

**ECOLE POLYTECHNIQUE**

**CENTRE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES**

*UMR CNRS 7641*

---

91128 PALAISEAU CEDEX (FRANCE). Tél: 01 69 33 41 50. Fax: 01 69 33 30 11  
<http://www.cmap.polytechnique.fr/>

**Contacts en dimension 2**  
**Une méthode de pénalisation**

O. Pantz

**R.I. 597**

*Février 2006*



# *Contacts en dimension 2*

-

## *Une méthode de pénalisation*

OLIVIER PANTZ

### **Résumé.**

On considère le problème de prise en compte d'un point de vu numérique des contacts et auto-contacts unilatéraux sans frottements de structures élastiques non linéaires unidimensionnelles se déplaçant dans le plan  $\mathbb{R}^2$ . Le problème principal réside dans le traitement de la contrainte de non intersection. On propose une méthode de pénalisation originale, basée sur une modélisation que nous avons introduite dans nos précédents travaux.

### **1. Introduction**

La simulation numérique des contacts entre divers solides déformables reste, malgré les nombreux travaux qu'elle a suscité, un problème très délicat en mécanique des milieux déformables. Outre la prise en compte de la contrainte de non interpénétration, les simulations réalistes nécessitent la prise en compte des frottements et des chocs, dans le cas dynamique, auxquels d'autres phénomènes peuvent s'agréger comme l'usure, l'endommagement, la formation de fractures ou même la dislocation. Dans cet article, on se limite au problème lié à la prise en compte des contraintes de non interpénétrations entre solides déformables subissant de grandes déformations. La grande majorité des travaux portant sur le sujet sont basés sur une formulation de type maître/esclave. Rappelons brièvement en quoi cette dernière consiste. Considérons deux solides déformables, de configuration de référence  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , ouverts distincts de  $\mathbb{R}^n$ , de déformations  $\varphi_i : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $n = 2$  ou  $3$ ). L'un des solide (par exemple  $\Omega_1$ ) est désigné comme solide maître et l'autre comme esclave. On introduit  $g_\varphi$ , dite fonction "gap", qui à tout élément de  $\Omega_2$  associe sa distance signée à  $\varphi_1(\partial\Omega_1)$ , c'est à dire

$$g_\varphi(x) = \begin{cases} \text{dist}(\varphi_2(x), \varphi_1(\partial\Omega_1)) & \text{si } \varphi_2(x) \notin \varphi_1(\Omega_1) \\ -\text{dist}(\varphi_2(x), \varphi_1(\partial\Omega_1)) & \text{si } \varphi_2(x) \in \varphi_1(\Omega_1) \end{cases}$$

Afin de prévenir le recouvrement des deux solides déformés, une contrainte est appliquée à tout élément du bord du solide esclave  $\Omega_2$ . Plus précisément, il s'agit d'imposer que la distance signée à  $\varphi_1(\partial\Omega_1)$  de tout élément de  $\varphi_2(\partial\Omega_2)$  reste positive:

$$g_\varphi(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in \partial\Omega_2. \quad (1)$$

Un exposé détaillé de cette formulation peut être trouvé dans la thèse de Laursen [30] (voir aussi [18]). Cette approche présente deux difficultés importantes. Tout d'abord, elle ne peut s'appliquer tel quelle ni au traitement des auto-contacts ( $\Omega_1 = \Omega_2$  et  $\varphi_1 = \varphi_2$ ) ni des structures minces ( $\varphi_i : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\Omega_i$  ouvert de  $\mathbb{R}^p$  avec  $p < n$ ). Dans ces cas, les contraintes (1) sont vérifiées par toute déformation. D'autre part, certaines déformations vérifiant (1) présentent malgré tout des auto-intersections, même à imposer la contrainte supplémentaire  $\det(\nabla\varphi_i) > 0$  presque partout. Enfin, la non dérivabilité de la distance signée par rapport aux déformations  $\varphi_1, \varphi_2$  peut entraîner un phénomène de non convergence des schémas numériques connu sous le nom de “chatter”(tremblements), Diverses stratégies ont été développées pour contourner ces écueils. Puso et Laursen [25] proposent notamment une régularisation de la distance signée, tandis que Heinstein et al. [15] ont adapté l'approche maître/esclave à l'étude des structures minces et des auto-contacts. Leur algorithme semble efficient dans la plupart des cas courants, même si il pourrait a priori être mis en défaut dans des situations complexes. Pour un exposé détaillé des diverses stratégies développées dans ce contexte, nous renvoyons le lecteur à l'article de Hallquist et al. qui contient de nombreuses références [11] (voire aussi [17, 32] ) et aux monographies de Kikuchi et Oden [16] ou Wriggers [23]. Une approche différente a été proposée par Hirota, Fisher et State [12] dite “material depth” pour traiter le cas des auto-contacts, mais elle semble difficile à adapter à l'étude des structures minces. Une autre branche s'est constituée autour du traitement des contacts entre solides rigides. Ses représentants s'intéressent soit à l'étude des milieux granulaires, soit à des applications à l'industrie des animations graphiques. La méthode NSCD (Non Smooth Contact Dynamic) a été introduite par M. Jean [13], [14] et J.-J. Moreau [22] pour l'étude des milieux granulaires. Une méthode assez proche dite OBA (Optimization Based Animation) a été mise au point (de manière indépendante semble-t-il) par Schmidl et Milenkovic [19] (voir également Baraff [3, 4] et Baraff et Witkin [5, 6]).

Il est à noter que si la formulation maître/esclave semble naturelle, elle n'a pour autant aucune justification théorique complètement satisfaisante. Les principaux problèmes théoriques, liés à l'étude des contacts sans frottement, portent sur la définition de l'ensemble des déformations admissibles, l'existence de minimiseurs de l'énergie sur cet ensemble et l'obtention des équations d'Euler Lagrange vérifiées par les minimiseurs. Ball [2] considère le problème de l'injectivité presque partout de solides hyperélastiques avec conditions aux bords de type Dirichlet. Ciarlet and Nečas [7] ont proposés une modélisation permettant de considérer des conditions aux limites mixtes

(voir aussi Tang Qi [31], Giaginta & al [8], [9]). Cette dernière ne s'applique par contre pas à l'étude des structures minces. Gonzalez et al. [10], Schuricht et al. [29] ont étudié les contacts et auto-contacts de structures unidimensionnelles (dans  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ ) (voir aussi [27], [26] et [28]).

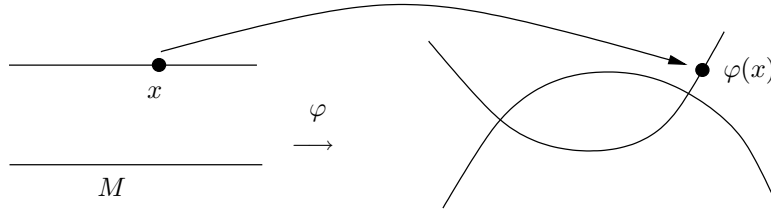
Récemment, nous avons proposé une nouvelle modélisation des contacts et auto-contacts sans frottement en mécanique des solide déformables [24], physiquement satisfaisante pour  $\Omega_i \in \mathbb{R}^m$ , dans les cas  $(m, n) = (2, 2)$ ,  $(m, n) = (3, 3)$ ,  $m, n = (2, 3)$  et  $(m, n) = (1, 2)$  (où  $n$  est la dimension de l'espace dans lequel est plongé  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^m$ , c'est à dire  $\varphi_i : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ ). Cette modélisation repose sur une nouvelle définition de l'ensemble des déformations admissibles. Une contrainte est introduite afin d'assurer que les déformations admissibles ne présentent pas d'auto-intersections transverses.

L'objet du présent article consiste à proposer une implantation numérique de cette modélisation par une méthode de pénalisation en dimension  $n = 2$ . Notons que notre approche diffère radicalement de la formulation maître/esclave usuellement utilisée.

Notre article se décompose comme suit. La section 2 est consacrée à la formulation mathématique du problème. On y définit l'ensemble des déformations sans auto-intersection (section 2.1) et présentons ses principales propriétés (section 2.2). Dans un deuxième temps, on définit diverses fonctions de pénalisation des déformations présentant des auto-intersections (section 3). Le problème statique de recherche d'une déformation d'énergie minimale d'une membrane présentant des contacts ou auto-contacts sans frottement est étudié en détail (voir section 4) à titre d'exemple. Enfin, deux applications numériques sont présentées, l'une concerne le problème de projection d'une déformation quelconque sur l'ensemble des déformations admissibles, l'autre la minimisation de l'énergie d'un système constitué de ballons (section 5).

## 2. L'ensemble des déformations admissibles

Soit  $M$  une union disjointes d'ensembles difféomorphes soit à l'intervalle fermé  $[0, 1]$ , soit au cercle unité  $S^1$  de  $\mathbb{R}^2$ . Toute déformation de  $M$ , c'est à dire toute application de  $M$  dans  $\mathbb{R}^2$  n'est pas physiquement raisonnable, comme par exemple la déformation représentée sur la figure 1 (où  $M$  est constitué de deux intervalles) qui comporte des intersections. Caractériser l'ensemble des déformations physiquement raisonnable est un problème assez délicat, notamment lorsqu'on s'intéresse aux structures minces comme dans le cas présent. Dans l'un de nos travaux précédents [24] nous proposons une réponse partielle à cette question. On y définit l'ensemble des déformations admissibles par l'introduction d'une contrainte de type topologique. On prouve que l'ensemble ainsi défini vérifie un certain nombre de propriétés qui en fait un ensemble de déformations physiquement raisonnables. Dans la section 2.1, on rappelle la définition de l'ensemble des déforma-



**Fig. 1.** déformation non physiquement raisonnable

tions admissibles tandis que ces principales propriétés sont rappelées dans la section 2.2.

### 2.1. Définition de l'ensemble des déformations admissibles

On introduit tout d'abord le champ de vecteurs  $\Phi$  de  $\mathbb{R}_*^2 = \mathbb{R}^2 - (0, 0)$  défini par

$$\Phi(x_1, x_2) = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Le champ  $\Phi$  est de rotationnel nul. Cependant, ce n'est pas un gradient. En effet si  $n$  est la normale extérieure au bord de la boule unité,  $\int_{S^1} n \wedge \Phi ds$  est non nulle, égale à  $2\pi$ . Notons enfin que si  $x$  est une fonction dérivable à valeurs dans  $\mathbb{R}_*^2$  de la forme,  $x(t) = r(t)(\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)))$ , on a  $\theta'(t) = \Phi(x(t)) \cdot x'(t)$ .

