

SUR LE CALCUL D'ÉCOULEMENTS DIPHASIQUE FORTEMENT COMPRESSIBLES

R. Abgrall

Team Bacchus

INRIA Bordeaux Sud Ouest and Université de Bordeaux Talence, France

8 octobre 2012

1 QUELQUES REMARQUES PRÉLIMINAIRES

2 UN EXEMPLE INTÉRESSANT

3 APPROXIMATION

4 EXEMPLES NUMÉRIQUES

5 CONCLUSIONS

OVERVIEW

1 QUELQUES REMARQUES PRÉLIMINAIRES

2 UN EXEMPLE INTÉRESSANT

3 APPROXIMATION

4 EXEMPLES NUMÉRIQUES

5 CONCLUSIONS

PROBLEME MODELE

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$
$$U(x, t = 0) = U_0(x)$$

$A \in M_n$ diagonalisable à valeur propres réelles

PROBLEME MODELE

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$
$$U(x, t = 0) = U_0(x)$$

$A \in M_n$ diagonalisable à valeur propres réelles

Comment calculer les solutions ... et qu'est ce qu'une solution ?

- On ne se pose pas de question,

MÉTHODES

- On ne se pose pas de question,
- Methodes issues de l'étude de l'équation équivalente
 - ▶ Karni, SINUM, 1992
 - ▶ Mishra et al, M2AN 2012 (a partir de entropy stable schemes)
 - ▶ Path conservative schemes
 - ▶ ...

MÉTHODES

- On ne se pose pas de question,
- Methodes issues de l'étude de l'équation équivalente
 - ▶ Karni, SINUM, 1992
 - ▶ Mishra et al, M2AN 2012 (a partir de entropy stable schemes)
 - ▶ Path conservative schemes
 - ▶ ...

Pas de miracle

UN PETIT EXEMPLE

RA, KARNI, JCP 2010

EQUATIONS D'EULER EN VARIABLES DE LAGRANGE

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v \\ u \\ e \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} -u \\ p \\ pu \end{pmatrix} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v \\ u \\ \varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} p \\ p \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} = 0$$

$$e = \varepsilon + \frac{1}{2} u^2$$

UN PETIT EXEMPLE

RA, KARNI, JCP 2010

EQUATIONS D'EULER EN VARIABLES DE LAGRANGE

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v \\ u \\ e \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} -u \\ p \\ \rho u \end{pmatrix} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v \\ u \\ \varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} p \\ \rho \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} = 0$$

$$e = \varepsilon + \frac{1}{2} u^2$$

Les solutions sont connues

PATH CONSERTATIVE SCHEMES

RELATIONS DE SAUT

$$\sigma(U_R - U_L) = \int_0^1 A\left(\Phi(s; U_L, U_R)\right) \frac{\partial \Phi(s; U_L, U_R)}{\partial s} ds = \begin{pmatrix} -\Delta v \\ \Delta u \\ \int_0^1 \rho \frac{\partial u(s)}{\partial s} ds \end{pmatrix}$$

avec

$$v(s) = sv_L + (1-s)v_R, \quad u(s) = su_L + (1-s)u_R, \quad p(s) = p_L + (1-s)p_R,$$

$$\begin{aligned} \sigma \Delta v + \Delta u &= 0 \\ \sigma \Delta u - \Delta p &= 0 \\ \sigma \Delta \varepsilon - \bar{p} \Delta u &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(D_{j+1/2}^-(U_j^n, U_{j+1}^n) + D_{j-1/2}^+(U_{j-1}^n, U_j^n) \right) \quad (2)$$

où les résidus $D_{j+1/2}^\pm(U_j^n, U_{j+1}^n)$ satisfont la relation de conservation

$$D_{j+1/2}^-(U_j^n, U_{j+1}^n) + D_{j+1/2}^+(U_j^n, U_{j+1}^n) = \int_0^1 A\left(\Phi(s, ; U_j, U_{j+1})\right) \frac{\partial \Phi(s; U_L, U_R)}{\partial s} ds \quad (3)$$

