

Optimisation de formes par analyse de sensibilité topologique

Samuel Amstutz

Laboratoire de Mathématiques d'Avignon



Ecole Polytechnique
9 janvier 2012

Introduction et notations

Nous cherchons à résoudre

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{E}} \mathcal{J}(\Omega)$$

où

- ▶ \mathcal{E} est un ensemble de domaines admissibles (de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3),
- ▶ $\mathcal{J}(\Omega)$ est une fonctionnelle de formes.

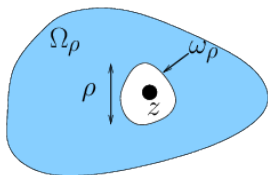
En *optimisation de formes classique*, \mathcal{E} est un ensemble de domaines de même topologie.

En *optimisation de formes topologique*, la topologie du domaine n'est pas imposée.

Les problèmes d'optimisation topologique sont en général mal posés (absence de minimum global).

Analyse de sensibilité topologique : savoir où placer des trous.

ANALYSE DE SENSIBILITÉ TOPOLOGIQUE



- ▶ $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$
- ▶ $\omega \subset \mathbb{R}^d$
- ▶ $z \in \Omega$
- ▶ $\omega_\rho = z + \rho\omega$
- ▶ $\Omega_\rho = \Omega \setminus \overline{\omega_\rho}$

On cherche un développement asymptotique de la forme

$$\mathcal{J}(\Omega_\rho) - \mathcal{J}(\Omega) = f(\rho)g_\Omega(z) + o(f(\rho)).$$

La fonction g_Ω est appelée gradient topologique et $f(\rho) \geq 0$ est généralement donnée pour une e.d.p. par les relations suivantes.

CL au bord du trou	2D	3D
Neumann ou transmission	ρ^2	ρ^3
Dirichlet	$\frac{-1}{\ln \rho}$	ρ

Problème elliptique pour une inclusion

On considère une fonction coût de la forme

$$\mathcal{J}(\Omega_\rho) = J_\rho(u_\rho) =: j(\rho)$$

où u_ρ est solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha_\rho A \nabla u_\rho) = \sigma & \text{dans } \Omega \\ u_\rho = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec A une matrice SDP et

$$\alpha_\rho = \begin{cases} \alpha_0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{\omega_\rho} \\ \alpha_1 & \text{dans } \omega_\rho \end{cases}$$

$\alpha_0, \alpha_1 > 0$, constants au voisinage de z .

Pour simplifier la présentation, on suppose α_0, α_1 constants.

On obtient le développement asymptotique

$$j(\rho) - j(0) = \rho^d \left[\alpha_0 \nabla u_0(z)^T \mathcal{P}_{\omega,r} \nabla v_0(z) + \delta_J \right] + o(\rho^d).$$

Les fonctions u_0 et v_0 sont les états directs et adjoints pour le problème non perturbé.

La matrice de polarisation $\mathcal{P}_{\omega,r}$ est définie par

$$(\mathcal{P}_{\omega,r})_{ij} = \int_{\partial\omega} p_i x_j ds,$$

où $p_i \in H^{1/2}(\partial\omega)$ est solution de

$$\frac{r+1}{r-1} \frac{p_i(x)}{2} + \int_{\partial\omega} p_i(y) A \nabla E(x-y) \cdot n(x) ds(y) = A e_i \cdot n \quad \forall x \in \partial\omega,$$

$$\text{avec} \quad r = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \quad e_i \text{ le } i\text{-ème vecteur de base de } \mathbb{R}^d,$$

E la solution élémentaire de $u \mapsto -\operatorname{div}(A \nabla u)$.

Le terme complémentaire δ_J dépend de la fonction coût.

Quelques commentaires.

- ▶ La matrice de polarisation caractérise à l'ordre 1 le champ lointain diffracté par l'inclusion. Cette notion remonte à Pólya et Szegö (1951) et a été largement étudiée. Il est en particulier démontré que

$$\mathcal{P}_{\omega,r} \text{ est } \begin{cases} \text{SDP si } r > 1, \\ \text{SDN si } r < 1. \end{cases}$$

- ▶ On montre que le développement asymptotique topologique pour un trou avec condition de Neumann peut être obtenu en prenant $\alpha_1 = 0$ (i.e. $r = 0$) dans les formules finales.
- ▶ On obtient la matrice de polarisation d'une fissure avec condition de Neumann comme limite d'une ellipse ou d'un ellipsoïde (formel), ou directement en utilisant un potentiel de double couche.