Soit  $j_M : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'injection de référence de  $M$  dans  $\mathbb{R}^2$ . On suppose que  $j$  est un plongement, c'est à dire une application de classe  $C^1$ , injective et de dérivée partout non nulle. Soit  $\varphi$  une déformation régulière de  $M$ . On introduit l'application de  $M \times M$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  définie par

$$r_\varphi(x_1, x_2) = \varphi(x_1) - \varphi(x_2)$$

pour tout  $(x_1, x_2)$  dans  $M \times M$ . On dit que  $\varphi$  est une déformation admissible si et seulement si, pour tout ouvert  $U$  de  $\text{int}(M) \times \text{int}(M)$  tel que

$$\inf_{x \in U} |r_\varphi(x)| > 0 \quad (2)$$

il existe une application  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\Phi_\varphi(x) = \nabla u(x), \text{ pour tout } x \in U, \quad (3)$$

où  $\Phi_\varphi$  est le champ de vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  défini sur  $U$  par

$$\Phi_\varphi = \nabla r_\varphi(\Phi(r_\varphi)) - \nabla r_j(\Phi(r_j)).$$

On note  $\mathcal{A}(j_M)$  l'ensemble des déformations admissibles.

## 2.2. Propriétés principales de l'ensemble des déformations admissibles

A première vue, il n'est pas évident que le critère (3) définisse un ensemble de déformations physiquement raisonnable. Dans les sections suivantes, on établit ou énonce certaines propriétés de l'ensemble  $\mathcal{A}(j_M)$ . Dans la section 2.2.1, on prouve que toute déformation isotope à l'injection de référence appartient à l'ensemble des déformations admissibles, dans la section 2.2.2, qu'une déformation présentant des auto-intersections transverses n'est pas admissible. La section 2.2.3 est consacrée à une extension du critère (3) aux déformations continues.

### 2.2.1. Déformations isotopes à l'injection de référence

On dit qu'une déformation  $\varphi$  est isotope à  $j_M$  s'il existe une application  $F \in C^1([0, 1] \times M; \mathbb{R}^2)$  telle que

$$F(0, x) = j(x); \quad F(1, x) = \varphi(x) \text{ pour tout } x \in M$$

et telle que l'application  $x \mapsto F(t, x)$  soit un plongement pour tout  $t \in [0, 1]$ .

**Proposition 1.** *Toute déformation isotope au plongement de référence  $j_M$  appartient à l'ensemble des déformations admissibles  $\mathcal{A}(j_M)$ .*

**Preuve.** Soit  $\varphi$  une déformation isotope à l'injection de référence. Soit  $U$  un ouvert de  $\text{int}(M) \times \text{int}(M)$  tel que

$$\inf_{x \in U} |r_\varphi(x)| > 0.$$

Pour toute application  $G$  régulière

$$\begin{aligned} G : [0, 1] \times U &\rightarrow \mathbb{R}_*^2 \\ (t, x_1, x_2) &\mapsto G(t, x_1, x_2), \end{aligned}$$

on a

$$\frac{d}{dt}(\nabla G \Phi(G)) = \nabla \left( \frac{dG}{dt} \cdot \phi(G) \right) \nabla G((\nabla \Phi^T - \nabla \Phi) \circ G) \frac{dG}{dt}.$$

Comme le rotationnel de  $\Phi$  est nul, on en déduit en appliquant l'équation précédente à  $G(t, x_1, x_2) = F(t, x_1) - F(t, x_2)$  que

$$\begin{aligned} \nabla r_\varphi(\Phi(r_\varphi)) - \nabla r_j(\Phi(r_j)) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(\nabla G \Phi(G)) dt \\ &= \int_0^1 \nabla \left( \frac{dG}{dt} \cdot \Phi(G) \right) dt \\ &= \nabla \left( \int_0^1 \frac{dG}{dt} \cdot \Phi(G) dt \right). \end{aligned} \quad (4)$$

### 2.2.2. Déformations avec auto-intersections transverses

Remarquons tout d'abord que pour toute déformation  $\varphi$ , le champ de vecteur  $\Phi_\varphi$  est de rotationnel nul sur l'ensemble des points  $x$  de  $M \times M$  tels que  $r_\varphi(x) \neq 0$ . En effet, on a

$$\nabla \wedge (\nabla r_\varphi \Phi(r_\varphi)) = \frac{\partial r_\varphi}{\partial x_2} \cdot (\nabla \Phi - \nabla \Phi^T)(r_\varphi) \frac{\partial r_\varphi}{\partial x_1}.$$

Or comme  $\nabla \wedge \Phi = 0$ , on a  $\nabla \Phi - \nabla \Phi^T = 0$  et  $\nabla \wedge (\nabla r_\varphi \Phi(r_\varphi)) = 0$ . Au vu de ce résultat, on ne peut cependant pas en déduire que  $\Phi_\varphi$  est un gradient, car l'ensemble des points tels que  $r_\varphi(x) \neq 0$  n'est pas nécessairement simplement connexe. Le critère (3) n'est pas vide comme nous allons le montrer maintenant.

On dit qu'une déformation régulière  $\varphi$  possède une intersection transverse en un point  $(x_1, x_2)$  de  $M \times M$  si  $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$  et si  $(\dot{\varphi}(x_1), \dot{\varphi}(x_2))$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ . Une telle déformation, dont un exemple est donné par la figure 1, n'est pas physiquement raisonnable.

**Proposition 2.** *Si  $\varphi$  est une déformation régulière possédant une auto-intersection transverse, alors  $\varphi$  n'appartient pas à l'ensemble des déformations admissibles  $\mathcal{A}(j_M)$ .*

**Preuve.** Soit  $\varphi$  une déformation possédant une intersection transverse en  $(x_1, x_2)$ . L'application  $r_\varphi$  est tel que  $\nabla r_\varphi(x_1, x_2)$  est de rang maximal. D'après le théorème des fonctions implicite, il existe un voisinage  $V$  de  $(x_1, x_2)$  et un petit réel positif  $r$  tel que  $r_\varphi$  définisse un difféomorphisme de  $V$  dans la boule de  $\mathbb{R}^2$  centrée en 0 de rayon  $r$ . Par un simple changement de variable, on en déduit que

$$\int_{\partial V} \nabla r_\varphi(\Phi(r_\varphi)) \cdot ds = \int_{|x|=r} \Phi(s) \cdot ds = \text{signe}(\det(\nabla r_\varphi)).$$

D'autre part, notons que pour tout  $\varphi$ , le champ  $\nabla r_\varphi(\Phi(r_\varphi))$  est de rotationnel nul. En particulier,

$$\int_{\partial V} \nabla r_j(\Phi(r_j)) \cdot ds = - \int_V \nabla \wedge (\nabla r_j(\Phi(r_j))) dx = 0.$$

Enfin, pour tout champ de vecteur  $u$  de  $V - (x_1, x_2)$ , on a

$$\int_{\partial V} \nabla u \cdot ds = 0.$$

Ainsi,

$$\int_{\partial V} \Phi_\varphi \cdot ds = \int_{\partial V} (\nabla r_\varphi(\Phi(r_\varphi)) - \nabla r_j(\Phi(r_j))) \cdot ds \neq \int_{\partial V} \nabla u \cdot ds$$

et  $\varphi$  n'appartient pas à l'ensemble des déformations admissibles.



Remarquons que si  $\varphi$  ne possède que des auto-intersections transverses,  $r_\varphi^{-1}(0) \setminus \Delta(M)$  où

$$\Delta(M) = \{(x_1, x_2) \in M \times M : x_1 = x_2\}$$

est un ensemble fini de points dont chacun peut être muni d'un signe déterminé par le déterminant du gradient de  $r_\varphi$ .

### 2.2.3. Extension de la définition de l'ensemble admissible aux déformations continues

La définition de l'ensemble des déformations admissibles  $\mathcal{A}(j_M)$  peut être étendue aux déformations continues. Ceci découle de la propriété de stabilité suivante

**Lemme 1.** *Soit  $\varphi$  une déformation régulière de  $M$ . Soit  $U$  un ouvert de  $\text{int}(M) \times \text{int}(M)$  tel que*

$$\inf_{x \in U} |r_\varphi(x)| > \delta > 0,$$

alors pour toute déformation régulière  $\tilde{\varphi}$  telle que

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}\| < \delta,$$

il existe  $u$  tel que

$$\Phi_\varphi - \Phi_{\tilde{\varphi}} = \nabla u.$$

**Preuve.** Il suffit de poser  $\varphi_t = (1-t)\varphi + t\tilde{\varphi}$ . D'après (4), on a

$$\Phi_\varphi - \Phi_{\tilde{\varphi}} = \nabla \left( \int_0^1 \frac{d\varphi_t}{dt} \cdot \Phi \circ \varphi_t dt \right).$$

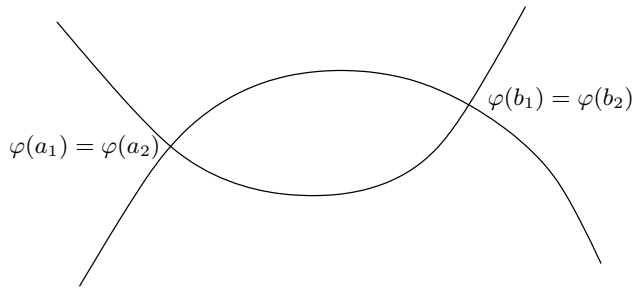
On déduit de ce lemme que le critère (3) est stable par perturbation  $\mathcal{C}^0$  de  $\varphi$  à  $U$  fixé. Ainsi, une déformation continue sera dite admissible si et seulement si, pour tout ouvert  $U$  de  $\text{int}(M) \times \text{int}(M)$  tel que

$$\inf_{x \in U} |r_\varphi(x)| > \delta > 0,$$

et toute déformation  $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}^1(M; \mathbb{R}^2)$  suffisamment proche de  $\varphi$  une application  $u$  de  $U$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$\Phi_{\tilde{\varphi}}(x) = \nabla u(x) \text{ pour tout } x \in U.$$

A cause de la propriété de stabilité, il suffit de vérifier cette condition pour une déformation  $\tilde{\varphi}$  quelconque pourvu que  $\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{L^\infty} < \delta/2$ . On peut montrer que l'ensemble ainsi obtenu est fermé pour la topologie  $\mathcal{C}^0$ .



