

Journée de Bilan de la Chaire MMSN

# Homogénéisation d'un problème de transfert thermique par conduction, convection et rayonnement

Application aux cœurs des réacteurs nucléaires à caloporteur gaz.

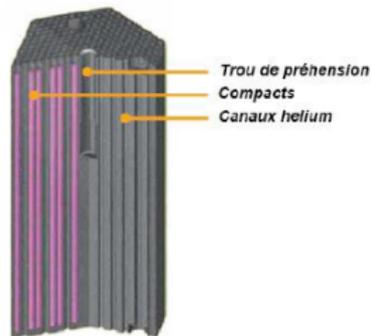
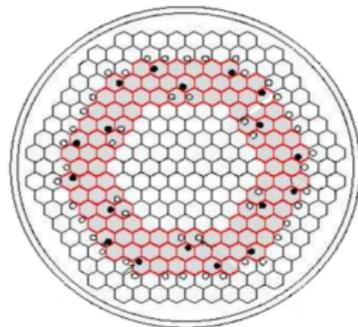
**ZAKARIA HABIBI**, CEA-SACLAY & POLYTECHNIQUE/CMAP

**GRÉGOIRE ALLAIRE**, POLYTECHNIQUE/CMAP

09 Janvier 2012  
CMAP/Ecole Polytechnique

## L'homogénéisation et les cœurs de réacteurs VHTR...

- Réacteurs à caloporteur gaz de type VHTR (Very High Temperature Reactor).
- Composé par plusieurs blocs prismatiques
- Chaque bloc est traversé par plusieurs canaux
  - Compact combustible
  - fluide caloporteur : l'Hélium, un gaz transparent (importance du rayonnement)
- Les échelles caractéristiques du cœur sont
  - entre 3m et 4,5m de diamètre, 6m de hauteur,
  - 10 000 canaux fluides de diamètre 1,5cm.
- Toute modélisation doit donc tenir compte des variations multi-échelles du cœur, ce qui induit un coût de résolution numérique très élevé.

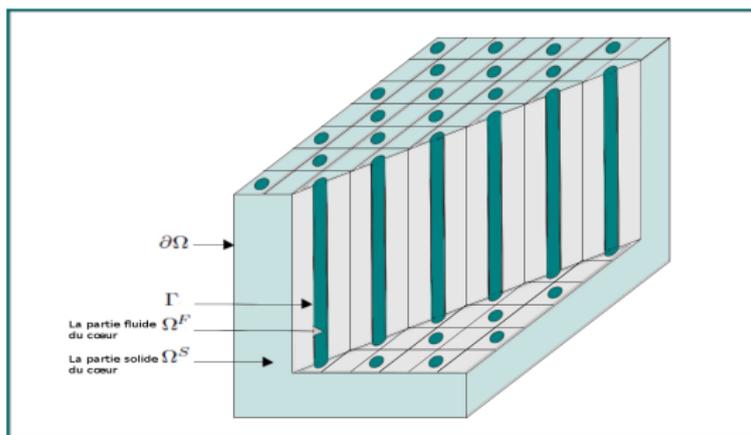


# Introduction au modèle mathématique

Nous réduisons la géométrie du cœur en deux parties :

- Partie fluide (les canaux) composée par le gaz caloporteur notée  $\Omega_\epsilon^F$ ,
- Partie solide  $\Omega_\epsilon^S$  composée par le reste.

On note par  $\Gamma_\epsilon$  la surface séparant le fluide du solide.



$\epsilon$  désigne le rapport des échelles macro et microscopique.

## Les équations du modèle

- Eventuellement, les équations qui gouvernent notre modèle sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(K^S \nabla T_\epsilon^S) & = f & \text{dans } \Omega_\epsilon^S \\ -\operatorname{div}(\epsilon K^F \nabla T_\epsilon^F) + V \cdot \nabla T_\epsilon^F & = 0 & \text{dans } \Omega_\epsilon^F \\ -K^S \nabla T_\epsilon^S \cdot n & = -\epsilon K^F \nabla T_\epsilon^F \cdot n + \frac{\sigma}{\epsilon} G_\epsilon(T_\epsilon^F) & \text{sur } \Gamma_\epsilon \\ T_\epsilon^S & = T_\epsilon^F & \text{sur } \Gamma_\epsilon \\ T_\epsilon & = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

- $T_\epsilon^{F,S}(x)$  est la température,
- $K^{F,S}$  est la diffusion thermique,
- $V = V_3 e_3$  est la vitesse du fluide,
- $f(x)$  est une source thermique.
- Le scaling en  $1/\epsilon$  de  $G_\epsilon$  est important.