EXEMPLE NUMÉRIQUE

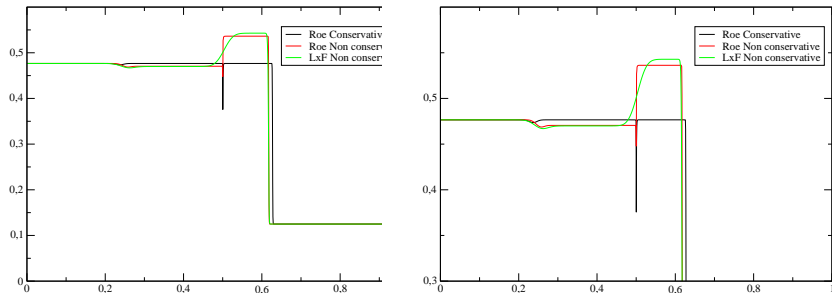


FIGURE: Density computed solutions by Roe-type and LxF-Type path-conservative schemes, and by Roe's scheme for the conservative system.

OVERVIEW

- 1 QUELQUES REMARQUES PRÉLIMINAIRES
- 2 UN EXEMPLE INTÉRESSANT**
- 3 APPROXIMATION
- 4 EXEMPLES NUMÉRIQUES
- 5 CONCLUSIONS

UN EXEMPLE INTÉRESSANT : PROBLÈME MULTIPHASIQUE COMPRESSIBLE

MODÈLE DE KAPILA

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + u \cdot \nabla \alpha_1 = K \operatorname{div} u, \quad K := \frac{\rho_2 \bar{a}_2^2 - \rho_1 \bar{a}_1^2}{\frac{\rho_1 \bar{a}_1^2}{\alpha_1} + \frac{\rho_2 \bar{a}_2^2}{\alpha_2}}$$

$$\frac{\partial(\alpha_1 \rho_1)}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_1 \rho_1 u) = 0$$

$$\frac{\partial(\alpha_2 \rho_2)}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_2 \rho_2 u) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}((E + p)u) = 0.$$

- 2 phases compressibles, 2 équations d'état
- α_1 : fraction de volume de la phase 1,
- ρ_1, ρ_2 densités
- u : vitesse
- E énergie totale, une seule pression

ORIGINE DU SYSTÈME

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \alpha^{(k)}}{\partial t} + \mathbf{u}_I \cdot \nabla \alpha^{(k)} &= \mu(P^{(k)} - P^{(\bar{k})}), \\
 \frac{\partial(\alpha^{(k)} \rho^{(k)})}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha^{(k)} \rho^{(k)} \mathbf{u}^{(k)}) &= 0, \\
 \frac{\partial(\alpha^{(k)} \rho^{(k)} \mathbf{u}^{(k)})}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha^{(k)} \rho^{(k)} \mathbf{u}^{(k)} \otimes \mathbf{u}^{(k)}) + \nabla(\alpha^{(k)} P^{(k)}) &= P_I \nabla \alpha^{(k)} \\
 &\quad + \lambda(\mathbf{u}^{(\bar{k})} - \mathbf{u}^{(k)}), \\
 \frac{\partial(\alpha^{(k)} \rho^{(k)} E^{(k)})}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha^{(k)} (\rho^{(k)} E^{(k)} + P^{(k)}) \mathbf{u}^{(k)}) &= P_I \mathbf{u}_I \cdot \nabla \alpha^{(k)} \\
 &\quad - \mu P_I (P^{(k)} - P^{(\bar{k})}) \\
 &\quad + \lambda \mathbf{u}_I (\mathbf{u}^{(\bar{k})} - \mathbf{u}^{(k)}).
 \end{aligned}$$

DE 7 À 5 ÉQUATIONS, H. GUILLARD

- Choix des vitesse d'interface et pression d'interface (Seguin, Coquel, et al.)