**Fig. 2.** Une intersection simple

#### 2.2.4. Fermeture et densité

Signalons pour finir deux propriétés importantes, dont les preuves peuvent être trouvées dans [24]. L'une est une propriété de fermeture, l'autre une réciproque partielle de la proposition 1

**Proposition 3.** *L'ensemble des déformations admissibles  $\mathcal{A}(j_M)$  est fermé pour la topologie  $C^0$ .*

**Proposition 4.** *Toute immersion appartenant à  $\mathcal{A}(j_M)$  appartient à l'adhérence  $C^1$  des plongements isotopes à l'injection de référence  $j_M$ .*

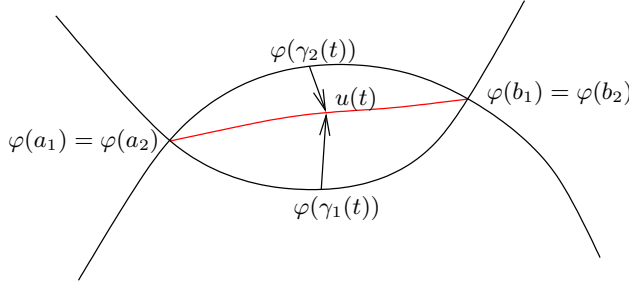
### 3. Pénalisation

L'objet de cette section consiste à introduire diverses pénalisations des déformations non admissibles. Dans un premier temps, on effectue une étude heuristique afin d'estimer la distance d'une déformation présentant une intersection simple comme celle représentée sur la figure 1 à l'ensemble des déformations admissibles. Cette étude est étendue au cas quelconque dans la section 3.2. Cependant, la fonction de pénalisation ainsi introduite présente certains inconvénients. En particulier, elle n'est pas dérivable, ce qui s'avère handicapant d'un point de vue numérique. Ceci nous conduit à considérer deux familles de fonctions de pénalisations, dont les définitions reposent néanmoins sur le même principe (section 3.4). Dans tout ce qui suit, les déformations introduites seront supposées appartenir au moins à  $W^{1,1}(M; \mathbb{R}^2)$ .

#### 3.1. Une étude heuristique

On considère le cas d'un solide  $M$  constitué de deux intervalles disjoints  $I_1$  et  $I_2$  tous deux difféomorphes à l'intervalle fermé  $[0, 1]$  et la déformation  $\varphi$  représentée par la figure 2. Cette dernière présente deux intersections transverses l'une en  $a = (a_1, a_2) \in I_1 \times I_2$ , l'autre en  $b = (b_1, b_2) \in I_1 \times I_2$ . En d'autres termes,

$$\varphi(a_1) = \varphi(a_2), \quad \varphi(b_1) = \varphi(b_2)$$



**Fig. 3.** Élimination d'une intersection

tandis que les familles  $(\dot{\varphi}(a_1), \dot{\varphi}(a_2))$  et  $(\dot{\varphi}(b_1), \dot{\varphi}(b_2))$  sont chacune des bases de  $\mathbb{R}^2$ .

On cherche à construire une déformation admissible  $\psi$  proche de  $\varphi$ . A cet effet, on va définir une famille de déformations admissibles  $\psi_{u,\gamma}$  dépendant de deux paramètres  $u$  et  $\gamma$ . La déformation  $\psi$  recherchée sera obtenue en minimisant la distance de  $\psi_{u,\gamma}$  à  $\varphi$  par rapport à  $\gamma$  et  $u$ .

Quitte à intervertir les orientations de  $I_1$  et  $I_2$ , on peut supposer que  $a_1 < b_1$  et  $a_2 < b_2$ . La déformation  $\psi_{u,\gamma}$  est obtenue en recollant les portions  $\varphi([a_1, a_2])$  et  $\varphi([b_1, b_2])$  le long d'une courbe  $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Ainsi,  $\psi_{u,\gamma}$  est tel que  $\psi_{u,\gamma} = \varphi(x)$  pour tout  $x \notin [a_1, a_2] \cup [b_1, b_2]$  et

$$\psi_{u,\gamma}([a_1, a_2]) = \psi_{u,\gamma}([b_1, b_2]) = u([0, 1]).$$

De plus, pour assurer la continuité de  $\psi_{u,\gamma}$  on choisit  $u$  tel que

$$u(0) = \varphi(a_1) = \varphi(a_2) \text{ et } u(1) = \varphi(b_1) = \varphi(b_2).$$

Reste à préciser la définition de  $\psi_{u,\gamma}$  sur  $[a_1, a_2] \cup [b_1, b_2]$ , c'est à dire à décrire comment chaque brin est recollé le long de la courbe définie par  $u$ . Pour ce faire, on se donne une application  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  de  $[0, 1]$  à valeurs dans  $M \times M$ . On suppose de plus que pour  $i = 1, 2$  les applications  $\gamma_i$  définissent des difféomorphismes de  $[0, 1]$  dans  $[a_i, b_i]$ . Pour tout  $t \in [0, 1]$  on pose

$$\psi_{u,\gamma}(\gamma_1(t)) = u(t)$$

et

$$\psi_{u,\gamma}(\gamma_2(t)) = u(t).$$

Si la déformation  $u$  est sans intersection, la déformation  $\psi_{u,\gamma}$  est admissible (voir la figure 3). Il ne reste plus qu'à minimiser la distance de  $\psi_{u,\gamma}$  à  $\varphi$  pour obtenir une estimation de la distance de  $\varphi$  à l'ensemble des déformations admissibles. On choisit d'évaluer cette distance à l'aide de la norme  $W_0^{1,1}$ . Dans un premier temps, on minimise par rapport au paramètre  $u$  et on pose

$$\mathcal{L}_\varphi(\gamma) = \inf_u \|\psi_{u,\gamma} - \dot{\varphi}\|_{L^1}.$$

*Remarque 1.* D'autres normes, autres que  $W_0^{1,1}$  pourraient être envisagées. Cependant, c'est le seul choix qui semble conduire à un résultat exploitable.

Le minimum de  $\|\dot{\psi}_{u,\gamma} - \dot{\varphi}\|_{L^1}$  par rapport à  $u$  est atteint pour n'importe quel fonction  $u$  de la forme

$$u = \theta\varphi \circ \gamma_1 + (1 - \theta)\varphi \circ \gamma_2$$

avec  $\theta \in [0, 1]$ . Ainsi, on a

$$\mathcal{L}_\varphi(\gamma) = \int_0^1 \left| \frac{d(\varphi \circ \gamma_1 - \varphi \circ \gamma_2)}{dt} \right| dt.$$

Notons que  $\mathcal{L}_\varphi$  n'est rien d'autre que la longueur de la courbe  $r_\varphi \circ \gamma$  et peut donc être défini pour toute déformation  $\varphi$  continue (dans ce cas,  $\mathcal{L}_\varphi$  n'est pas nécessairement fini). On obtient ainsi une estimation de  $\varphi$  à l'ensemble des déformations admissibles en posant

$$J(\varphi) = \inf_{\gamma} \mathcal{L}_\varphi(\gamma),$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des fonctions  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M \times M$  telles que  $\gamma(0) = a$  et  $\gamma(1) = b$ . Ainsi,  $J(\varphi)$  est la distance dans  $I_1 \times I_2$  entre les points  $a = (a_1, a_2)$  et  $b = (b_1, b_2)$  pour la métrique telle que la longueur infinitésimale  $dl$  du vecteur  $(dx_1, dx_2)$  au point  $(x_1, x_2)$  est

$$dl = |\dot{\varphi}(x_1)dx_1 - \dot{\varphi}(x_2)dx_2|.$$

Reste à étendre la définition de  $J$  au cas général.

### 3.2. Définition d'une fonction de pénalisation

On note  $C_1(M \times M)$  l'ensemble des familles finies d'applications continues soit du cercle  $S^1$  dans  $M \times M$ , soit de l'intervalle  $[0, 1]$  dans  $M \times M$ . Soit  $\varphi$  une déformation régulière de  $M$  (où  $M$  est une union disjointe de cercles et d'intervalles fermés) appartenant à l'espace  $W^{1,1}(M; \mathbb{R}^2)$ . Soit  $U$  un ouvert de  $\text{int}(M) \times \text{int}(M)$  vérifiant la condition (2). On introduit le sous ensemble  $\Gamma_U(\varphi)$  de  $C_1(M \times M)$  défini par

$$\Gamma_U(\varphi) = \left\{ \gamma \in C_1(M \times M) : \partial\gamma \subset \mathbb{C}U, \right. \\ \left. \int_{\gamma} (\omega \wedge n) ds = \int_{M \times M} (\omega \wedge \Phi_\varphi) dx, \text{ pour tout champ de vecteur } \omega \text{ de } M \times M \right. \\ \left. \text{tel que } \nabla \wedge \omega = 0 \text{ et dont le support est inclus dans } U \right\}. \quad (5)$$

On définit de plus la fonction  $J_U$  par

$$J_U(\varphi) = \inf_{\gamma \in \Gamma_U(\varphi)} \mathcal{L}_\varphi(\gamma).$$

Enfin, la fonction de pénalisation  $J$  est obtenue en prenant le supremum de  $J_U$  sur l'ensemble des  $U$  vérifiant la condition (2):

$$J(\varphi) = \sup_U J_U(\varphi).$$

Notons que si  $U$  et  $V$  sont deux ouverts vérifiant la conditions (2) tels que  $U \subset V$ , on a alors  $J_U(\varphi) \leq J_V(\varphi)$ . En conséquence, on peut également définir  $J$  par

$$J(\varphi) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} J_{U_\delta(\varphi)}(\varphi),$$

où

$$U_\delta(\varphi) = \{(x_1, x_2) \in \text{int}(M) \times \text{int}(M) : |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| > \delta\}. \quad (6)$$

Enfin, la définition de  $J$  peut être étendue aux déformations continues, grâce au lemme suivant

**Lemme 2.** *Soit  $\varphi$  une déformation de  $M$ . Soit  $U$  un ouvert de  $\text{int}(M) \times \text{int}(M)$  tel que*

$$\inf_{x \in U} |r_\varphi(x)| > \delta > 0,$$

*alors pour toute déformation  $\tilde{\varphi}$  de  $M$  telle que*

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}\| < \delta,$$

*on a  $\Gamma_U(\varphi) = \Gamma_U(\tilde{\varphi})$ .*

**Preuve.** En raisonnant comme en (4), on obtient que pour tout  $x \in U$ ,

$$(\Phi_{\tilde{\varphi}} - \Phi_\varphi)(x) = \nabla v(x),$$

où

$$v = \int_0^1 \frac{dr_{\varphi_t}}{dt} \cdot \Phi(r_{\varphi_t}) dt.$$

Ainsi, pour tout champ de vecteur  $\omega$  de rotationnel nul de support inclus dans  $U$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{M \times M} (\omega \wedge \Phi_{\tilde{\varphi}}) - (\omega \wedge \Phi_\varphi) dx &= \int_U (\omega \wedge \nabla v) dx \\ &= - \int_U \nabla \wedge (v\omega) dx = \int_{\partial U} v(n \wedge \omega) ds = 0. \end{aligned}$$

Pour toute déformation continue  $\varphi$  et tout ouvert  $U$  vérifiant la condition (2), il suffit de posé

$$J_U(\varphi) = \inf_{\gamma \in \Gamma_U(\tilde{\varphi})} \mathcal{L}_\varphi(\gamma).$$

avec  $\tilde{\varphi}$  suffisamment proche de  $\varphi$ . D'après la propriété de stabilité précédente,  $\Gamma_U(\tilde{\varphi})$  est indépendant du choix de  $\tilde{\varphi}$  et  $J_U(\varphi)$  est correctement défini.