- $G_\epsilon$  est l'opérateur de rayonnement

$$G_\epsilon(T_\epsilon)(x) = T_\epsilon(x) - \int_{\Gamma_\epsilon} T_\epsilon(s) F^{3D}(s, x) d\mu_s$$

- $F(s, x)$  est le facteur de forme

$$F^{3D}(s, x) = \frac{n_x \cdot (s - x) n_s \cdot (x - s)}{\pi |x - s|^4}$$

- Par simplification, l'analyse présentée ici est dans le cas d'un opérateur de rayonnement linéaire. Elle est valable dans le cas non-linéaire

$$G_\epsilon(T_\epsilon^4)(x) = T_\epsilon^4(x) - \int_{\Gamma_\epsilon} T_\epsilon^4(s) F^{3D}(s, x) d\mu_s$$

- Tous les résultats numériques de cette présentation sont dans le cas non-linéaire.
- Les parois des canaux sont grises diffusantes, i.e.  $0 < e < 1$

$$G_\epsilon(T_\epsilon^4) = e(Id - \zeta_\epsilon)(Id - (1 - e)\zeta_\epsilon)^{-1}(T_\epsilon^4) \quad \text{avec} \quad \zeta_\epsilon(f)(s) = \int_{\Gamma_{\epsilon,i}} F(s, x) f(x) dx.$$

- Ici nous simplifions l'exposé au cas  $e = 1$ . Toute notre analyse est transposable au cas plus général.
- Le modèle est bien posé car  $G_\epsilon$  est non-négatif dans le sens

$$\int_{\Gamma_\epsilon} G_\epsilon(T_\epsilon^F) T_\epsilon^F \geq 0.$$

# Introduction à la méthode d'homogénéisation périodique

- L'homogénéisation est une technique de moyennisation des problèmes multi-échelles décrits par des EDP. ([A.Bensoussan, J. L.Lions, G.Papanicolaou], [N.Bakhvalov, G.Panasenko], [D.Cioranescu et P.Donato], [J.Sanchez-Hubert, E.Sanchez-Palencia]...)
- Nous utilisons deux méthodes d'homogénéisation :
  - Développement Asymptotique (DA)
  - Convergence à 2 Echelles (C2E) ([G.Allaire], [G.Nguetseng])

- L'homogénéisation est une technique de moyennisation des problèmes multi-échelles décrits par des EDP. ([A.Bensoussan, J. L.Lions, G.Papanicolaou], [N.Bakhvalov, G.Panasenko], [D.Cioranescu et P.Donato], [J.Sanchez-Hubert, E.Sanchez-Palencia]...)
- Nous utilisons deux méthodes d'homogénéisation :
  - Développement Asymptotique (DA)

Si  $x$  et  $y = \frac{x}{\epsilon}$  désignent, respectivement, la variable macro et microscopique, la méthode (DA) consiste à approcher l'inconnue  $T_\epsilon$  par la série

$$T_\epsilon(x) = T_0(x, \frac{x}{\epsilon}) + \epsilon T_1(x, \frac{x}{\epsilon}) + \epsilon^2 T_2(x, \frac{x}{\epsilon}) + \dots,$$

et résoudre les nouveaux problèmes sur  $T_i$  dans  $\Omega \times Y$  au lieu du problème sur  $T_\epsilon$  dans  $\Omega_\epsilon$ .

- Convergence à 2 Echelles (C2E) ([G.Allaire], [G.Nguetseng])

- L'homogénéisation est une technique de moyennisation des problèmes multi-échelles décrits par des EDP. ([A.Bensoussan, J. L.Lions, G.Papanicolaou], [N.Bakhvalov, G.Panasenko], [D.Cioranescu et P.Donato], [J.Sanchez-Hubert, E.Sanchez-Palencia]...)
- Nous utilisons deux méthodes d'homogénéisation :
  - Développement Asymptotique (DA)
  - Convergence à 2 Echelles (C2E) ([G.Allaire], [G.Nguetseng])

- L'homogénéisation est une technique de moyennisation des problèmes multi-échelles décrits par des EDP. ([A.Bensoussan, J. L.Lions, G.Papanicolaou], [N.Bakhvalov, G.Panasenko], [D.Cioranescu et P.Donato], [J.Sanchez-Hubert, E.Sanchez-Palencia]...)
- Nous utilisons deux méthodes d'homogénéisation :
  - Développement Asymptotique (DA)
  - Convergence à 2 Echelles (C2E) ([G.Allaire], [G.Nguetseng])

Toute suite bornée dans  $L^2(\Omega_\epsilon)$  (indépendamment de  $\epsilon$ ), admet une sous-suite qui converge à deux échelles vers une limite  $T_0 \in L^2(\Omega; L^2_\#(Y))$  telle que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\epsilon} T_\epsilon(x) \psi(x, \frac{x}{\epsilon}) dx = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y T_0(x, y) \psi(x, y) dx dy.$$

$$\psi(x, y) \in L^2(\Omega; C_\#(Y)/\mathbb{R})$$

- L'homogénéisation est une technique de moyennisation des problèmes multi-échelles décrits par des EDP. ([A.Bensoussan, J. L.Lions, G.Papanicolaou], [N.Bakhvalov, G.Panasenko], [D.Cioranescu et P.Donato], [J.Sanchez-Hubert, E.Sanchez-Palencia]...)
- Nous utilisons deux méthodes d'homogénéisation :
  - Développement Asymptotique (DA)
  - Convergence à 2 Echelles (C2E) ([G.Nguetseng], [G.Allaire])