ORIGINE DU SYSTÈME

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \alpha^{(k)}}{\partial t} + \mathbf{u}_I \cdot \nabla \alpha^{(k)} &= \mu (P^{(k)} - P^{(\bar{k})}), \\
 \frac{\partial (\alpha^{(k)} \rho^{(k)})}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha^{(k)} \rho^{(k)} \mathbf{u}^{(k)}) &= 0, \\
 \frac{\partial (\alpha^{(k)} \rho^{(k)} \mathbf{u}^{(k)})}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha^{(k)} \rho^{(k)} \mathbf{u}^{(k)} \otimes \mathbf{u}^{(k)}) + \nabla (\alpha^{(k)} P^{(k)}) &= P_I \nabla \alpha^{(k)} \\
 &\quad + \lambda (\mathbf{u}^{(\bar{k})} - \mathbf{u}^{(k)}), \\
 \frac{\partial (\alpha^{(k)} \rho^{(k)} \mathbf{E}^{(k)})}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha^{(k)} (\rho^{(k)} \mathbf{E}^{(k)} + P^{(k)} \mathbf{u}^{(k)})) &= P_I \mathbf{u}_I \cdot \nabla \alpha^{(k)} \\
 &\quad - \mu P_I (P^{(k)} - P^{(\bar{k})}) \\
 &\quad + \lambda \mathbf{u}_I (\mathbf{u}^{(\bar{k})} - \mathbf{u}^{(k)}).
 \end{aligned}$$

DE 7 À 5 ÉQUATIONS, H. GUILLARD

- Choix des vitesse d'interface et pression d'interface (Seguin, Coquel, et al.)
- Développement asymptotique quand $\mu \rightarrow +\infty$ et μ/λ borné.

ORIGINE DU SYSTÈME

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \alpha^{(k)}}{\partial t} + \mathbf{u}_I \cdot \nabla \alpha^{(k)} &= \mu(P^{(k)} - P^{(\bar{k})}), \\
 \frac{\partial(\alpha^{(k)} \rho^{(k)})}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha^{(k)} \rho^{(k)} \mathbf{u}^{(k)}) &= 0, \\
 \frac{\partial(\alpha^{(k)} \rho^{(k)} \mathbf{u}^{(k)})}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha^{(k)} \rho^{(k)} \mathbf{u}^{(k)} \otimes \mathbf{u}^{(k)}) + \nabla(\alpha^{(k)} P^{(k)}) &= P_I \nabla \alpha^{(k)} \\
 &\quad + \lambda(\mathbf{u}^{(\bar{k})} - \mathbf{u}^{(k)}), \\
 \frac{\partial(\alpha^{(k)} \rho^{(k)} \mathbf{E}^{(k)})}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha^{(k)}(\rho^{(k)} \mathbf{E}^{(k)} + P^{(k)} \mathbf{u}^{(k)})) &= P_I \mathbf{u}_I \cdot \nabla \alpha^{(k)} \\
 &\quad - \mu P_I (P^{(k)} - P^{(\bar{k})}) \\
 &\quad + \lambda \mathbf{u}_I (\mathbf{u}^{(\bar{k})} - \mathbf{u}^{(k)}).
 \end{aligned}$$

DE 7 À 5 ÉQUATIONS, H. GUILLARD

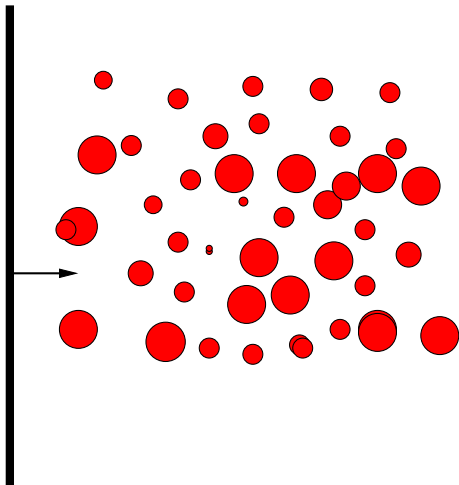
- Choix des vitesses d'interface et pression d'interface (Seguin, Coquel, et al.)
- Développement asymptotique quand $\mu \rightarrow +\infty$ et μ/λ borné.
- λ, μ liés à l'aire interfaciale entre phases