Afin d'évaluer  $J(\varphi)$  il faut caractériser explicitement l'ensemble  $\Gamma_U(\varphi)$ . On vérifiera ainsi que la fonction de pénalisation obtenue est bien une généralisation de celle introduite lors de notre étude heuristique.

### 3.3. Calcul de la fonction de pénalisation $J$

Dans cette section on cherche à évaluer  $J(\varphi)$ . On considère dans un premier temps le cas d'une déformation  $\varphi$  appartenant à l'ensemble des déformations admissibles. Dans ce cas, on prouve que  $J(\varphi)$  est nul. Dans un deuxième temps, on considère une déformation  $\varphi$  quelconque, mais on se limite aux solides  $M$  constitués uniquement d'une union d'intervalles fermés. Enfin, on considère le cas  $M = S^1$ . Le cas d'un solide  $M$  quelconque (constitué d'une union d'intervalles et de cercles) n'est pas abordé, car la formulation du résultat est assez laborieuse et n'apporte pas d'éléments nouveaux.

#### 3.3.1. Cas d'une déformation admissible

Considérons une déformation admissible  $\varphi \in W^{1,1}(M; \mathbb{R}^2)$ . Pour tout ouvert  $U$  de  $\text{int}(M) \times \text{int}(M)$  vérifiant (2), il existe une application  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\Phi_\varphi(x) = \nabla u(x) \text{ pour tout } x \in U.$$

Si  $\omega$  est un champ de vecteurs de rotationnel nul de support inclus dans  $U$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{M \times M} \omega \wedge \Phi_\varphi dx &= \int_U \omega \wedge \nabla u dx = - \int_U \nabla \wedge (u\omega) dx \\ &= \int_{\partial U} u(n \wedge \omega) ds = 0. \end{aligned}$$

La famille vide appartient donc à  $\Gamma_U(\varphi)$  et  $J(\varphi) = J_U(\varphi) = 0$ . On a montré que

**Proposition 5.** *Si  $\varphi$  appartient à l'ensemble des déformations admissibles  $\mathcal{A}(j)$ , alors  $J(\varphi) = 0$ .*

#### 3.3.2. Cas d'un solide de topologie triviale

Afin d'évaluer  $J(\varphi)$ , il nous faut déterminer explicitement  $\Gamma_U(\varphi)$ . Ce dernier dépend fortement de la topologie de  $M$ . Le cas le plus simple consiste à considérer un solide  $M$  dont chaque composante connexe est simplement connexe, c'est à dire lorsque  $M$  est une union d'intervalles fermés. Le cas d'une topologie non triviale  $M = S^1$  sera étudié dans la section suivante.

Comme l'ensemble des déformations possédant des auto-intersections transverses est dense et d'après le lemme 2, on peut supposer, sans perte de généralité que les auto-intersections de  $\varphi$  sont transverses. Lorsque  $M$  est constitué d'une union d'intervalles fermés, l'ensemble  $\Gamma_U(\varphi)$  est déterminé par la proposition suivante.

**Proposition 6.** *Supposons que  $M$  soit constitué d'une union d'intervalles fermés disjoints. Soit  $\varphi$  une déformation régulière de  $M$  ne possédant que*

des auto-intersections transverses et  $U$  un ouvert de  $\text{int}(M) \times \text{int}(M)$  tel que

$$\inf_{x \in U} |r_\varphi(x)| > 0,$$

alors  $\gamma \in \Gamma_U(\varphi)$  si et seulement si  $\partial\gamma \subset \mathbb{C}U$  et si pour toute composante connexe  $C$  du complémentaire de  $U$  dont l'intersection avec  $\partial(M \times M) \cup \Delta(M)$  est vide, on a

$$\sum_{(x_1, x_2) \in r_\varphi^{-1}(0) \cap C} s(x_1, x_2) = \text{Card}(\gamma(1) \cap C) - \text{Card}(\gamma(0) \cap C)$$

où  $s(x_1, x_2) = \text{signe}(\det(\dot{\varphi}(x_1), \dot{\varphi}(x_2)))$ .

**Preuve.** Comme  $\varphi$  ne possède que des auto-intersections transverses, l'ensemble  $r_\varphi^{-1}(0) \setminus \Delta(M)$  est un ensemble fini de points munis d'une orientation (voir la section 2.2.2). Afin de déterminer  $\Gamma_U(\varphi)$ , on calcule tout d'abord pour tout champ irrotationnel  $\omega$  de support inclus dans  $U$  l'intégrale  $\int_{M \times M} (\omega \wedge \Phi_\varphi) dx$ . Dans un deuxième temps, on détermine  $\int_\gamma (\omega \wedge n) ds$  pour tout élément  $\gamma$  de  $C_1(M \times M)$  dont le bord est inclus dans le complémentaire de  $U$ . Enfin, on compare les deux résultats obtenus afin d'identifier  $\Gamma_U(\varphi)$ .

Pour tout élément  $(x_1, x_2)$  de  $r_\varphi^{-1}(0) \setminus \Delta(M)$ , il existe une petite boule  $B(x_1, x_2)$  centrée en  $(x_1, x_2)$  incluse dans le complémentaire de  $U$ . On pose

$$V = M \times M \setminus \left( \Delta(M) \cup \bigcup_{(x_1, x_2) \in r_\varphi^{-1}(0) \setminus \Delta(M)} B(x_1, x_2) \right).$$

Soit  $\omega$  un champ de vecteur de  $M \times M$  dont le support est inclus dans  $U$ . Comme  $M \times M$  est une union de composantes simplement connexe, le champ de vecteur  $\omega$  est un gradient. Il existe donc une application  $\alpha : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\omega = \nabla\alpha$ . De plus,  $\alpha$  peut être choisi de sorte que  $\alpha$  soit nul sur  $\partial(M \times M) \cup \Delta(M)$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{M \times M} (\omega \wedge \Phi_\varphi) dx &= \int_V \nabla\alpha \wedge \Phi_\varphi dx = \int_V \nabla \wedge (\alpha \Phi_\varphi) dx \\ &= \int_{\partial V} \alpha (\Phi_\varphi \wedge n) ds = \int_{\partial V \setminus \Delta(M)} \alpha (\Phi_\varphi \wedge n) ds. \end{aligned}$$

Sur chacune des boules  $B(x_1, x_2)$ , on a  $\nabla\alpha = \omega = 0$ . Ainsi,  $\alpha$  est constant sur chacune de ces boules et

$$\int_{M \times M} (\omega \wedge \Phi_\varphi) dx = \sum_{(x_1, x_2) \in r_\varphi^{-1} \setminus \Delta(M)} \alpha(x_1, x_2) \int_{\partial B(x_1, x_2)} (\Phi_\varphi \wedge n) ds.$$

Or comme nous l'avons dans la section 2.2.2, on a

$$\int_{\partial B(x_1, x_2)} (\Phi_\varphi \wedge n) ds = s(x_1, x_2),$$

où  $s(x_1, x_2) = \text{signe}(\det(\nabla r_\varphi(x_1, x_2)))$ . On a donc prouver que

$$\int_{M \times M} (\omega \wedge \Phi_\varphi) dx = \sum_{(x_1, x_2) \in r_\varphi^{-1}(0) \setminus \Delta(M)} \alpha(x_1, x_2) s(x_1, x_2).$$

Considérons un élément  $\gamma$  de  $C_1(M \times M)$  dont le bord est inclus dans le complémentaire de  $U$ . On a  $\gamma = (\gamma_j)_{j \in J_1 \cup J_2}$ , où  $\gamma_j$  sont des applications continues de  $[0, 1]$  dans  $M \times M$  si  $j \in J_1$  et de  $S^1$  dans  $M \times M$  si  $j \in J_2$ . On pose  $\gamma(0) = \cup_{j \in J_1} \gamma_j(0)$  et  $\gamma(1) = \cup_{j \in J_1} \gamma_j(1)$ . On a

$$\int_\gamma (\omega \wedge n) ds = \int_\gamma \nabla \alpha \cdot ds = \sum_{(x_1, x_2) \in \gamma(1)} \alpha(x_1, x_2) - \sum_{(x_1, x_2) \in \gamma(0)} \alpha(x_1, x_2). \quad (7)$$

Ainsi,  $\gamma$  appartient à  $\Gamma_U(\varphi)$  si et seulement si pour toute application  $\alpha$  de  $M \times M$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telle que  $\nabla \alpha = 0$  sur  $\mathbb{C}U$ , et  $\alpha = 0$  sur  $\partial(M \times M) \cup \Delta(M)$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{(x_1, x_2) \in r_\varphi^{-1}(0) \setminus \Delta(M)} \alpha(x_1, x_2) s(x_1, x_2) \\ = \sum_{(x_1, x_2) \in \gamma(1)} \alpha(x_1, x_2) - \sum_{(x_1, x_2) \in \gamma(0)} \alpha(x_1, x_2). \end{aligned}$$

En d'autres termes,  $\gamma$  appartient à  $\Gamma_U(\varphi)$  si et seulement si

$$\sum_{(x_1, x_2) \in r_\varphi^{-1}(0) \cap C} s(x_1, x_2) = \text{Card}(\gamma(1) \cap C) - \text{Card}(\gamma(0) \cap C)$$

pour toute composante connexe  $C$  du complémentaire de  $U$  dont l'intersection avec  $\partial(M \times M) \cup \Delta(M)$  est vide. La figure 4 représente un élément de  $\Gamma_U(\varphi)$  où  $\varphi$  est la déformation représentée sur la figure 2. On y a également représenté les boules  $B(x_1, x_2)$  et l'ouvert  $U$ . Nous n'avons représenté que la composante connexe  $I_1 \times I_2$  de  $M \times M$  qui en compte quatre.