# Homogénéisation du modèle 3-D

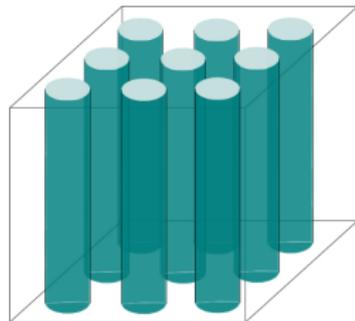
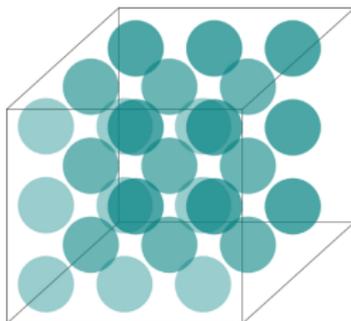
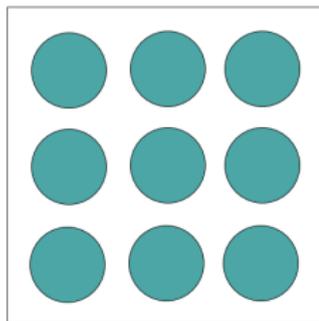
## Particularités du modèle

Difficultés liées à la condition de rayonnement

- Non-locale.
- Non-linéaire.

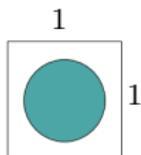
Difficultés liées à la géométrie 3D

- Une étude simplifiée 2-D fait l'objet de la thèse de doctorat de K. El Ganaoui.
- L'extension immédiate en 3-D implique des canaux sous forme de boules.
- Les canaux ici sont des cylindres ouverts de leurs deux extrémités.

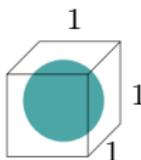


## Particularités du modèle

- Les cellules élémentaires de périodicité



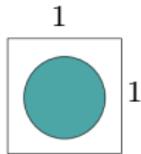
**2-D**



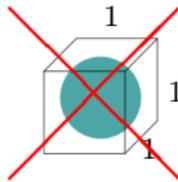
**3-D**

## Particularité du modèle

- Les cellules élémentaires de périodicité



2-D



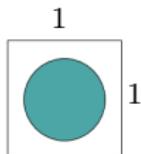
3-D



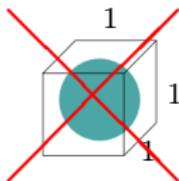
3-D

# Particularité du modèle

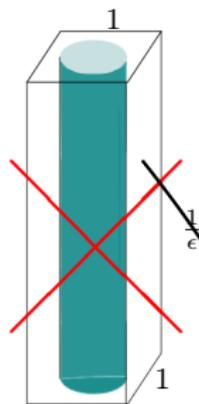
- Les cellules élémentaires de périodicité



**2-D**



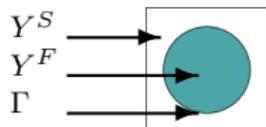
**3-D**



**3-D**

- Réduction de la dimension d'espace 3-D  $\rightarrow$  2-D

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad x' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$



**2-D**

$\epsilon \rightarrow 0$

## Un lemme clef

L'opérateur de rayonnement est donné par :  $G_\epsilon(T_\epsilon)(x) = T_\epsilon(x) - \int_{\Gamma_\epsilon} T_\epsilon(s)F(s, x)ds$  Le facteur de forme s'écrit :

$$F^{3D}(s, x) = \frac{n_x \cdot (s - x)n_s \cdot (x - s)}{\pi|x - s|^4}, \quad F^{2D}(s', x') = \frac{n'_x \cdot (s' - x')n'_s \cdot (x' - s')}{2|x' - s'|^3}$$

## Lemme

Pour  $x$  et  $s \in \Gamma_{\epsilon, i}$ ,

- ④ pour  $g \in C^3[0, L]$  à support compact, et  $f \in L^\infty(0, L)$ , nous avons :

$$\int_0^L \int_0^L f(x_3)g(s_3)F^{3D}(s, x)dx_3ds_3 =$$

$$F^{2D}(s', x') \left( \int_0^L f(x_3)g(x_3)dx_3 + \underbrace{\frac{1}{2}|x' - s'|^2 \int_0^L f(x_3)g''(x_3)dx_3}_{\mathcal{O}(\epsilon^2)} + \mathcal{O}(\epsilon^3 |\log \epsilon|) \right).$$

