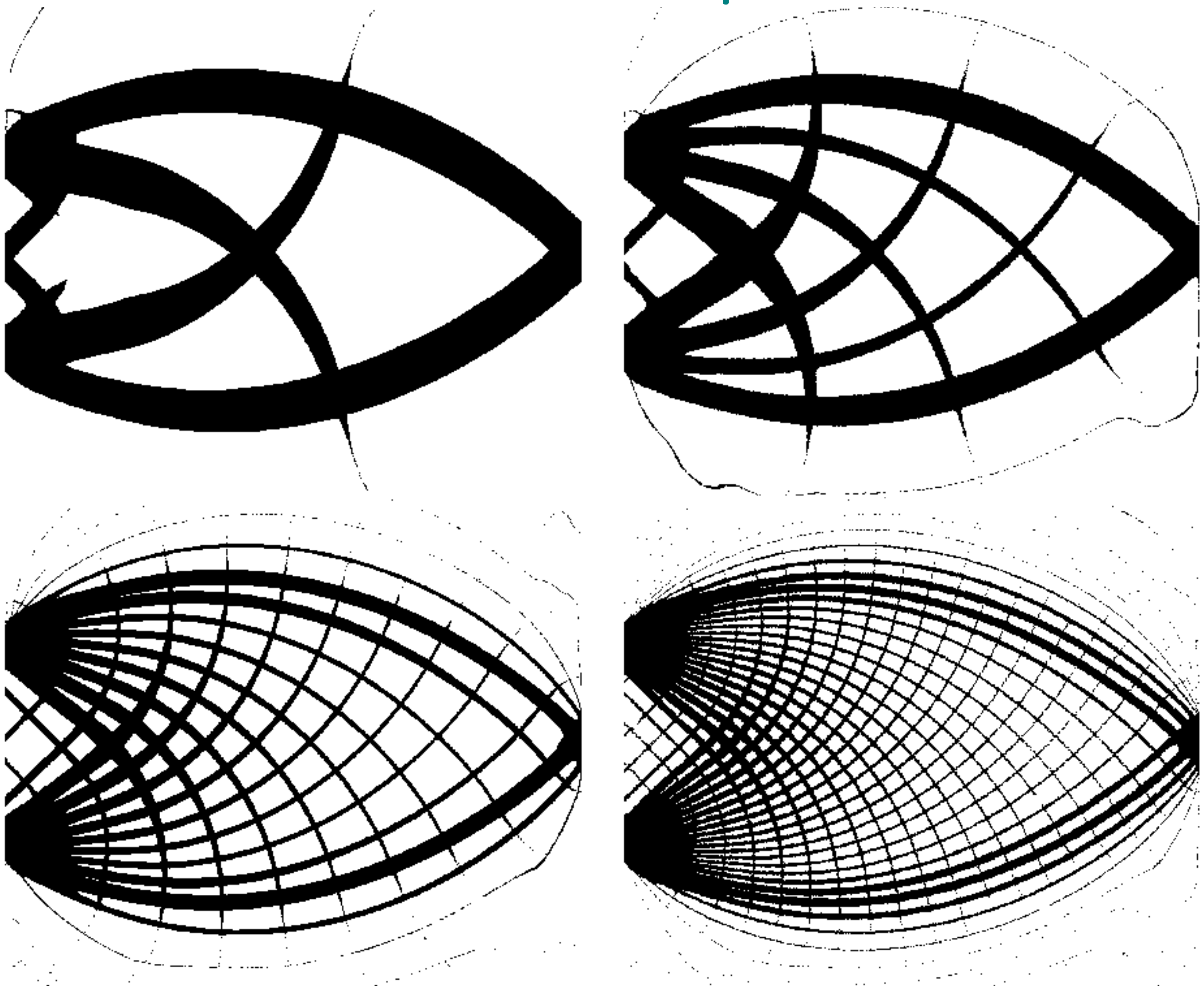
Implémentation pratique en 2d - III
L'Algorithme