La détermination de  $\Gamma_U(\varphi)$  nous permet de donner une expression beaucoup plus simple de  $J(\varphi)$  tout du moins lorsque  $\varphi$  ne possède que des auto-intersections transverses. Dans ce cas, on a

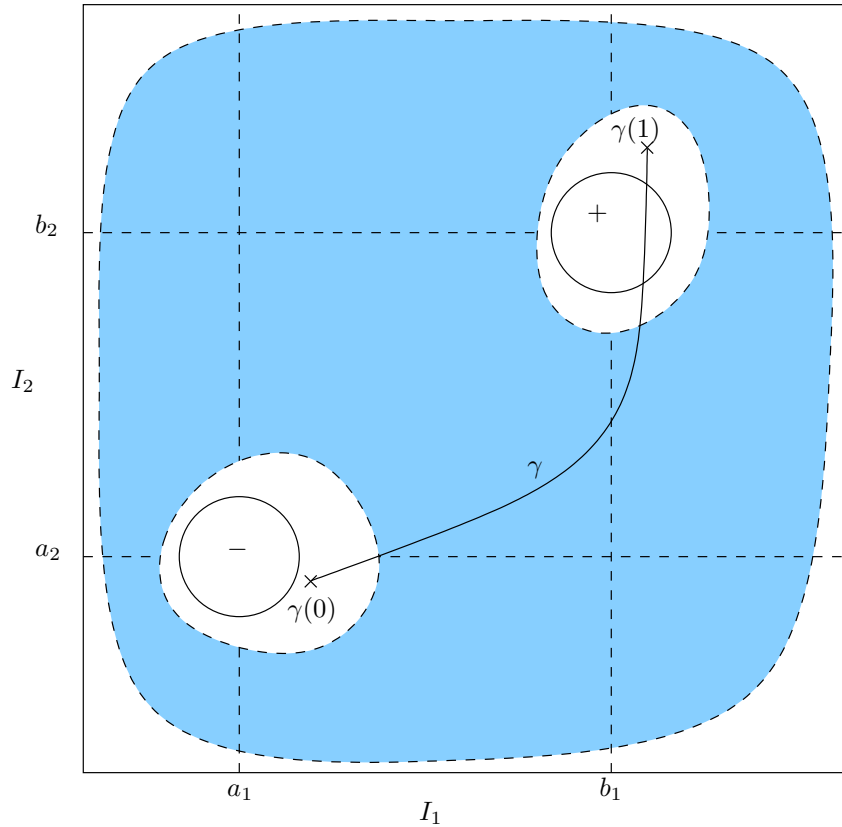
$$J(\varphi) = \inf_{\gamma \in \Gamma(\varphi)} \mathcal{L}_\varphi(\gamma),$$

où

$$\Gamma(\varphi) = \left\{ \gamma \in C_1(M \times M) : \partial\gamma \cap \text{int}(M \times M \setminus \Delta(M)) = r_\varphi^{-1}(0) \setminus \Delta(M) \right\}. \quad (8)$$

Notons que  $\partial\gamma$  est un ensemble fini de points qu'on peut munir d'une orientation: positive pour les éléments de  $\gamma(1)$  et négative pour les éléments





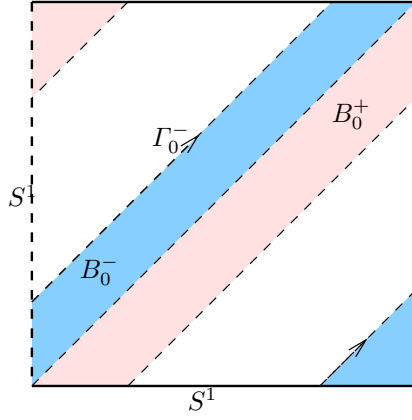
**Fig. 4.** Un élément de  $\Gamma_U(\varphi)$

de  $\gamma(0)$ . Par l'égalité  $\partial\gamma \cap \text{int}(M \times M \setminus \Delta(M)) = r_\varphi^{-1}(0) \setminus \Delta(M)$  on entend une égalité des deux ensembles, mais également des signes affectés à chaque élément.

L'expression obtenue coïncide avec celle introduite dans notre étude heuristique dans le cas d'une intersection simple. De plus, elle assure que si  $\varphi$  est régulière et ne possède que des auto-intersections transverses, alors  $J(\varphi)$  est fini. La pénalisation  $J$  n'est donc pas la pénalisation triviale, nulle sur les déformations admissibles, infinie sur les déformations non admissibles. De plus,  $J$  est continue sur l'ensemble des déformations transverses, muni de la topologie  $W^{1,1}$ .

### 3.3.3. Cas du cercle

Dans le cas où  $M = S^1$ , on peut suivre un raisonnement similaire à celui effectué dans la section précédente. Cependant, la caractérisation de  $\Gamma_U(\varphi)$  est un peu plus délicate et nécessite l'introduction de quelques définitions supplémentaires. Notons tout d'abord que d'après la propriété de stabilité



**Fig. 5.** Les sous ensemble  $B_0^-$  et  $B_0^+$  de  $S^1 \times S^1$

de  $\Gamma_U(\varphi)$  par rapport à  $\varphi$  (lemme 2) il suffit de considérer les immersions  $\varphi$  d'auto-intersections transverses. En effet, elles forment un sous-ensemble dense des fonctions continues. Pour de telles déformations, il existe un petit réel positif  $\varepsilon$  tel que pour tout  $s \in S^1$ , la restriction de  $\varphi$  à  $]s - \varepsilon, s + \varepsilon[$  est injective. On note  $B_0$  le voisinage compact de la diagonale de  $M \times M$  défini par

$$B_0 = \{(x_1, x_2) \in S^1 \times S^1 : |x_1 - x_2| \leq \varepsilon/2\}.$$

L'ensemble  $B_0 \setminus \Delta(S^1)$  possède deux composantes connexes notées

$$B_0^+ = \{(x_1, x_2) \in S^1 \times S^1 : \varepsilon/2 \leq x_1 - x_2 \leq 0\}$$

et

$$B_0^- = \{(x_1, x_2) \in S^1 \times S^1 : \varepsilon/2 \leq x_2 - x_1 \leq 0\}.$$

On note  $\Gamma_0^-$  la composante connexe de la frontière de  $B_0^-$  non égale à  $\Delta(S^1)$ , c'est à dire

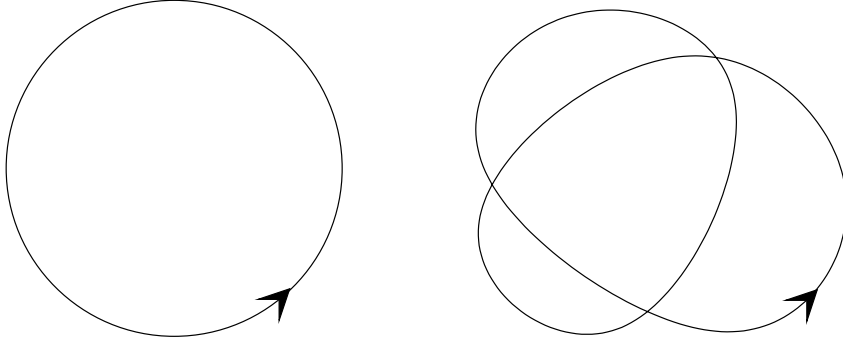
$$\Gamma_0^- = \{(x_1, x_2) \in S^1 \times S^1 : \varepsilon/2 = x_2 - x_1\}.$$

Les ensembles  $B_0^\pm$  sont représentés sur la figure 5. On appelle le nombre de tours effectués par  $\varphi$  l'entier

$$\sharp\varphi = (2\pi)^{-1} \int_{\Gamma_0^-} (\nabla r_\varphi(\Phi(r_\varphi)) \wedge n) ds.$$

*Remarque 2.* L'entier  $\sharp\varphi$  n'est autre que le nombre de tours effectués par la tangente à  $\varphi$  et ne dépend pas de  $\varepsilon$ .

La figure 6 représentent des immersions de  $S^1$  dont le nombre de tours effectués est égale respectivement à un et deux.



**Fig. 6.** Immersions du cercle effectuant un ou deux tours

**Proposition 7.** Soit  $\varphi$  une déformation régulière de  $S^1$  ne possédant que des auto-intersections transverses et  $U$  un ouvert de  $S^1 \times S^1$  tel que

$$\inf_{x \in U} |r_\varphi(x)| > 0.$$

Soit  $\gamma$  un élément de  $C_1(M \times M)$  dont les intersections avec la diagonale  $\Delta(S^1)$  sont transverses, alors  $\gamma$  appartient à  $\Gamma_U(\varphi)$  si et seulement si  $\partial\gamma \subset \mathbb{C}U$ , si pour toute composante connexe  $C$  du complémentaire de  $U$  dont l'intersection avec  $\Delta(S^1)$  est vide, on a

$$\sum_{(x_1, x_2) \in r_\varphi^{-1}(0) \cap C} s(x_1, x_2) = \text{Card}(\gamma(1) \cap C) - \text{Card}(\gamma(0) \cap C)$$

où  $s(x_1, x_2) = \text{signe}(\det(\dot{\varphi}(x_1), \dot{\varphi}(x_2)))$  et si, dans le cas où la composante  $C_0$  de  $\mathbb{C}U \setminus \Delta(S^1)$  contenant  $B_0^-$  ne contient pas  $B_0^+$ , on a

$$\begin{aligned} \#\varphi - \#j_M + \sum_{(x_1, x_2) \in r_\varphi^{-1}(0) \cap C_0} s(x_1, x_2) = \\ \text{Card}(\gamma(1) \cap C_0) - \text{Card}(\gamma(0) \cap C_0) + \sum_{\gamma(t) \in \Delta(S^1)} \text{signe} \left( \det \left( \dot{\gamma}(t), \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right). \end{aligned}$$

*Remarque 3.* Le fait de supposer que les intersections de  $\gamma$  avec  $\Delta(S^1)$  sont transverses ne constitue pas une restriction importante. En effet, tout élément de  $\Gamma_U(\varphi)$  peut être approché pour la topologie  $C^0$  par une application  $\gamma$  régulières d'intersections transverses avec la diagonale  $\Delta(S^1)$ . Ainsi, la proposition 7 peut s'appliquer à tout élément de  $C_1(S^1 \times S^1)$  quitte à le perturber légèrement.