Exemples de matrices de polarisation (valable aussi pour $r = 0$)

Laplacien ($A = I$) pour une boule ou une ellipse de semi-axes a et b

dimension	ω	$\mathcal{P}_{\omega,r}$
$d = 2$	$B(0, 1)$	$2 \frac{r-1}{r+1} \omega I$
$d = 3$	$B(0, 1)$	$3 \frac{r-1}{r+2} \omega I$
$d = 2$	$\mathcal{E}(0, a, b)$	$ \omega (r-1) \begin{pmatrix} \frac{a+b}{a+rb} & 0 \\ 0 & \frac{a+b}{b+ra} \end{pmatrix}$

Pour une fissure droite (resp. circulaire plane) de normale unitaire \mathbf{n} et condition de Neumann :

$$\mathcal{P}_{B_1(0,1),0} = -\pi \mathbf{nn}^T \quad (d = 2), \quad \mathcal{P}_{B_2(0,1),0} = -\frac{8}{3} \mathbf{nn}^T \quad (d = 3).$$

Elasticité linéaire. cf Garreau-Guillaume-Masmoudi, Ammari-Kang.

Problèmes paraboliques et hyperboliques

(avec T. Takahashi et B. Vexler)

Pour $k = 1, 2$ on considère le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_\rho \frac{\partial^k u_\rho}{\partial t^k} - \operatorname{div}(\alpha_\rho A \nabla u_\rho) = F_\rho \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u_\rho = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ \text{conditions initiales,} \end{array} \right.$$

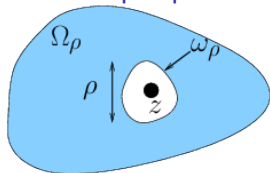
et une fonction coût de la forme

$$j(\rho) = \int_0^T J_\rho(u_\rho(\cdot, t)) dt.$$

La même matrice de polarisation est impliquée, mais il y a des termes “temporels” complémentaires. Pour $k = 2$:

$$j(\rho) - j(0) = \rho^d \int_0^T \left[-(\beta_1 - \beta_0) |\omega| \partial_t u_0(z, t) \partial_t v_0(z, t) \right. \\ \left. + \alpha_0 \nabla u_0(z, t)^T \mathcal{P}_{\omega, r} \nabla v_0(z, t) - |\omega| (F_1 - F_0)(z, t) + \delta_J \right] dt + o(\rho^d).$$

Problème elliptique avec condition de Dirichlet



- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$)
- $\omega \subset \mathbb{R}^d$
- $\omega_\rho = z + \rho\omega$
- $\Omega_\rho = \Omega \setminus \overline{\omega_\rho}$
- $\sigma \in H^2(\Omega)$

On considère toujours une fonction coût de la forme

$$j(\rho) = J_\rho(u_\rho),$$

mais avec un état u_ρ solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u_\rho) + \Phi(u_\rho) = \sigma & \text{dans } \Omega_\rho, \\ u_\rho = 0 & \text{sur } \partial\omega_\rho, \\ u_\rho = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec $\Phi : H^1(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})'$ pour tout ouvert \mathcal{O} .

La fonction Φ doit satisfaire des hypothèses, vérifiées en particulier si Φ est linéaire, pour le système de Navier-Stokes incompressible et pour certaines équations de Helmholtz non-linéaires.

3D

On obtient

$$j(\rho) - j(0) = \rho [Q_\omega u_0(z) \cdot v_0(z) + \delta_J] + o(\rho).$$

La *matrice capacité* Q_ω (scalaire pour un champ scalaire, matrice $N \times N$ pour un champ vectoriel de dimension N) est définie par

$$(Q_\omega)_{ij} = - \int_{\partial\omega} \eta_{ij} ds,$$

où $\eta_{ij} \in H^{-1/2}(\partial\omega)$ est solution de

$$\int_{\partial\omega} E(x-y) \eta_{:j}(y) ds(y) = e_j \quad \forall x \in \partial\omega$$

avec E la solution élémentaire de l'opérateur $u \mapsto -\operatorname{div}(A\nabla u)$.