## Résultat principal

Le problème homogénéisé sur  $T_0$

Sous l'hypothèse  $T_\epsilon = T_0(x) + \epsilon T_1(x, \frac{x}{\epsilon}) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$  nous montrons que  
 $\Rightarrow T_0$  est la solution du problème homogénéisé

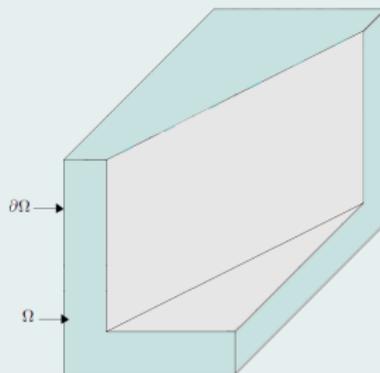
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(K^* \nabla T_0(x)) + V^* \cdot \nabla T_0(x) &= |Y^S| / |Y| f(x) & \text{dans } \Omega \\ T_0(x) &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$K_{j,k}^* = \frac{1}{|Y|} \left[ \int_{Y^S} K^S(e_j + \nabla_{y'} \omega_j^S(y')) \cdot (e_k + \nabla_{y'} \omega_k^S(y')) dy' \right.$$

$$+ \sigma \int_{\Gamma} G^{2D}(\omega_k^S(y') + y_k)(\omega_j^S(y') + y_j) dy'$$

$$\left. + \frac{\sigma}{2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} F^{2D}(z', y') |z' - y'|^2 dy' dz' \delta_{j3} \delta_{k3} \right]$$

$$V^* = \frac{|Y^F|}{|Y|} V_3 e_3,$$



## Résultat principal

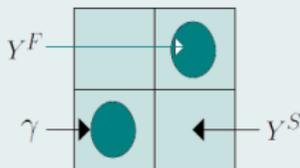
Le correcteur d'ordre 1  $T_1$

Sous l'hypothèse  $T_\epsilon = T_0(x) + \epsilon T_1(x, \frac{x}{\epsilon}) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$  nous montrons que  $\Rightarrow T_1$  s'écrit

$T_1(x, y') = \sum_{j=1}^3 \omega_j(y') \frac{\partial T_0}{\partial x_j}(x)$  où les  $\omega_j$  sont les solutions  $Y$ -périodiques des problèmes de cellule 2-D suivants :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{y'} [K^S(e_j + \nabla_{y'} \omega_j^S(y'))] = 0 & \text{dans } Y^S \\ -[K^S(e_j + \nabla_{y'} \omega_j^S(y'))] \cdot n = \sigma G^{2D}(\omega_j^S(y') + y_j) & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{y'} [K^F(e_j + \nabla_{y'} \omega_j^F(y'))] + V \cdot (e_j + \nabla_{y'} \omega_j^F(y')) = 0 & \text{dans } Y^F \\ \omega_j^F(y') = \omega_j^S(y') & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$



## Remarques sur le modèle homogénéisé

- Réduction de dimension 3D-2D : Toute l'analyse locale est 2D.
- Rayonnement : Le rayonnement n'apparaît qu'au niveau de la cellule.
- Diffusion thermique additionnelle par rapport au cas 2D. Elle modélise la perte d'énergie radiative.
- Cette analyse formelle est valable pour un rayonnement linéaire et non-linéaire.
- Elle est aussi valable dans le cas  $0 < e < 1$ .

Nous justifions le résultat formel de développement asymptotique par convergence à deux échelles adaptée à cette configuration 3D-2D dans le sens  $u_\epsilon \in L^2(\Omega) \xrightarrow{C^2E} u_0(x, y') \in L^2(\Omega \times Y)$  :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\epsilon(x) \psi(x, \frac{x'}{\epsilon}) dx = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y') \psi(x, y') dx dy'$$

### Convergence

Soit  $T_\epsilon$  la suite de solutions du problème direct. Soit  $T_0(x)$  la solution du problème homogénéisé et  $T_1(x, y')$  le correcteur d'ordre 1. Nous avons alors :

- $T_\epsilon(x)$  converge à deux échelles vers  $T_0(x)$ ,
- $\nabla T_\epsilon(x) \chi(\frac{x'}{\epsilon})$  converge à deux échelles vers  $(\nabla_x T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, y')) \chi(y')$

où

$$\chi(y') = \begin{cases} 1 & \text{si } y' \in Y^S \\ 0 & \text{si } y' \in Y^F \end{cases}$$

## Données numériques

- 3 cellules dans la direction  $x_1$  et 4 cellules dans la direction  $x_2$ . La taille de chaque cellule est  $(0.04, 0.07)$  et chacune contient 2 canaux de rayon  $0.0035$ . La hauteur du cylindre est égale à  $0.1$ .
- Valeur de référence  $\epsilon = \frac{1}{4}$ .