**Preuve.** Comme précédemment, on associe à chaque élément de  $(x_1, x_2)$  de  $r_\varphi^{-1}(0) \setminus \Delta(S^1)$  une petite boule  $B(x_1, x_2)$  centrée en  $(x_1, x_2)$  contenue

dans le complémentaire de  $U$ . On pose

$$V = S^1 \times S^1 \setminus \left( B_0 \cup \bigcup_{(x_1, x_2) \in r_\varphi^{-1}(0) \setminus \Delta(S^1)} B(x_1, x_2) \right).$$

Soit  $\omega$  un champ de vecteurs de  $S^1 \times S^1$  de support inclus dans  $U$  et de rotationnel nul. Le fait que  $\omega$  soit nul sur  $\Delta(S^1)$  et de rotationnel nul implique qu'il existe une fonction  $\alpha$  de  $S^1 \times S^1 \setminus \Delta(S^1)$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $\omega = \nabla \alpha$ . De plus, on peut choisir  $\alpha$  de telle sorte que la restriction de  $\alpha$  à  $B_0^+$  soit nulle. On a

$$\begin{aligned} \int_{S^1 \times S^1} (\omega \wedge \Phi_\varphi) dx &= \int_{\partial V} \alpha(\Phi_\varphi \wedge n) ds \\ &= \alpha(B_0^-) \int_{\Gamma_0^-} (\Phi_\varphi \wedge n) ds + \sum_{(x_1, x_2) \in r_\varphi^{-1}(0) \setminus \Delta(S^1)} \alpha(x_1, x_2) \int_{\partial B(x_1, x_2)} (\Phi_\varphi \wedge n) ds \\ &= \alpha(B_0^-) (\sharp\varphi - \sharp j_M) + \sum_{(x_1, x_2) \in r_\varphi^{-1}(0) \setminus \Delta(S^1)} \alpha(x_1, x_2) s(x_1, x_2). \end{aligned}$$

De plus, si  $\gamma$  est un élément de  $C_1(S^1 \times S^1)$  tel que  $\partial\gamma \in \mathbb{C}U$  et dont l'image est incluse dans  $S^1 \times S^1 \setminus \Delta(S^1)$ , on a

$$\int_\gamma (\omega \wedge n) ds = \sum_{(x_1, x_2) \in \gamma(1)} \alpha(x_1, x_2) - \sum_{(x_1, x_2) \in \gamma(0)} \alpha(x_1, x_2).$$

On en déduit qu'un tel élément de  $C_1(S^1 \times S^1)$  appartient à  $\Gamma_U(\varphi)$  si et seulement si pour toute composante  $C$  du complémentaire de  $U$  ne contenant pas  $\Delta(S^1)$ , on a

$$\sum_{(x_1, x_2) \in r_\varphi^{-1}(0) \cap C} s(x_1, x_2) = \text{Card}(\gamma(1) \cap C) - \text{Card}(\gamma(0) \cap C)$$

et si la composante connexe  $C_0$  de  $\mathbb{C}U \setminus \Delta(S^1)$  contenant  $B_0^-$  ne contient pas  $B_0^+$ , on a

$$\sharp\varphi - \sharp j_M + \sum_{(x_1, x_2) \in r_\varphi^{-1}(0) \cap C_0} s(x_1, x_2) = \text{Card}(\gamma(1) \cap C_0) - \text{Card}(\gamma(0) \cap C_0).$$

Reste à considérer le cas d'un élément  $\gamma$  de  $C_1(S^1 \times S^1)$  tel que  $\partial\gamma \in \mathbb{C}U$  mais dont l'image intersecte la diagonale  $\Delta(S^1)$  de  $S^1 \times S^1$ . Afin d'évaluer  $\int_\gamma (\omega \wedge n) ds$ , on peut se ramener au cas précédent. Tout d'abord, quitte à perturber légèrement  $\gamma$ , on peut supposer que l'intersection de  $\gamma$  avec  $\Delta(S^1)$  est transverse. Enfin, chaque courbe  $\gamma_i$  intersectant la diagonale  $\Delta(S^1)$  peut être décomposée en plusieurs courbes  $\tilde{\gamma}_j$  de  $[0, 1]$  à valeurs dans  $S^1 \times S^1$  telles que  $\tilde{\gamma}_j(\]0, 1])$  soit inclus dans  $S^1 \times S^1 \setminus \Delta(S^1)$ . En perturbant légèrement chacune de ces courbes (en grignotant leurs extrémités), on obtient une

famille  $\tilde{\gamma}$  de  $C_1(S^1 \times S^1)$ , tel que  $\partial\tilde{\gamma} \in \mathbb{C}U$  dont l'image est incluse dans  $S^1 \times S^1 \setminus \Delta(S^1)$ . De plus, on a

$$\int_{\gamma} (\omega \wedge n) ds = \int_{\tilde{\gamma}} (\omega \wedge n) ds.$$

Ainsi,  $\gamma$  appartient à  $\Gamma_U(\varphi)$  si et seulement si  $\tilde{\gamma}$  appartient à  $\Gamma_U(\varphi)$ . Enfin, pour toute composante  $C$  du complémentaire de  $U$  ne contenant pas  $\Delta(S^1)$ , on a

$$\text{Card}(\tilde{\gamma}(1) \cap C) - \text{Card}(\tilde{\gamma}(0) \cap C) = \text{Card}(\gamma(1) \cap C) - \text{Card}(\gamma(0) \cap C),$$

et si  $C_0$  est la composante connexe de  $\mathbb{C}U \setminus \Delta(S^1)$  contenant  $B_0^-$ , on a

$$\begin{aligned} & \text{Card}(\tilde{\gamma}(1) \cap C_0) - \text{Card}(\tilde{\gamma}(0) \cap C_0), = \\ & \text{Card}(\gamma(1) \cap C_0) - \text{Card}(\gamma(0) \cap C_0) + \sum_{\gamma(t) \in \Delta(S^1)} \text{signe} \left( \det \left( \dot{\gamma}(t), \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right). \end{aligned}$$

On en déduit qu'un élément  $\gamma$  de  $C_1(S^1 \times S^1)$  tel que  $\partial\gamma \in \mathbb{C}U$  appartient à  $\Gamma_U(\varphi)$  si et seulement si pour toute composante  $C$  du complémentaire de  $U$  ne contenant pas  $\Delta(S^1)$ , on a

$$\sum_{(x_1, x_2) \in r_{\varphi}^{-1}(0) \cap C} s(x_1, x_2) = \text{Card}(\gamma(1) \cap C) - \text{Card}(\gamma(0) \cap C)$$

et si la composante connexe  $C_0$  de  $\mathbb{C}U \setminus \Delta(S^1)$  contenant  $B_0^-$  ne contient pas  $B_0^+$ , on a

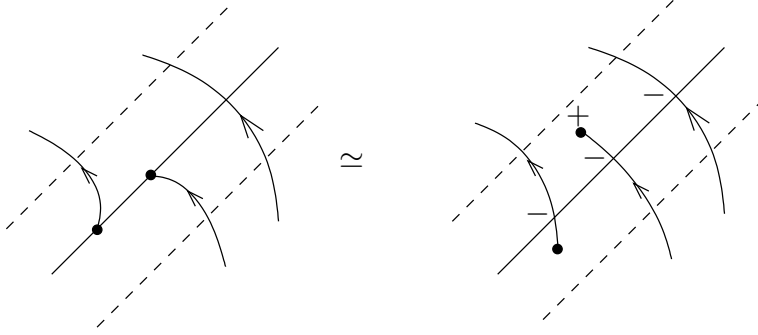
$$\begin{aligned} & \#\varphi - \#j_M + \sum_{(x_1, x_2) \in r_{\varphi}^{-1}(0) \cap C_0} s(x_1, x_2) = \\ & \text{Card}(\gamma(1) \cap C_0) - \text{Card}(\gamma(0) \cap C_0) + \sum_{\gamma(t) \in \Delta(S^1)} \text{signe} \left( \det \left( \dot{\gamma}(t), \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right). \end{aligned}$$

Comme dans le cas de la section précédente, si  $\varphi$  ne possède que des auto-intersections transverses, on en déduit l'expression de  $J(\varphi)$  suivante

$$J(\varphi) = \inf_{\gamma \in \Gamma(\varphi)} \mathcal{L}_{\varphi}(\gamma),$$

où

$$\Gamma(\varphi) = \left\{ \gamma \in C_1(S^1 \times S^1) : \partial\gamma \cap \text{int}(S^1 \times S^1 \setminus \Delta(S^1)) = r_{\varphi}^{-1}(0) \setminus \Delta(S^1) \right. \\ \left. \text{et } \#\varphi - \#j = N(\gamma) \right\}, \quad (9)$$



**Fig. 7.** Calcul de  $N(\gamma)$

et

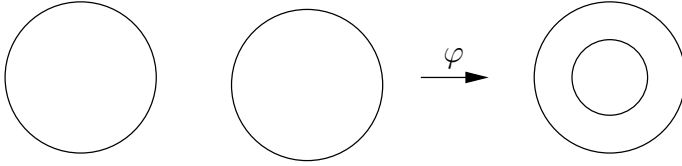
$$N(\gamma) = \text{Card}(\gamma(1) \cap B_0^-) - \text{Card}(\gamma(0) \cap B_0^-) + \sum_{\gamma(t) \in \Delta(S^1)} \text{signe} \left( \det \left( \dot{\gamma}(t), \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right).$$

*Remarque 4.* L'expression de  $N(\gamma)$  n'est valable que si l'intersection de  $\gamma$  avec  $\Delta(S^1)$  est transverse. Cependant, elle est stable sous de petites perturbations  $\mathcal{C}^0$  de  $\gamma$  et l'application  $N(\cdot)$  peut être prolongée de manière unique à n'importe quel élément  $\gamma$  de  $C_1(S^1 \times S^1)$  tel que  $\partial\gamma \subset r_\varphi^{-1}(0)$ . Le calcul de  $N(\gamma)$  est illustré par la figure 7 où on a représenté un élément  $\gamma$  d'une part et une perturbation de ce dernier d'intersection transverse avec  $\Delta(S^1)$  d'autre part. Enfin, on a indiqué le signe de chacune des contributions à  $N(\gamma)$ . Sur l'exemple représenté,  $N(\gamma) = -2$ . Seul une partie du voisinage de  $\Delta(S^1)$  est représenté.