RELATIONS DE SAUT

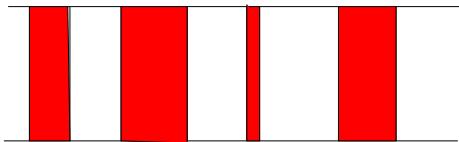
R. SAUREL ET AL., SHOCK WAVES, 2007

- $Y := \frac{\alpha_1 \rho_1}{\alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2}, \Delta Y = 0,$
- $\Delta \varepsilon_i + \frac{\rho_L + \rho_R}{2} \Delta u = 0,$
- $(\Delta u)^2 + \Delta p \Delta v = 0$
- Obtenues de manière “empiriques”.
- Validées par des résultats expérimentaux russes.

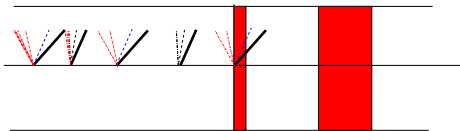
JUSTIFICATION GRAPHIQUE



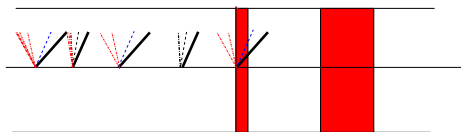
JUSTIFICATION GRAPHIQUE



JUSTIFICATION GRAPHIQUE



JUSTIFICATION GRAPHIQUE



Problème : justification théorique de la stabilité du mécanisme

OVERVIEW

1 QUELQUES REMARQUES PRÉLIMINAIRES

2 UN EXEMPLE INTÉRESSANT

3 APPROXIMATION

4 EXEMPLES NUMÉRIQUES

5 CONCLUSIONS

APPROXIMATION

Comment reproduire les solutions du système ?

Comment reproduire les solutions du système ?
Le cas intéressant : discontinuités très fortes

TENTATIVE 1 : DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES DE SCHÉMAS

AVEC V. PERRIER, SIAM MMS, 2005

IDÉE DE LA MÉTHODE

- On part d'une représentation probabiliste des variables (exemple : $\alpha = E(1_\Sigma)$, Σ phase liquide/gazeuse,
- Pour chaque évènement : écrire un schéma de Godunov (semi-discret)
- Prendre l'espérance des schémas (RA, R. Saurel, JCP 2003)
- Apparaissent naturellement des termes de relaxation,
- Faire le développement asymptotique du schéma (imitation du cas continu)

TENTATIVE 1 : DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES DE SCHÉMAS

AVEC V. PERRIER, SIAM MMS, 2005

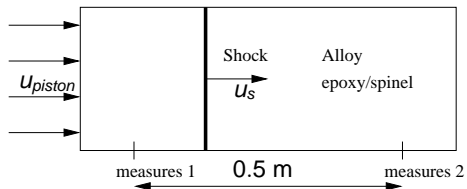
IDÉE DE LA MÉTHODE

- On part d'une représentation probabiliste des variables (exemple : $\alpha = E(1_\Sigma)$, Σ phase liquide/gazeuse,
- Pour chaque évènement : écrire un schéma de Godunov (semi-discret)
- Prendre l'espérance des schémas (RA, R. Saurel, JCP 2003)
- Apparaissent naturellement des termes de relaxation,
- Faire le développement asymptotique du schéma (imitation du cas continu)

AVANTAGE-INCONVENIENTS

- Traitement naturel des produits non conservatifs
- Schéma semi discret : rôle de la dissipation numérique induite ? ? ? ?
- Relativement complexe