- $K^S = 30 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ,  $\epsilon K^F = 1.2 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$

- $e = 1$ ,

- $f = 7 \text{ MW/m}^3$ ,

- $V_3 = 80 \text{ ms}^{-1}$ ,

- Conditions limites

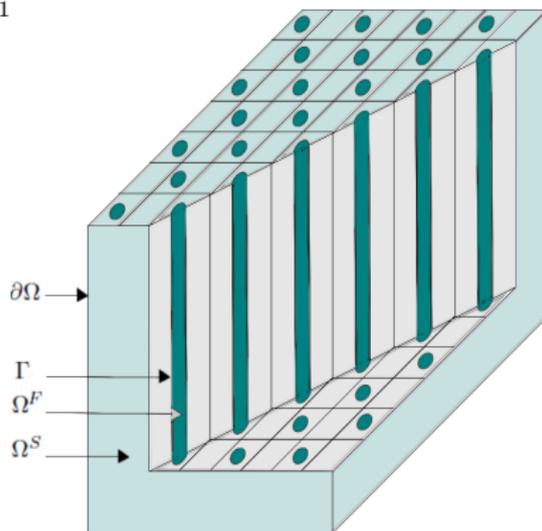
$$T_\epsilon(x) = (800x_2 + 100x_3) + 800$$

sur les bords qui correspondent à

$$x_2 = 0, \quad x_2 = x_{2,max},$$

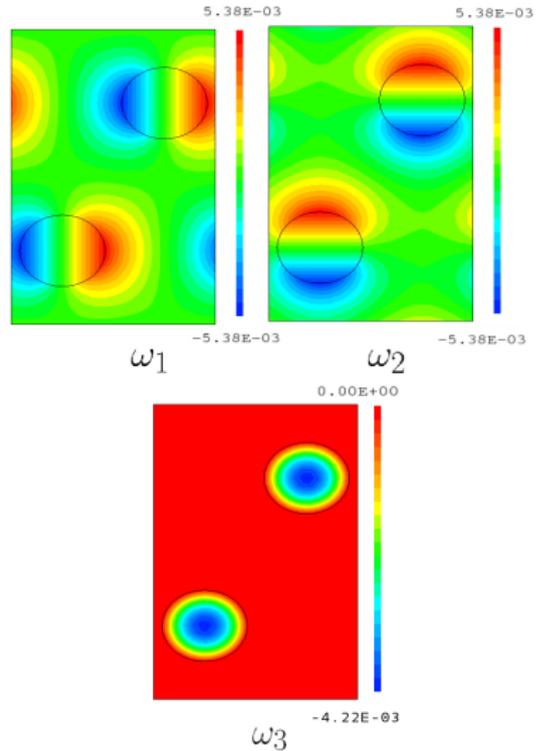
$$x_3 = 0, \quad x_3 = x_{3,max}.$$

Elle sont périodiques ailleurs.



## Algorithme

- Résoudre les *problèmes de cellule* pour une plage de température



## Algorithme

- Résoudre les *problèmes de cellule* pour une plage de température
- Calculer la vitesse homogénéisée  $V^*$  et la conductivité homogénéisée  $K^*$

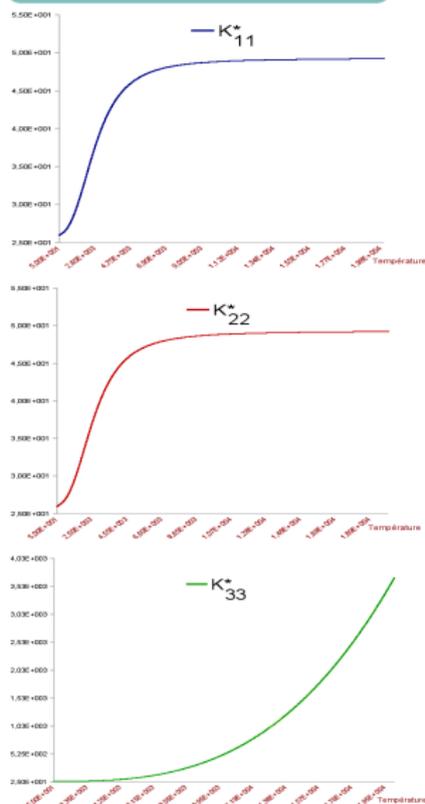
$V^*(x) = \frac{|Y^F|}{|Y|} V_3$ , est une simple moyenne volumique, égale à :

$$\hat{V}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15.134 \end{pmatrix} ms^{-1}.$$