#### 3.3.4. Les autres cas...

Si l'introduction d'applications de  $S^1$  à valeurs dans  $M \times M$  dans la définition de  $C_1(M \times M)$  s'est avérée inutile dans les cas étudiés jusque là, elle s'avère nécessaire pour d'autres situations plus complexes, comme celle d'un solide  $M$  constitué de deux cercles. Afin d'être plus précis, il faudrait calculer  $\Gamma_U(\varphi)$  dans le cas général. Cependant, les résultats deviennent assez techniques à énoncer et n'apportent pas vraiment d'éclairage supplémentaires sur notre méthode de pénalisation. Nous préférons simplement illustrer par un exemple qu'on ne peut se retrindre aux familles d'applications de  $[0, 1]$  dans  $M \times M$  lors de la définition de  $C_1(M \times M)$  et qu'il est nécessaire de considérer également les applications de  $S^1$  dans  $M \times M$  afin d'espérer une pénalisation correcte.

Soit  $M$  le solide constitué de deux cercles  $M_1 = S^1$  et  $M_2 = S^1 + (0, 2)$ . Soit  $\varphi$  la déformation de  $M$  dont la restriction à  $M_1$  est une homothétie



**Fig. 8.** Une déformation non admissible

de coefficient  $1/2$  et dont la restriction à  $M_2$  est une translation de vecteur  $-(0, 2)$  (voir la figure 8). Notons que  $U = M_1 \times M_2$  est un ouvert vérifiant la condition (2). De plus, toute famille de courbes  $\gamma$  de  $[0, 1]$  dans  $M_1 \times M_2$  tel que  $\partial\gamma \subset \partial U$  est vide. Si on ne retenait que ce type de familles dans la définition de  $C_1(M \times M)$ , on aurait  $J(\varphi) = +\infty$ , ce qui n'est pas satisfaisant. Par contre, on peut vérifier que pour tout élément  $a$  de  $M_2$ , la courbe fermée  $\gamma = (-M_1) \times a$  appartient à  $\Gamma_U(\varphi)$  d'où on déduit que  $J(\varphi)$  est fini.

### 3.4. Deux familles de pénalisation

La fonction de pénalisation  $J$  que nous avons introduit présente quelques inconvénients. En particulier, même si elle est continue sur l'ensemble des déformations d'auto-intersection transverses, elle n'est pas dérivable, ce qui d'un point de vu numérique est très handicapant. Ainsi, peut il s'avérer utile d'introduire d'autres fonctions de pénalisation. Idéalement, une fonction de pénalisation  $T$  devrait vérifier les propriétés suivantes

1.  $T(\varphi) = 0$  si et seulement si  $\varphi \in \mathcal{A}(j_M)$ ,
2.  $T$  semicontinue inférieurement pour la topologie  $\mathcal{C}^0$ ,
3.  $T$  dérivable,
4.  $T(\varphi)$  indépendant par reparamétrisation de  $\varphi$ .

La motivation initiale de notre travail porte sur la résolution de problèmes de minimisation posés sur l'ensemble des déformations admissibles  $\mathcal{A}(j_M)$ . La méthode de pénalisation consiste à résoudre une suite de problèmes de minimisation sans contrainte en ajoutant simplement à la fonction coût une fonction pénalisant les déformations non admissibles, pondérée par un paramètre positif de plus en plus élevé (voir section 4). La première propriété nous assure que les minimiseurs de la suite des problèmes pénalisés converge vers une solution du problème initial. La deuxième propriété permet d'établir que les problèmes de pénalisation possèdent (au moins) une solution. La troisième propriété nous permet d'utiliser les algorithmes de descente de gradient afin de résoudre les problèmes de pénalisation. La dernière propriété est plus subtile. Si on suppose que la dérivée de  $T$  appartient à  $L^2(M; \mathbb{R}^2)$ , cette propriété implique que

$$T'(\varphi) \cdot \psi = \int_M f(s)n(s) \cdot \psi(s)ds, \quad (10)$$

où  $f$  est un élément de  $L^2(M)$  et  $n(s)$  est la normale unitaire à  $\dot{\varphi}(s)$ . En d'autres termes, la fonction de pénalisation n'ajoute pas de termes de frictions parasites. Une telle propriété s'avère dans la pratique très importante. En effet, la résolution numérique des problèmes de minimisation par un algorithme de gradient conduit uniquement à l'obtention de minimums locaux. Il n'est pas du tout évident que ces minimums locaux convergent vers des minimums locaux du problème sous contrainte lorsqu'on augmente le poids de la pénalisation. Au mieux, on peut espérer montrer que les minimiseurs locaux convergent vers des points critiques du problème sous contraintes en passant à la limite sur les conditions d'optimalité du premier ordre (i.e. les équations d'Euler). Ceci est assuré, du moins formellement, par la forme (10) de la dérivée du gradient de la pénalisation.

Dans les sections qui suivent, nous allons introduire deux familles de pénalisation. La première, invariante par reparamétrisation, ne vérifie la première propriété que pour certaines configurations de  $M$ . Si  $M$  n'est ni une union disjointe d'intervalles fermés, ni le cercle  $S^1$ , il existe des déformations non admissibles annulant la fonction de pénalisation. Ainsi, il est a priori possible que les minimiseurs de la suite des problèmes pénalisés ne convergent pas vers une déformation admissible. Cependant, dans la pratique, cela ne se produit pas, pourvu qu'on prenne quelques précautions. Dans tous nos tests numériques, nous avons utilisé ce type de fonctions de pénalisation sans être confronté à ce type de problème. La deuxième famille de pénalisations, qualifiées de non dégénérées, a été précisément conçue pour ne pas présenter ce défaut. Malheureusement, les éléments de cette famille ne vérifient quand à eux pas la propriété d'invariance par reparamétrisation. Ainsi, les minimiseurs locaux des problèmes pénalisés ne convergent en général pas vers des points critiques du problème sous contrainte. Les deux familles de pénalisation sont construites sur le même principe que la fonction  $J$  obtenue heuristiquement. Leur définition ne diffère que par la définition de la métrique utilisée sur  $M \times M$  pour calculer la longueur des éléments  $\gamma$  de l'ensemble  $\Gamma_U(\varphi)$ .

Dans chacune des sections 3.4.1 et 3.4.2, on définit une famille de fonctions de pénalisation respectivement invariante par reparamétrisation et non dégénérée. Enfin, on étudie les diverses propriétés des fonctionnelles introduites:

Équivalence entre annulation de la fonction de pénalisation et admissibilité (section 3.4.3), invariance par reparamétrisation (section 3.4.4), semicontinuité inférieure (section 3.4.5), différentiabilité (section 3.4.6). Les preuves complètes des propositions énoncées ne sont données que pour la première famille de pénalisation. Les propositions correspondantes, portant sur la deuxième famille de pénalisation, peuvent s'établir de manière similaire, quitte à supprimer certains passages techniques devenus superflus.

### 3.4.1. Pénalisation invariante par reparamétrisation

Dans cette section, nous introduisons une famille de fonctions de pénalisation invariante par reparamétrisation de  $M$ . Chacune de ces fonctions



est caractérisée par une application  $G$  régulière de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  dans l'ensemble des matrices  $4 \times 4$  symétriques positives. On suppose de plus qu'il existe une fonction  $g$  de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$  telle que  $g(s) = 0$  si et seulement si  $s = 0$  et

$$G(y_1, y_2) \geq g(|y_1 - y_2|^2) \text{Id}, \text{ pour tout } (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2. \quad (11)$$

Le champ de matrices  $G$  définit une métrique  $d^G$  sur l'espace  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  où

$$d^G(X, Y) = \inf_{\gamma} \int_0^1 |\dot{\gamma}^T (G \circ \gamma) \dot{\gamma}|^{1/2} ds,$$

et  $\gamma$  parcourt l'ensemble des courbes régulières telle que  $\gamma(0) = X$  et  $\gamma(1) = Y$ . Notons qu'on autorise  $G$  à être nul sur  $\Delta(\mathbb{R}^2)$ . Dans ce cas, la métrique  $d^G$  est dégénérée sur  $\Delta(\mathbb{R}^2)$ . En effet, pour tout  $y_1$  et  $y_2$  de  $\mathbb{R}^2$ , on a alors  $d^G((y_1, y_1), (y_2, y_2)) = 0$ . Soit  $\gamma$  une application continue de  $[0, 1]$  (ou  $S^1$ ) dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ , la longueur de  $\gamma$  pour la métrique  $G$  est définie par

$$\mathcal{L}^G(\gamma) = \sup \sum_i d^G(\gamma(t_{i+1}), \gamma(t_i)),$$

où le supremum est calculé sur l'ensemble des subdivisions  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  de  $[0, 1]$ . Si  $\gamma$  est une application régulière, on a

$$\mathcal{L}^G(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}^T (G \circ \gamma) \dot{\gamma}|^{1/2} ds.$$

Pour toute déformation  $\varphi$  de  $M$ , on note  $\varphi \times \varphi$  l'application

$$\begin{aligned} \varphi \times \varphi : M \times M &\rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (\varphi(x), \varphi(y)) \end{aligned}$$

Pour toute courbe  $\gamma$  de  $\text{int}(M) \times \text{int}(M)$ , on note  $\mathcal{L}_\varphi^G(\gamma)$  la longueur de la courbe  $(\varphi \times \varphi) \circ \gamma$  pour la métrique  $G$ .

$$\mathcal{L}_\varphi^G(\gamma) = \mathcal{L}^G((\varphi \times \varphi) \circ \gamma).$$

On obtient une nouvelle fonction de pénalisation en remplaçant simplement  $\mathcal{L}_\varphi$  par  $\mathcal{L}_\varphi^G$  dans les définitions de  $J_U$  et  $J$ .

Pour tout ouvert  $U$  de  $M \times M$  vérifiant la condition (2) on pose

$$J_U^G(\varphi) = \inf_{\gamma \in \Gamma_U(\varphi)} \mathcal{L}_\varphi^G(\gamma),$$

et

$$J^G(\varphi) = \sup_U J_U^G(\varphi),$$

où  $U$  parcourt l'ensemble des ouverts de  $\text{int}(M) \times \text{int}(M)$  vérifiant (2).

*Exemple 1.* La métrique  $G$  peut par exemple être définie par

$$G(y_1, y_2) = |y_1 - y_2|^4 \text{Id},$$

pour tout  $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ .