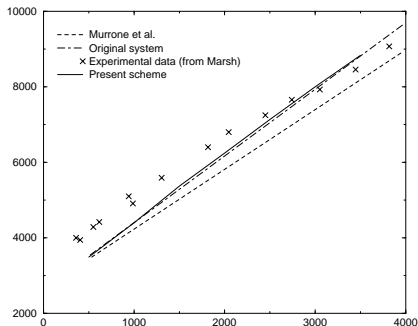
VITESSE D'UN CHOC DANS UN ALLIAGE EPOXY-SPINEL



CONDITIONS

- $\rho_1 = 1185 \text{ kg.m}^{-3}$, $\rho_2 = 3622 \text{ kg.m}^{-3}$.
- Fractions de volume : $\alpha_1 = 0.595$ $\alpha_2 = 0.405$.
- Stiffened gas EOS

VITESSE D'UN CHOC DANS UN ALLIAGE EPOXY-SPINEL



CONDITIONS

- $\rho_1 = 1185 \text{ kg.m}^{-3}$, $\rho_2 = 3622 \text{ kg.m}^{-3}$.
- Fractions de volume : $\alpha_1 = 0.595$ $\alpha_2 = 0.405$.
- Mesures de la position/chronologie du choc à $x = 0.1 \text{ m}$ et $x = 0.6 \text{ m}$:

UN SCHÉMA DE TYPE ROE POUR LE MODELE DE KAPILA

PRINCIPE

- Comment lineariser les relations non conservatives ?

UN SCHÉMA DE TYPE ROE POUR LE MODELE DE KAPILA

PRINCIPE

- Comment lineariser les relations non conservatives ?
- Idée : respecter les relations de saut.

$$A\Delta U = \Delta F = \sigma\Delta U$$

UN SCHÉMA DE TYPE ROE POUR LE MODELE DE KAPILA

PRINCIPE

- Comment lineariser les relations non conservatives ?

C'est compliqué : passer en lagrangien

ÉCRITURE LAGRANGIENNE

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + u \cdot \nabla \alpha_1 = K \operatorname{div} u, \quad K := \frac{\rho_2 a_2^2 - \rho_1 a_1^2}{\frac{\rho_1 a_1^2}{\alpha_1} + \frac{\rho_2 a_2^2}{\alpha_2}}$$

$$\frac{\partial(\alpha_1 \rho_1)}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_1 \rho_1 u) = 0$$

$$\frac{\partial(\alpha_2 \rho_2)}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_2 \rho_2 u) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}((E + p)u) = 0.$$

ÉCRITURE LAGRANGIENNE

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + u \cdot \nabla \alpha_1 = K \operatorname{div} u,$$

$$K := \frac{\rho_2 a_2^2 - \rho_1 a_1^2}{\frac{\rho_1 a_1^2}{\alpha_1} + \frac{\rho_2 a_2^2}{\alpha_2}}$$

$$\frac{\partial(\alpha_1 \rho_1)}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_1 \rho_1 u) = 0$$

$$\frac{\partial(\alpha_2 \rho_2)}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_2 \rho_2 u) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}((E + p)u) = 0.$$

$$\frac{DY}{Dt} = 0$$

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{K}{v} \frac{\partial u}{\partial m}$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial m} = 0$$

$$\frac{Du}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial m} = 0$$

$$\frac{De}{Dt} + \frac{\partial p u}{\partial m} = 0$$

ON Y VA...

Matrice jacobienne :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -K/\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ p_\alpha & p_Y & p_\tau & -p_\varepsilon u & p_\varepsilon \\ up_\alpha & up_Y & up_\tau & p - p_\varepsilon u^2 & up_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$P(\lambda) = -\lambda^3 \left(\lambda^2 - \left(p_\varepsilon p - p_\tau - \frac{K}{\tau} p_\alpha \right) \right)$$