## Algorithme

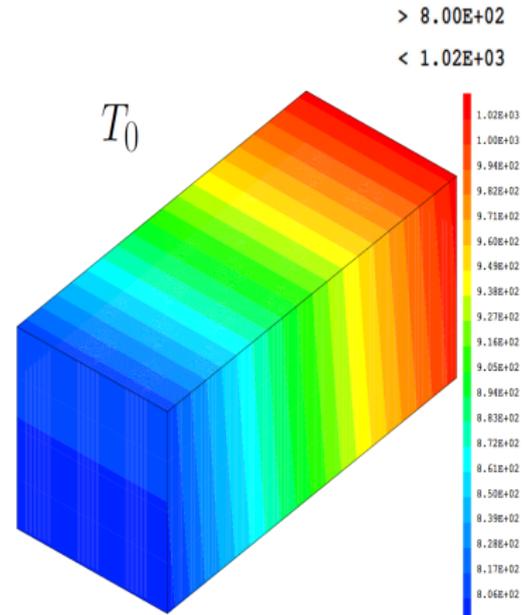
- Résoudre les *problèmes de cellule* pour une plage de température
- Calculer la vitesse homogénéisée  $V^*$  et la conductivité homogénéisée  $K^*$

### La conductivité homogénéisée



## Algorithme

- Résoudre les *problèmes de cellule* pour une plage de température
- Calculer la vitesse homogénéisée  $V^*$  et la conductivité homogénéisée  $K^*$
- Résoudre le *problème homogénéisé* : trouver  $T_0(x)$



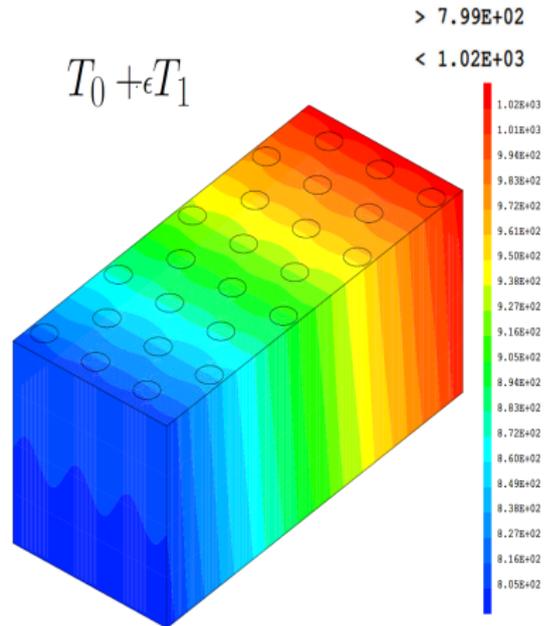
## Algorithme

- Résoudre les *problèmes de cellule* pour une plage de température
- Calculer la vitesse homogénéisée  $V^*$  et la conductivité homogénéisée  $K^*$
- Résoudre le *problème homogénéisé* : trouver  $T_0(x)$

- Construire le *premier correcteur* tel que

$$T_1(x, y) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_0}{\partial x_j}(x) \omega_j(y) \text{ et recons-}$$

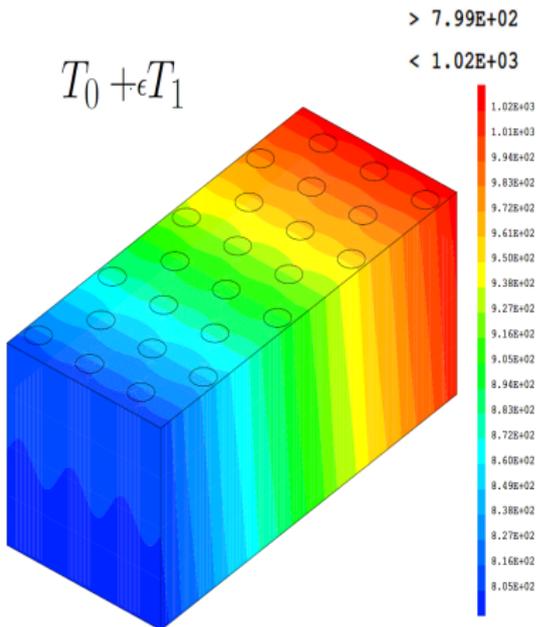
truire la solution  $T_0(x) + \epsilon T_1(x, \frac{x}{\epsilon})$