1. Résoudre le problème d'homogénéisation par rapport à β, θ et p.

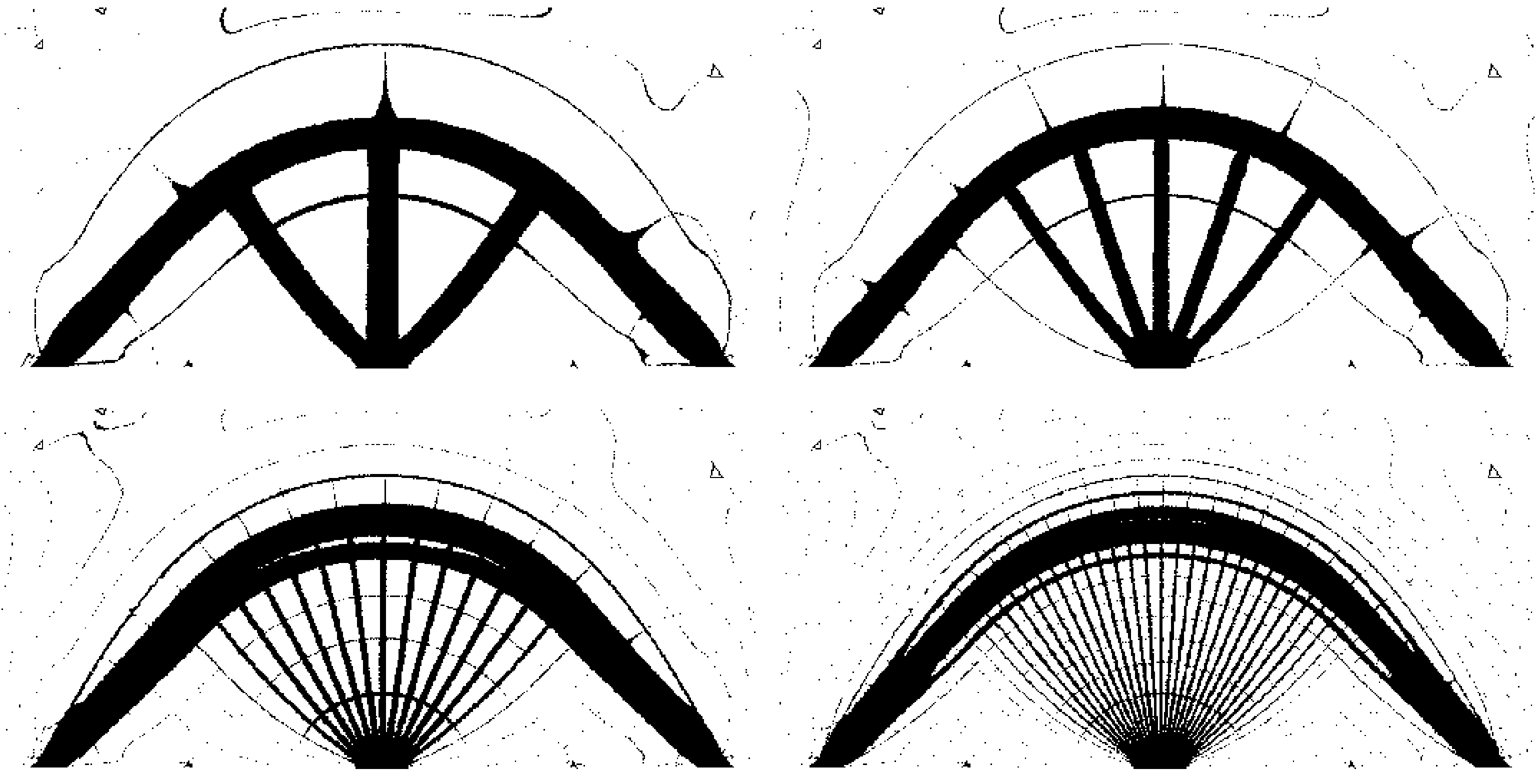
2. Imposer graduellement la contrainte d'intégrabilité (optionel)
$$\nabla \wedge \left(Q_\beta \left(\left(\begin{array}{c} \partial_1 a_1 \\ -\partial_2 a_1 \end{array} \right) - \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} -\operatorname{div}(\beta) \\ \nabla \wedge \beta \end{array} \right) \right) \right) = 0,$$
par une méthode de type gradient initialisée par la solution précédente.