Trou sphérique

Si la solution élémentaire est de la forme

$$E(x) = -\frac{\alpha I + \beta e_r \otimes e_r}{4\pi r}$$

alors

$$\forall x \in \partial\omega, \quad -\int_{\partial\omega} E(x-y) ds(y) = \mathcal{M} := \left(\alpha + \frac{\beta}{3}\right) I,$$

d'où $\boxed{Q_\omega = 4\pi \mathcal{M}^{-1}}$.

ystème	\mathcal{M}
Laplace / Helmholtz (non linéaire)	I
élasticité linéaire / ondes élastiques	$\frac{2\lambda + 5\mu}{3\mu(\lambda + 2\mu)} I$
Stokes/quasi-Stokes, Navier-Stokes	$\frac{2}{3\nu} I$

2D

Pour une solution élémentaire de la forme

$$E(x) \sim \frac{2\pi}{\ln|x|} \mathcal{N} \quad (|x| \rightarrow 0)$$

on obtient

$$j(\rho) - j(0) = \frac{-1}{\ln \rho} \left[2\pi \mathcal{N}^{-1} u_0(x_0) \cdot v_0(x_0) + \delta_J \right] + o\left(\frac{-1}{\ln \rho}\right).$$

Le gradient topologique est indépendant de la forme du trou.

système	\mathcal{N}
Laplace/ Helmholtz (non linéaire)	l
élasticité linéaire / ondes élastiques	$\frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} l$
Stokes/quasi-Stokes, Navier-Stokes	$\frac{1}{2\nu} l$

MÉTHODES DE TYPE GRADIENT POUR L'OPTIMISATION TOPOLOGIQUE SANS CONTRAINTES

Le gradient topologique $g_{\Omega}(x)$ mesure la sensibilité de la fonction coût lors de la création d'un petit trou centré en x . On peut :

- ▶ représenter la fonction $x \mapsto g_{\Omega}(x)$ et interpréter certaines particularités (pics notamment),
- ▶ dans un processus itératif, faire des trous en des endroits où le gradient topologique est négatif : si ces trous sont suffisamment petits, la fonction coût doit diminuer.
- ▶ résoudre la condition d'optimalité

$$g_{\Omega}(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$$

par une méthode de point fixe.

Un problème inverse : contrôle non destructif ultrasonique dans des plaques métalliques (avec N. Dominguez)

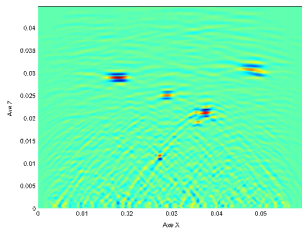
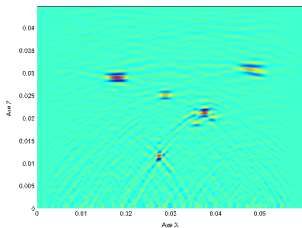
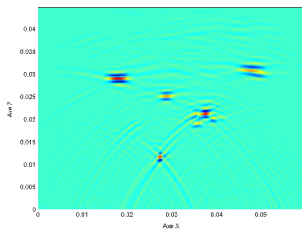
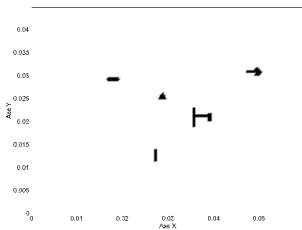
On considère les équations de l'élastodynamique

$$\rho_d \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div} \sigma(u) = 0$$

et la fonction coût de moindre carrés

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_m} |u - u_m|^2 dx dt.$$

On utilise une barrette de 55 capteurs sur le bord inférieur, fonctionnant en émission et réception. Le signal est un pulse de $1 \mu s$ à la fréquence centrale de 2 MHz.