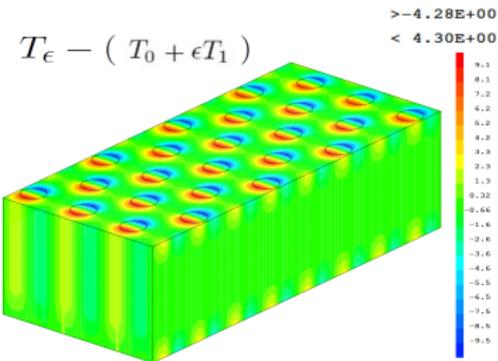
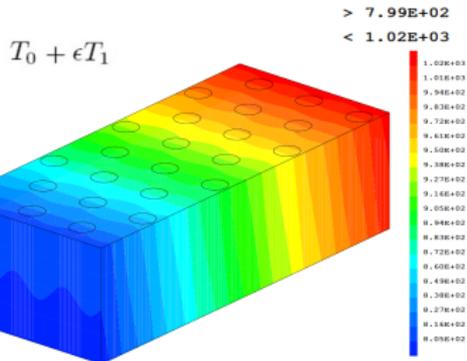
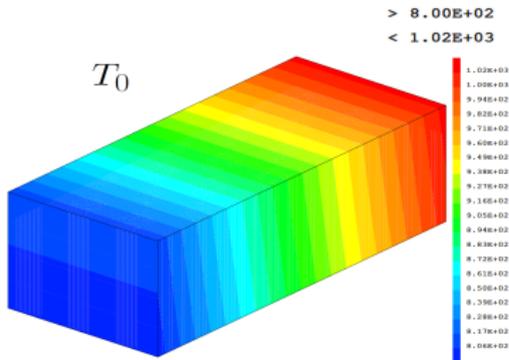
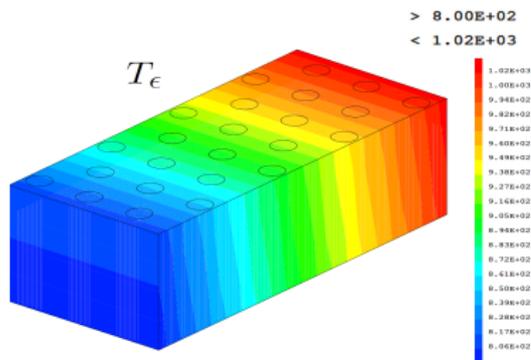
## Algorithme

- Résoudre les *problèmes de cellule* pour une plage de température
- Calculer la vitesse homogénéisée  $V^*$  et la conductivité homogénéisée  $K^*$
- Résoudre le *problème homogénéisé* : trouver  $T_0(x)$
- Construire le *premier correcteur* tel que  $T_1(x, y) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_0}{\partial x_j}(x) \omega_j(y)$  et reconstruire la solution  $T_0(x) + \epsilon T_1(x, \frac{x}{\epsilon})$
- Reconstruire le gradient de  $T_\epsilon$

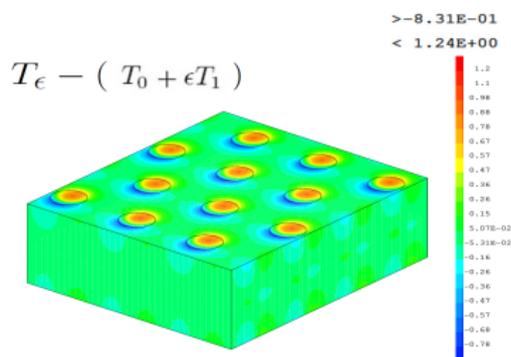
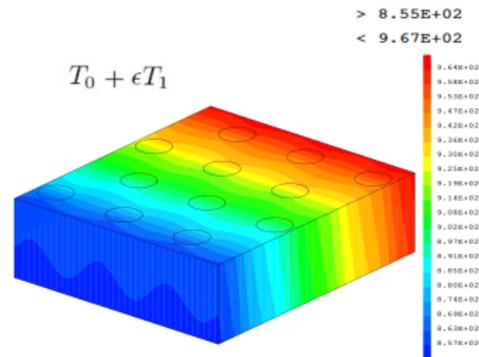
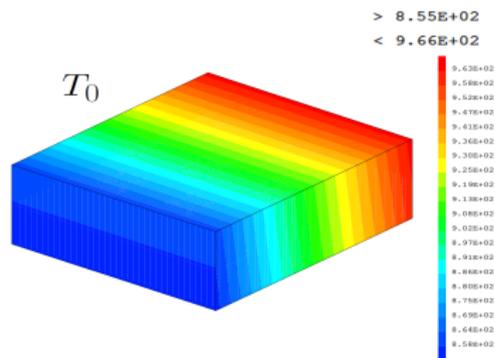
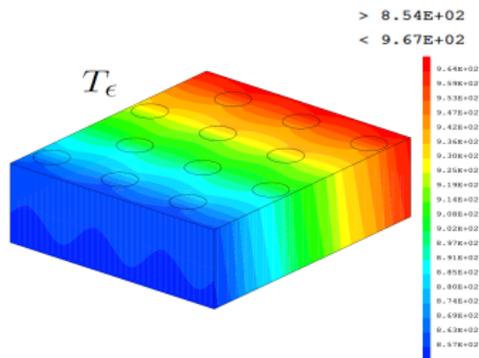
$$\nabla T_\epsilon \simeq \nabla_x T_0(x) + \nabla_y T_1(x, \frac{x}{\epsilon})$$