3 valeurs propres

- $\lambda = 0$ triple
- $\lambda = \pm C$,

$$C^2 = p_\varepsilon p - p_\tau - \frac{K}{\tau} p_\alpha$$

$$\frac{1}{C^2} = \frac{Y_1}{C_1^2} + \frac{Y_2}{C_2^2}$$

APRÈS QUELQUES RUSES DE CALCUL

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\tilde{K}/\tilde{\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \tilde{p}_\alpha & \tilde{p}_\gamma & \tilde{p}_\tau & -\tilde{p}_\varepsilon \tilde{u} & \tilde{p}_\varepsilon \\ \tilde{u} \tilde{p}_\alpha & \tilde{u} \tilde{p}_\gamma & \tilde{u} \tilde{p}_\tau & \tilde{p} - \tilde{p}_\varepsilon (\tilde{u})^2 & \tilde{u} \tilde{p}_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

relation clef :

$$\Delta p = \tilde{p}_\alpha \Delta \alpha + \tilde{p}_\gamma \Delta \gamma + \tilde{p}_\tau \Delta \tau + \tilde{p}_\varepsilon \Delta \varepsilon$$

APRÈS QUELQUES ASTUCES DE CALCUL

On définit : $\bar{Y}_i = \frac{(Y_i)_L + (Y_i)_R}{2}$, $\bar{p} = \frac{p_L + p_R}{2}$ et $\bar{\alpha}_i = \frac{(\alpha_i)_L + (\alpha_i)_R}{2}$, etc.

On pose

$$\bar{C}_i^2 = \bar{p} \bar{p}_{\varepsilon_i} - \bar{p}_{\tau_i},$$

$$\frac{1}{\bar{p}_\varepsilon} = \sum_i \frac{\bar{Y}_i}{\bar{p}_{\varepsilon_i}}, \quad \bar{p}_{Y_1} = \bar{p}_\varepsilon \left(\bar{\varepsilon}_1 + \frac{\bar{p}_{\tau_1}}{\bar{p}_{\varepsilon_1}} \bar{\tau}_1 - \bar{\varepsilon}_2 + \frac{\bar{p}_{\tau_2}}{\bar{p}_{\varepsilon_2}} \bar{\tau}_2 \right)$$

$$\bar{p}_\alpha = \bar{p}_\varepsilon \left(\frac{\bar{p}_{\tau_1}}{\bar{p}_{\varepsilon_1}} - \frac{\bar{p}_{\tau_2}}{\bar{p}_{\varepsilon_2}} \right) \bar{\tau}, \quad \bar{p}_\tau = \bar{p}_\varepsilon \left(\sum_i \frac{\bar{p}_{\tau_i}}{\bar{p}_{\varepsilon_i}} \bar{\alpha}_i \right)$$

AVEC CE CHOIX

$$\bar{A}\Delta U = \sigma\Delta U$$

si et seulement si

- $\sigma = 0$ et on a égalité de la vitesse et de la pression,
- ou

$$\Delta Y = 0$$

$$\Delta\varepsilon_i + \bar{p}\Delta\tau_i = 0$$

$$\Delta p \Delta\tau + (\Delta u)^2 = 0$$

PASSAGE LAGRANGE-EULER : UTILISER LA MÉTHODE DE GALICE

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha}{\partial x} - K \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

avec $U = (\rho Y_1, \rho, \rho u, E)^T$ et $F(U) = (\rho u Y_1, \rho u, \rho u^2 + p, u(E + p))^T$. On pose $U = \rho n + U_0$ avec $n = (0, 1, 0, 0)^T$, $U_0 = \rho(Y_1, 0, u, e)^T$ et $F = uU + G_0$ avec $G_0 = (0, 0, p, \rho u)^T$.

En coordonnées de Lagrange :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial m} = 0$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\kappa}{\tau} \frac{\partial u}{\partial m}$$

avec $W = \tau n + \tau U_0$ et $G = G_0 - un$.