Position des défauts et gradient topologique avec 0%, 5% et 10% de bruit sur les mesures (valeurs négatives en bleu)

Résolution de la condition d'optimalité par une méthode de lignes de niveaux

On adopte une représentation par ensembles de niveaux

$$\Omega = \Omega(\psi) := \{x \in D, \psi(x) < 0\}.$$

La condition d'optimalité pour le problème à deux phases

$$\begin{aligned} g_{\Omega}(z) &\leq 0 & \forall z \in \Omega, \\ g_{\Omega}(z) &\geq 0 & \forall z \in D \setminus \bar{\Omega}, \end{aligned}$$

(gradient topologique signé) est satisfaite lorsque

$$g_{\Omega(\psi)} \sim \psi$$

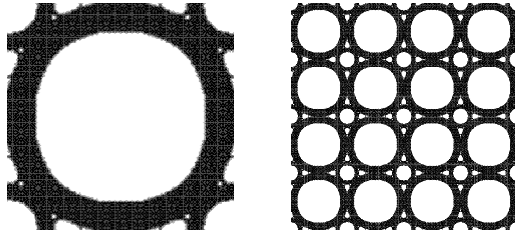
avec la relation d'équivalence $\psi_1 \sim \psi_2 \iff \exists \lambda > 0, \psi_1 = \lambda \psi_2$.

On résout cette relation par une méthode de point fixe relaxée sur les classes. Pour des représentants unitaires sur un Hilbert :

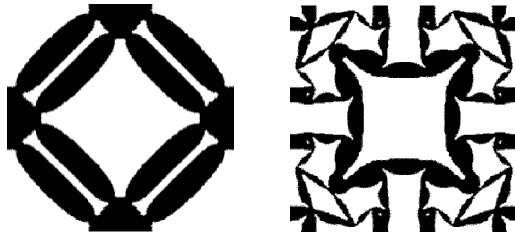
$$\psi_{k+1} = \frac{\sin((1 - \tau_k)\theta_k)\psi_k + \sin(\tau_k\theta_k)g_{\Omega(\psi_k)}}{\sin \theta_k}, \quad \theta_k = (\psi_k, \widehat{g_{\Omega(\psi_k)}}).$$

La convergence peut être démontrée dans certains cas.

Exemple : optimisation de microstructures en homogénéisation périodique (avec M. Giusty, A. Novotny, E. Neto)



Maximisation du module d'élasticité isostatique : cellule élémentaire
et microstructure périodique.



Maximisation et minimisation du coefficient de Poisson. 

Lien avec les méthodes d'interpolation

Méthodes d'interpolation : dans l'équation d'état $-\operatorname{div}(\alpha A \nabla u) = f$, on remplace α par $\theta(\alpha)$ et on résout pour $\alpha \in [\alpha^-, \alpha^+]$.

Observation : on peut choisir θ polynôme de degré ≤ 3 de sorte que la condition d'optimalité du problème convexifié coïncide avec la condition d'optimalité topologique dès que $\alpha \in \{\alpha^-, \alpha^+\}$.

En 2D, pour $\alpha^- \approx 0, \alpha^+ = 1$ et des inclusions circulaires, on obtient

$$\theta(\alpha) = \alpha^2 \quad (\text{laplacien}),$$

$$\theta(\alpha) = \alpha^3 \quad (\text{élasticité linéaire}).$$

Ces fonctions d'interpolation sont celles généralement utilisées dans la méthode SIMP.

OPTIMISATION TOPOLOGIQUE SOUS CONTRAINTES

On considère un problème de la forme :

$$\min_{\Omega \in \mathcal{E}} \mathcal{J}(\Omega) \quad \text{avec} \quad \mathcal{G}(\Omega) \in -K$$

où K est un cône convexe fermé d'un espace de Banach Y .

On note

- ▶ $\mathcal{J}'(\Omega)$ et $\mathcal{G}'(\Omega)$ les gradients topologiques (non signés) de $\mathcal{J}(\Omega)$ et $\mathcal{G}(\Omega)$,
- ▶ $\mathcal{T}(\Omega)$ le lieu des perturbations topologiques admissibles.

Condition nécessaire d'optimalité (avec M. Ciligot-Travain)

Théorème. Sous la condition de qualification :

$\exists x_0 \in \mathcal{T}(\Omega), t \geq 0$ t.q.

$$\mathcal{G}(\Omega) + t\mathcal{G}'(\Omega)(x_0) \in \text{int}(-K),$$

il existe $\mu \in K^+$ tel que :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}'(\Omega) + \mu \circ \mathcal{G}'(\Omega) &\geq 0 && \text{dans } \mathcal{T}(\Omega), \\ \langle \mu, \mathcal{G}(\Omega) \rangle_{Y', Y} &= 0. \end{aligned}$$

Remarque. Ces conditions peuvent être complétées par une condition d'optimalité géométrique sur $\partial\Omega$, impliquant les dérivées de forme et le même multiplicateur.