3. Construire une suite de formes convergeant vers le composite obtenu.

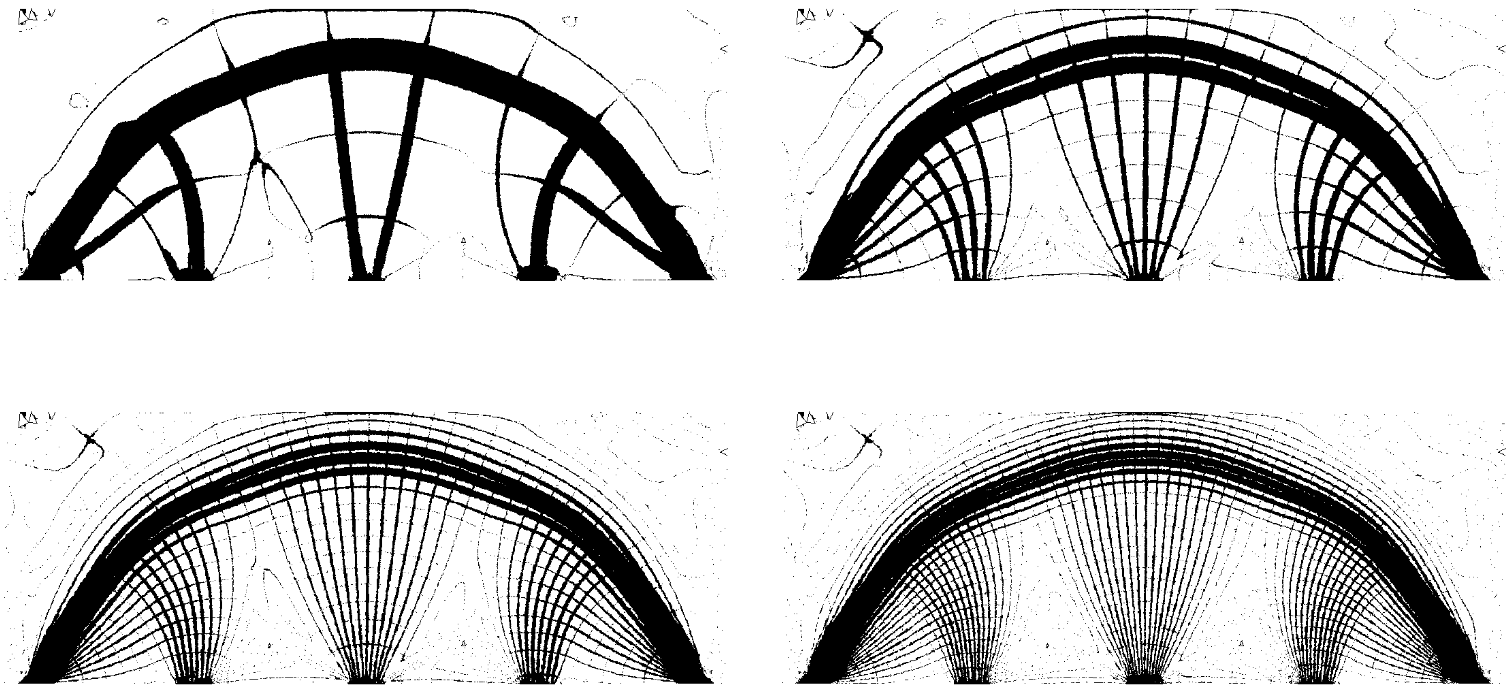
Cantilever Optimal



Pont Optimal



Autre Optimal



Perspectives

- Améliorer la forme finale par une méthode de type ligne de niveaux.
- Étendre la méthode à d'autres fonctions coût (pas évident si on souhaite éviter les minima locaux).
- Étendre la méthode au cas tridimensionnel.
- Intoduire de nouveaux types de dérivation topologique
  - Pour la méthode ligne de niveaux
    Inclusion d'un grand nombre de petits trous (ou de fines barres) en une seule itération ;
  - Pour la méthode d'homogénéisation
    Inclusion de singularités (optimisation topologique du réseau sous-jacent).

Merci pour votre attention !