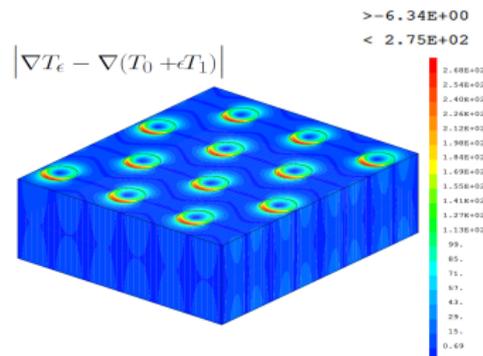
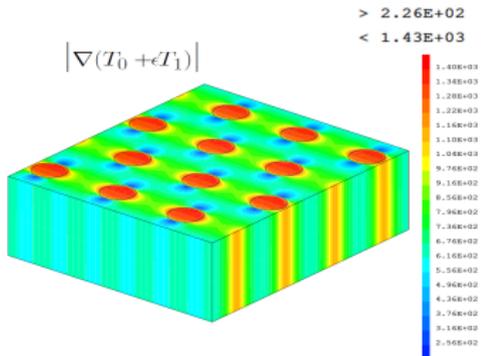
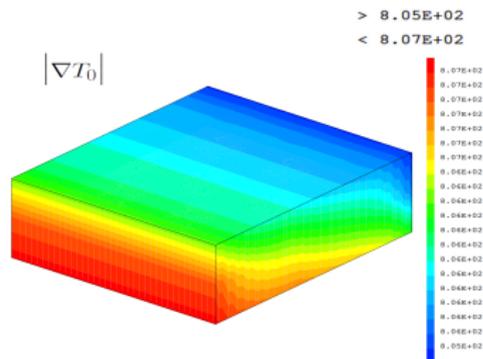
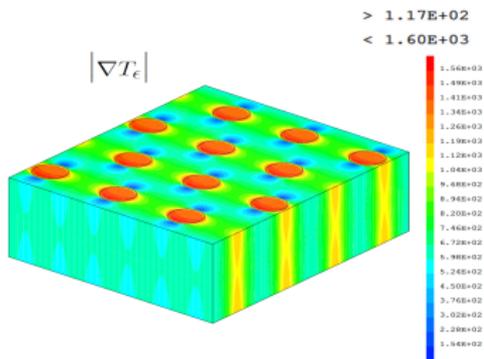
# Comparaison des différentes solutions



# Comparaison des différentes solutions dans un sous-domaine



# Comparaison des gradients des différentes solutions dans un sous domaine



## Courbe de convergence

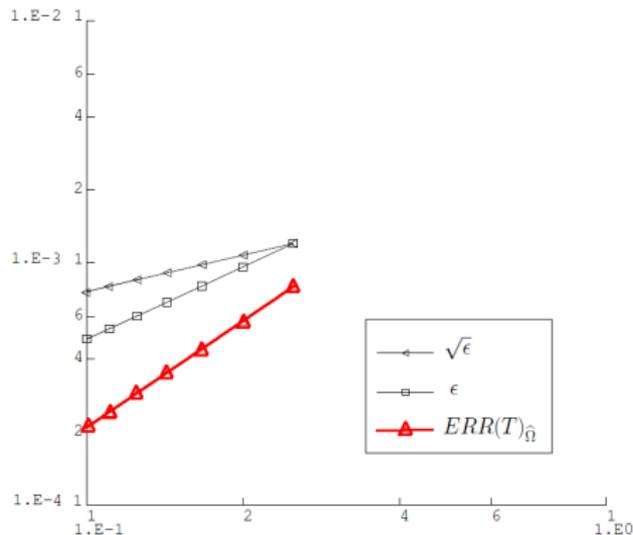


FIGURE: Evolution de l'erreur sur la température

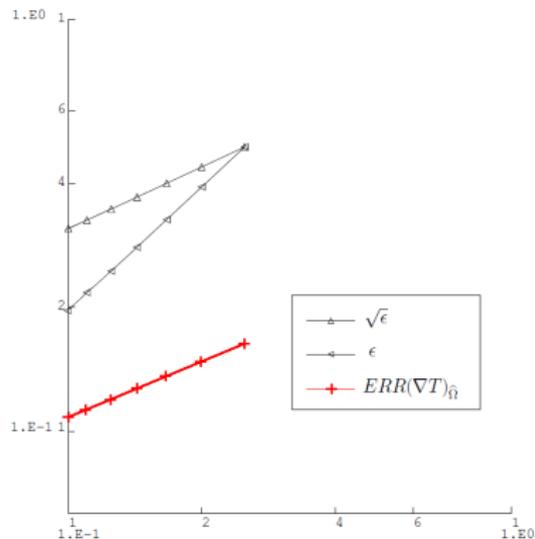


FIGURE: Evolution de l'erreur sur le gradient de température

## Conclusions

Les résultats acquis :

- ▷ étude rigoureuse du modèle 3-D linéaire,
- ▷ étude formelle du modèle 3-D non-linéaire,

Perspectives :

- ▷ justification mathématique dans le cas d'un opérateur de rayonnement non-linéaire. Absence de convexité et de monotonie,
- ▷ autres conditions limites que celles de type Dirichlet dans l'analyse 3-D.

MERCI DE VOTRE ATTENTION !