Méthodes de lagrangien et de lagrangien augmenté

On définit le lagrangien

$$\mathcal{L}(\Omega, \mu) = \mathcal{J}(\Omega) + \langle \mu, \mathcal{G}(\Omega) \rangle_{Y', Y}$$

et le lagrangien augmenté (lorsque Y est un Hilbert)

$$\mathcal{L}_b(\Omega, \mu) = \mathcal{J}(\Omega) + \frac{1}{2b} (\|P_{K^+}(\mu + b\mathcal{G}(\Omega))\|_Y^2 - \|\mu\|_Y^2).$$

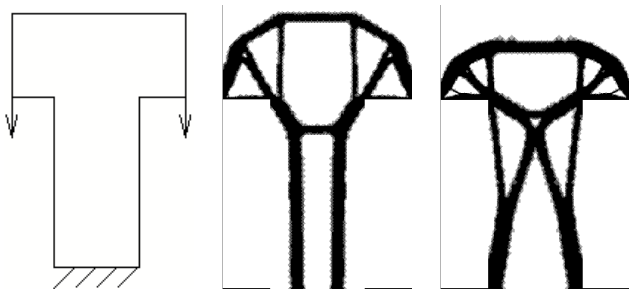
On montre que, de manière générale, résoudre la condition d'optimalité équivaut à rechercher des points selle locaux du lagrangien (éventuellement augmenté).

On peut utiliser l'algorithme d'Uzawa, en alternant :

- ▶ optimisation topologique à μ fixé, par la méthode de lignes de niveaux par exemple,
- ▶ mise à jour de μ par un pas de montée.

Exemple

Minimisation du volume avec borne supérieure sur la compliance et borne inférieure sur la première fréquence propre.



Pylône sans (milieu) et avec (droite) contrainte de fréquence propre

Autres applications : contraintes sous chargements multiples, éventuellement en nombre infini.

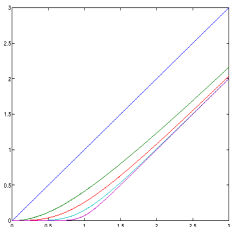
Contrainte d'état ponctuelle

Pour le laplacien à 2 phases, on considère la contrainte (B SDP) :

$$\frac{1}{2} B \nabla u_{\Omega} \cdot \nabla u_{\Omega} \leq M \quad \text{p.p. dans } \Omega \cap \tilde{D}.$$

Le multiplicateur de Lagrange est une mesure. On utilise une méthode de pénalisation :

$$\mathcal{J}_{\gamma,n}(\Omega) = \mathcal{J}(\Omega) + \gamma \int_{\tilde{D}} \beta_{\Omega} \Phi_n \left(\frac{\frac{1}{2} B \nabla u_{\Omega} \cdot \nabla u_{\Omega}}{M} \right) dx.$$

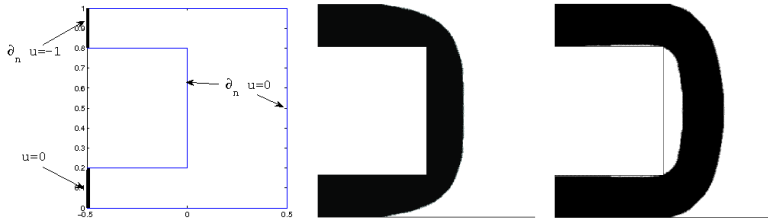


On prend une suite $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions régulières telles que

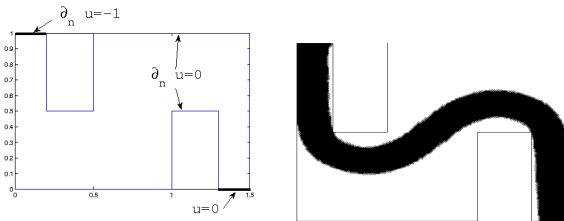
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_n(t) = \max(t - 1, 0).$$

La fonction coût pénalisée admet un gradient topologique que l'on calcule. Un terme nécessite une intégration numérique (valeurs tabulées).