On écrit

$$dF = u dU + U du + dG_0 = u dU + U du + d_U G_0 + p_\alpha J d\alpha, \dots$$

$I = (0, uK/\rho, -K/\rho, 0)$ et par abus de langage $J = (0, 0, p_\alpha, u p_\alpha)^T$

$$A^E = \begin{pmatrix} u \\ J \\ u \text{Id} + \frac{1}{\rho} W_U A_U^L U_W \end{pmatrix} = u \text{Id} + \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1,4} \\ \mathbf{0}_{4,1} & W_U \end{pmatrix} A_L \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1,4} \\ \mathbf{0}_{4,1} & U_W \end{pmatrix}$$

AU NIVEAU DISCRET

On introduit $a = \sqrt{\frac{\rho_L}{\rho_R}}$, on définit les deux moyennes

$$f^a = af_L + (1 - a)f_R, \quad f_a = (1 - a)f_R + af_L,$$

on obtient

$$\Delta(fg) = f^a \Delta g + g_a \Delta f, \quad ET(\rho f)_a = \rho_a f^a, \quad \rho_a = \sqrt{\rho_L \rho_R}$$

On peut alors imiter les calculs continus et :

$$\overline{A_E} = \overline{u} \mathbf{Id} + \frac{1}{\underline{\rho}} \overline{U_W A_L W_U}.$$

Les deux matrices sont (donc) simultanément diagonalisables

AVEC CE CHOIX :

- ne marche pas!

AVEC CE CHOIX :

- ne marche pas !
- La raison : dissipation numérique. Le niveau de dissipation n'est pas correct : back to Karni

MÉTHODE DE GLIM

LES CHOCS SANS DISSIPATION NUMÉRIQUE

- On dispose d'un solveur exact : encode le bon niveau de dissipation au travers des chocs
- Méthode de Glim sans prioriture

MÉTHODE DE GLIM

LES CHOCS SANS DISSIPATION NUMÉRIQUE

- On dispose d'un solveur exact : encode le bon niveau de dissipation au travers des chocs
- Méthode de Glim sans prioriture

Mais c'est bruité

HYBRIDATION

- On construit un senseur de choc,

HYBRIDATION

- On construit un senseur de choc,
- Hybridation :
 - ▶ Si le senseur dit "NON" : méthode de Roe
 - ▶ Si le senseur dit "OUI" : méthode de Glim.

IMPLÉMENTATION PRATIQUE

SCHEMA DE ROE : FLUCTUATION SPLITTING

- Premier ordre

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(A_{i+1/2}^-(U_{i+1} - U_i) + A_{i-1/2}^+(U_i - U_{i-1}) \right)$$

- Second ordre : en fait on écrit la relation précédente en décomposant suivant les vecteurs propres

$$A_{i+1/2}^\pm (U_{i+1} - U_i) \sum_{\xi \text{ vp}} \lambda_\xi^\pm \alpha \left(U_{i+1} - U_i \right) r_{i+1/2}^\xi$$

puis au second ordre

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\Phi_{i+1/2}^- + \Phi_{i-1/2}^+ \right), \quad \Phi_{i+1/2}^- = \sum_{\xi \text{ vp}} \lambda_\xi^\pm \left(\alpha \left(U_{i+1} - U_i \right) \right)^* r_{i+1/2}^\xi$$

et $\left(\alpha \left(U_{i+1} - U_i \right) \right)^*$ obtenu selon Sweby, SINUM 1984 (avec superbee)

IMPLÉMENTATION PRATIQUE

SCHEMA DE ROE : FLUCTUATION SPLITTING

- Premier ordre

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta X} \left(A_{i+1/2}^- (U_{i+1} - U_i) + A_{i-1/2}^+ (U_i - U_{i-1}) \right)$$

- Second ordre : en fait on écrit la relation précédente en décomposant suivant les vecteurs propres

$$A_{i+1/2}^\pm (U_{i+1} - U_i) \sum_{\xi \text{ vp}} \lambda_\xi^\pm \alpha \left(U_{i+1} - U_i \right) r_{i+1/2}^\xi$$

puis au second ordre

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta X} \left(\Phi_{i+1/2}^- + \Phi_{i-1/2}^+ \right), \quad \Phi_{i+1/2}^- = \sum_{\xi \text{ vp}} \lambda_\xi^\pm \left(\alpha \left(U_{i+1} - U_i \right) \right)^* r_{i+1/2}^\xi$$

et $\left(\alpha \left(U_{i+1} - U_i \right) \right)^*$ obtenu selon Sweby, SINUM 1984 (avec superbee)