Exemples pour le laplacien

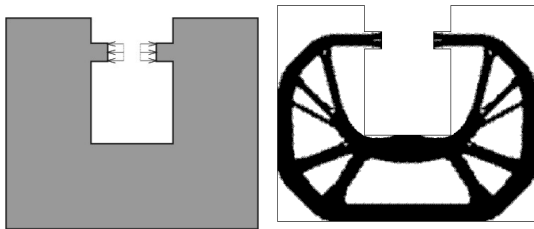
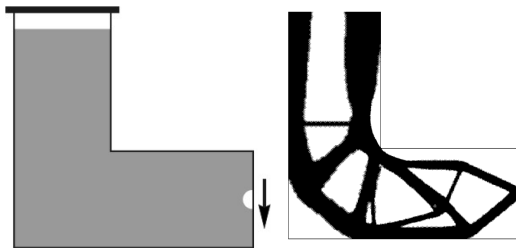


Conducteur en U sans et avec contrainte



Conducteur en S avec contrainte

Exemples pour la contrainte de Von Mises (avec A. Novotny)



Contrainte sur le périmètre (avec N. Van Goethem)

Le périmètre

- ▶ a un effet régularisant (existence de domaines optimaux),
- ▶ n'admet pas de dérivée topologique.

On définit sur $L^2(D)$ la fonctionnelle

$$\begin{aligned}\tilde{F}_\varepsilon(u) &= \inf_{v \in H^1(D)} \left\{ \frac{1}{2\varepsilon} \left(\|v\|_{L^2(D)}^2 + \langle u, 1 - 2v \rangle \right) + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla v\|_{L^2(D)}^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \langle 1 - v_\varepsilon, u \rangle\end{aligned}$$

avec v_ε solution de

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta v_\varepsilon + v_\varepsilon = u & \text{dans } D, \\ \partial_n v_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial D. \end{cases}$$

On démontre que

$$\tilde{F}_\varepsilon(u) \xrightarrow{\Gamma} \tilde{F}(u) := \begin{cases} \frac{1}{4} TV(u) = \frac{1}{4} \text{Per}_D([u = 1]) & \text{si } u \in BV(D, \{0, 1\}) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

fortement dans $L^1(D, [0, 1])$.

Soit $\tilde{J} : L^\infty(D, [0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction coût continue pour la topologie L^1 forte,

$$I_\varepsilon := \inf_{u \in L^\infty(D, [0, 1])} \left\{ \tilde{J}(u) + \alpha \tilde{F}_\varepsilon(u) \right\},$$

$$I := \inf_{u \in L^\infty(D, \{0, 1\})} \left\{ \tilde{J}(u) + \alpha \tilde{F}(u) \right\}.$$

Théorème. Soit u_ε un minimiseur approché de I_ε , c-à-d

$$\tilde{J}(u_\varepsilon) + \alpha \tilde{F}_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq I_\varepsilon + \lambda_\varepsilon,$$

avec $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_\varepsilon = 0$.

Alors $\tilde{J}(u_\varepsilon) + \alpha \tilde{F}_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightarrow I$. De plus, (u_ε) admet des valeurs d'adhérences, et chacune de ces valeurs d'adhérences est un minimiseur de I .

De plus, \tilde{F}_ε admet une dérivée topologique.

Algorithmes

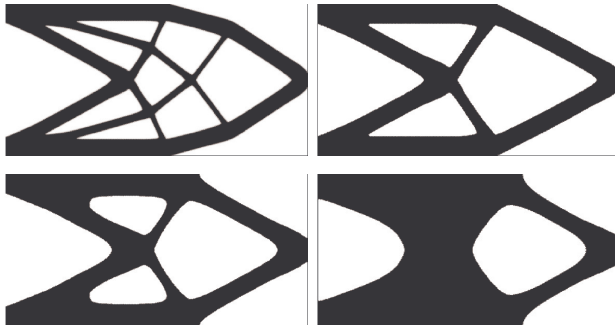
Pour minimiser $\tilde{J}(u) + \alpha \tilde{F}_\varepsilon(u)$ à ε fixé, on a le choix :

- ▶ gradient topologique
- ▶ gradient projeté
- ▶ méthode alternée

$$I_\varepsilon = \inf_{u \in L^\infty(D, [0,1])} \inf_{v \in H^1(D)} \left\{ \tilde{J}(u) + \alpha \left[\frac{\varepsilon}{2} \|\nabla v\|_{L^2(D)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \left(\|v\|_{L^2(D)}^2 + \langle u, 1 - 2v \rangle \right) \right] \right\}.$$

Pour la compliance homogénéisée, $\tilde{J}(u)$ est aussi un inf (énergie complémentaire).

Exemple : minimisation de la compliance avec homogénéisation



Console pour $\alpha = 0.1, 2, 20, 50$.

MÉTHODES DE TYPE NEWTON

Si u est la fonction caractéristique de Ω , la condition nécessaire d'optimalité

$$\begin{cases} g_u \geq 0 & \text{dans } \text{int}([u = 0]), \\ g_u \leq 0 & \text{dans } \text{int}([u = 1]), \end{cases}$$

est équivalente à

$$F(u) = 0 \quad \text{dans } \text{int}([u = 0]) \cup \text{int}([u = 1])$$

avec

$$F : u \mapsto u \max(0, g_u) + (1 - u) \min(0, g_u).$$

L'idée est de résoudre par une méthode de "semismooth Newton" l'égalité

$$F(u) = 0.$$

Il faut que, localement,

- ▶ F soit *Newton-différentiable*,
- ▶ le jacobien généralisé DF soit uniformément inversible.

Exemple

$$\min_{(u,y) \in \mathcal{E} \times H_0^1(D)} J(u,y) = \frac{1}{2} \int_D (y - y^\dagger)^2 dx + \nu \int_D u dx \quad \text{t.q. } Ey = u,$$

avec $\mathcal{E} = L^\infty(D, \{0, 1\})$, $E = -\Delta$ avec condition de Dirichlet.

Problème : DF est singulier. On régularise par

$$F^\varepsilon : u \mapsto u \max(0, g_u + \varepsilon) + (1 - u) \min(0, g_u - \varepsilon).$$

On démontre

- ▶ l'existence de solutions de $F^\varepsilon(u^\varepsilon) = 0$,
- ▶ la convergence locale superlinéaire de la méthode de Newton pour le problème régularisé,
- ▶ la convergence des solutions régularisées vers une solution de $F(u) = 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Remarque. Résoudre $F(u) = 0$ revient à minimiser J sur $\tilde{\mathcal{E}} = L^\infty(D, [0, 1])$, mais, sous certaines hypothèses, les minimiseurs sont automatiquement dans \mathcal{E} .

Contrôle de ε . Par analyse de sensibilité, on s'arrange pour avoir

$$\frac{\mathcal{M}(\varepsilon_{k+1})}{\mathcal{M}(\varepsilon_k)} \approx \tau, \quad \text{avec } \mathcal{M}(\varepsilon) := \|F(u^\varepsilon)\|^2.$$

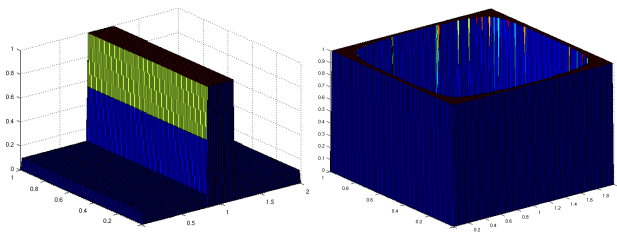
Extension. En présence de contraintes, on peut appliquer la méthode de Lagrange-Newton. L'analyse de convergence a été effectuée pour la contrainte de volume avec e.d.p. semi-linéaire (avec A. Laurain).

Exemple : minimisation de la première valeur propre (non nulle) de

$$-\Delta y = \lambda m y$$

avec $m^- \leq m(x) \leq m^+$ et la contrainte de volume

$$\int_D m dx = V^*.$$



Distribution de $m(x)$ pour les problèmes de minimisation de la première valeur propre avec condition de Dirichlet et de Neumann.

Avantages et inconvénients de la méthode :

- ▶ rapidité,
- ▶ satisfaction très précise des conditions d'optimalités,
- ▶ convergence observée seulement pour des opérateurs contrôle-état régularisants.

Merci pour votre attention