OVERVIEW

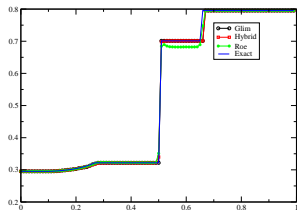
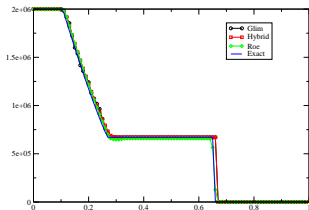
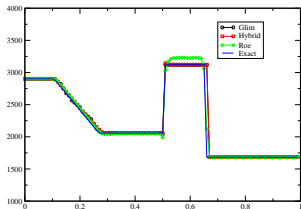
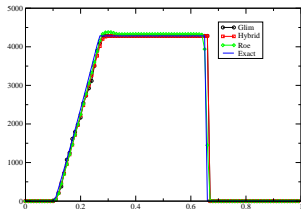
- 1 QUELQUES REMARQUES PRÉLIMINAIRES
- 2 UN EXEMPLE INTÉRESSANT
- 3 APPROXIMATION
- 4 EXEMPLES NUMÉRIQUES
- 5 CONCLUSIONS

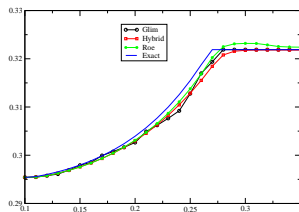
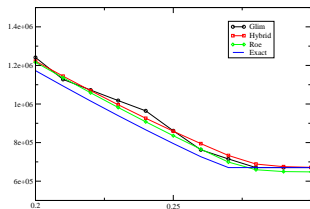
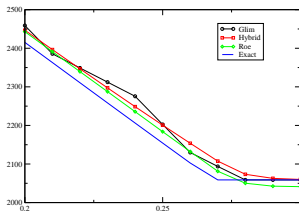
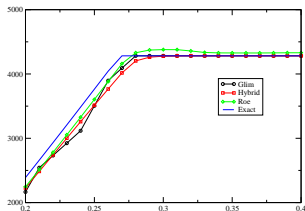
UN CAS DE TUBE À CHOC RAIDE

	α	ρ_1 (kg/m ³)	ρ_2 (kg/m ³)	u (m/s)	p (Pa)
Left	0.2954	1185	3622	0	$2 \cdot 10^{11}$
Right	0.7954	1185	3622	0	$1 \cdot 10^5$

EOS : gaz raide

$$\gamma_1 = 2.43, p_1^\infty = 5.3 \cdot 10^9, \quad \gamma_2 = 1.62, p_2^\infty = 1.41 \cdot 10^{11}.$$


 α_1

 p

 ρ

 u


 α_1

 p

 ρ

 U

OVERVIEW

- 1 QUELQUES REMARQUES PRÉLIMINAIRES
- 2 UN EXEMPLE INTÉRESSANT
- 3 APPROXIMATION
- 4 EXEMPLES NUMÉRIQUES
- 5 CONCLUSIONS**

CONCLUSIONS

- On a exploré une gamme de solutions qui ne marchent pas, au moins pour les chocs forts.
- Role de la dissipation numérique
- On a une solution qui marche pour des chocs forts.
- Algo très robuste : Roe+ décomposition caractéristique+ limitation sur les incréments de flux (RDS)
- ...

CONCLUSIONS

- On a exploré une gamme de solutions qui ne marchent pas, au moins pour les chocs forts.
- Role de la dissipation numérique
- On a une solution qui marche pour des chocs forts.
- Algo très robuste : Roe+ décomposition caractéristique+ limitation sur les incréments de flux (RDS)
- ...

Revisiter les méthodes de front tracking ?