### 3.4.2. Pénalisation non dégénérées

Dans la définition de  $J^G$ , la métrique utilisée pour définir la longueur des éléments de  $\Gamma_U(\varphi)$  est dégénérée. Dans certains cas, il existe  $\gamma \in \Gamma_U(\varphi)$  tel que  $\mathcal{H}^1(\gamma \cap U) \neq 0$  et  $\mathcal{L}_\varphi^G(\gamma) = 0$ . Comme nous allons le voir par la suite (section 3.4.3), il s'en suit que, pour certaines configurations  $M$ , il existe des déformations  $\varphi$  de  $M$  non admissibles telles que  $J^G(\varphi) = 0$ . Afin de circonvvenir à ce problème, on se propose d'introduire une nouvelle famille de pénalisation, basée sur l'utilisation d'une métrique non dégénérée. En contrepartie, les pénalisations obtenues ne sont pas invariantes par reparamétrisation. Indiquons cependant, qu'on doit pouvoir combiner les deux types de pénalisation introduites afin de tirer partie des avantages de chacune d'entre elles.

Soit  $g$  une fonction continue de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$  telle que

$$g(s) = 0 \iff s = 0.$$

Pour toute courbe  $\gamma$  de  $M \times M$ , on pose

$$\mathcal{L}_\varphi^g(\gamma) = \int_\gamma g(|r_\varphi(s)|^2) ds,$$

où  $ds$  est la mesure de Hausdorff de dimension un de  $\gamma$ . Notre nouvelle famille de fonctions de pénalisation est obtenue en remplaçant  $\mathcal{L}_\varphi$  par  $\mathcal{L}_\varphi^g$  dans la définition de  $J$ . Plus précisément, si  $U$  est un ouvert de  $\text{int}(M) \times \text{int}(M)$ , vérifiant la propriété (2), on pose

$$J_U^g(\varphi) = \inf_{\gamma \in \Gamma_U(\varphi)} \mathcal{L}_\varphi^g(\gamma).$$

Enfin, on définit la pénalisation

$$J^g(\varphi) = \sup_U J_U^g(\varphi),$$

où  $U$  parcourt l'ensemble des ouverts de  $\text{int}(M) \times \text{int}(M)$  vérifiant (2).

### 3.4.3. Pénalisation et déformations admissibles

**Proposition 8.** *Supposons que  $M$  est soit le cercle  $S^1$ , soit une union d'intervalles fermés disjoints. Alors,  $J^G(\varphi) = 0$  si et seulement si  $\varphi$  appartient à l'ensemble des déformations admissibles  $\mathcal{A}(j_M)$ .*

**Preuve.** Tout d'abord, si  $\varphi$  appartient à l'ensemble des déformations admissibles, pour tout ouvert  $U$  vérifiant la condition (2), la famille vide appartient à  $\Gamma_U(\varphi)$ . Ainsi,  $J_U^G(\varphi) = 0$  et  $J^G(\varphi) = 0$ . Réciproquement, soit  $\varphi$  une déformation telle que  $J^G(\varphi) = 0$ . Pour tout ouvert  $U$  vérifiant la condition (2), il existe  $\delta > 0$  tel que

$$U \subset U_\delta = (\varphi \times \varphi)^{-1}(\mathcal{C}B_\delta) \cap \text{int}(M) \times \text{int}(M),$$

où

$$B_\delta = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : |y_1 - y_2| \leq \delta\}.$$

Soit  $\delta'$  un réel positif strictement inférieur à  $\delta$ . On définit  $U_{\delta'}$  et  $B_{\delta'}$  comme  $U_\delta$  et  $B_\delta$ . De plus, on pose

$$m = \inf_{X \in B_{\delta'}, Y \in \mathcal{C}B_\delta} d^G(X, Y).$$

D'après l'inégalité (11), la distance  $m$  (pour la métrique  $G$ ) entre  $B_{\delta'}$  et  $\mathcal{C}B_\delta$  est strictement positive. Comme  $J_{U_{\delta'}}^G(\varphi) = 0$ , il existe  $\gamma = (\gamma_j) \in \Gamma_{U_{\delta'}}(\varphi)$  où  $\gamma_j$  sont des fonctions de  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  (d'après la caractérisation de  $\Gamma_U(\varphi)$  des sections 3.3.3 et 3.3.2) tel que

$$\mathcal{L}^G(\gamma) < m.$$

En particulier, pour tout  $j \in J$ , on a  $\mathcal{L}^g(\gamma_j) < m$ . De plus,  $\gamma_j(0)$  appartient au complémentaire de  $U_{\delta'}$  et pour tout  $t \in [0, 1]$  on a

$$\begin{aligned} d^G(B_{\delta'}, (\varphi \times \varphi) \circ \gamma_j(t)) &\leq d^G((\varphi \times \varphi) \circ \gamma_j(0), (\varphi \times \varphi) \circ \gamma_j(t)) \\ &\leq \mathcal{L}^G(\gamma_j) \\ &\leq m. \end{aligned}$$

D'après la définition de  $m$ , on en déduit que pour tout  $t$ ,  $(\varphi \times \varphi) \circ \gamma_j(t)$  appartient à  $B_\delta$ . Ainsi,  $\gamma_j(t)$  n'appartient pas à  $U_\delta$  et  $\gamma$  est inclus dans le complémentaire de  $U$ . Il s'en suit que la famille vide appartient à  $\Gamma_\varphi(U)$  et que, pour tout champ irrotationnel  $\omega$  de  $M \times M$  de support inclus dans  $U$ , on a

$$\int_U \omega \wedge \Phi_\varphi dx = 0. \quad (12)$$

D'après le lemme 3 suivant, on en déduit que  $\varphi$  appartient à l'ensemble des déformations admissibles.

**Lemme 3.** *Soit  $\varphi$  une déformation de  $M$  et  $U$  un ouvert de  $\text{int}(M) \times \text{int}(M)$  tel que  $\inf_{x \in U} |r_\varphi(x)| > 0$ . Si pour tout champ de vecteurs irrotationnel  $\omega$  de support inclus dans  $U$  on a*

$$\int_U \omega \wedge \Phi_\varphi dx = 0,$$

*alors il existe une application  $u$  de  $U$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $\Phi_\varphi = \nabla u$ .*

**Preuve.** Soit  $\gamma$  un lacet de  $U$ , c'est à dire une application régulière de  $S^1$  dans  $U$ . Soit  $\rho$  une application régulière, à support compact de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^+$  telle que  $\int_{\mathbb{R}^2} \rho dx = 1$ . On introduit la suite régularisante  $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-2} \rho(x/\varepsilon)$ . La suite  $\rho_\varepsilon$  converge vers un dirac en zéro lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro. Pour  $\varepsilon$  assez petit, le support de  $\rho_\varepsilon(\cdot - s)$  est inclus dans  $U$  pour tout  $s \in \gamma$ . On pose alors

$$\alpha(x) = \int_\gamma \rho_\varepsilon(x - s) n(s) ds.$$

Le support de  $\alpha$  est inclus dans  $U$ . De plus,  $\alpha$  est un champ de rotationnel nul. En effet

$$\nabla \wedge \alpha(x) = \int_{\gamma} \nabla \rho(x-s) \wedge n(s) ds = 0.$$

D'après (12), on en déduit que

$$\int_U \alpha \wedge \Phi_{\varphi} dx = 0.$$

Or

$$\int_U \alpha \wedge \Phi_{\varphi} dx = \int_{\gamma} n(s) \wedge (\rho_{\varepsilon} \star \Phi_{\varphi}) ds,$$

où  $\star$  désigne le produit de convolution. Ainsi, pour tout  $\varepsilon$  assez petit, on a

$$\int_{\gamma} (\rho_{\varepsilon} \star \Phi_{\varphi}) \cdot \tau ds = 0.$$

Par passage à la limite en  $\varepsilon$ , on obtient

$$\int_{\gamma} \Phi_{\varphi} \cdot \tau ds = 0. \quad (13)$$

L'intégrale de  $\Phi_{\varphi}$  sur tout lacet de  $U$  étant nulle, il est aisée de construire une application  $u$  de  $U$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $\nabla u = \Phi_{\varphi}$ . A cet effet, il suffit de choisir un élément  $x_0$  dans chaque composante connexe de  $U$  et de poser

$$u(x) = \int_{\tilde{\gamma}} \Phi_{\varphi} \cdot \tau ds,$$

pour tout  $x$  appartenant à la même composante connexe que  $x_0$ , où  $\tilde{\gamma}$  est une courbe de  $U$  joignant  $x_0$  à  $x$ . L'application  $u$  est correctement définie, l'équation (13) nous assurant l'indépendance de  $u(x)$  par rapport au choix  $\tilde{\gamma}$  effectué.

Dans le cas où  $M = S^1 \cup [2, 3]$ , il existe des déformations non admissibles annulant la pénalisation  $J^G$ . C'est notamment le cas de l'application  $\varphi$  dont la restriction à  $S^1$  est l'identité et dont la restriction à  $[2, 3]$  est l'application nulle. La famille de pénalisation  $J^g$  ne présente pas cet inconvénient.

**Proposition 9.** *Pour tout  $M$  union de cercles et d'intervalles fermés, pour toute déformation  $\varphi$  de  $M$ ,  $J^g(\varphi) = 0$  si et seulement si  $\varphi$  appartient à l'ensemble des déformations admissibles  $\mathcal{A}(j_M)$ .*

**Preuve.** Tout d'abord, si  $\varphi$  est une déformation admissible, la famille vide appartient à  $\Gamma_U(\varphi)$  pour tout ouvert  $U$  de  $M \times M$  vérifiant la condition et  $J^g(\varphi) = 0$ . Réciproquement, si  $J^g(\varphi) = 0$ , pour tout ouvert  $U$  vérifiant la condition (2) et pour tout réel  $m > 0$ , il existe  $\gamma \in \Gamma_U(\varphi)$  tel que

$$\mathcal{L}^g(\gamma) < m.$$

Si  $\omega$  est un champ de vecteur de support inclus dans  $U$  et de rotationnel nul, on a

$$\int_U \omega \wedge \Phi_\varphi dx = \int_\gamma (\omega \wedge n) ds.$$

comme la métrique  $\mathcal{L}^g$  est non dégénérée sur  $U$ , il s'en suit qu'il existe une constante  $C$  ne dépendant que de  $\varphi$  et  $U$  tel que

$$\left| \int_U \omega \wedge \Phi_\varphi dx \right| \leq C \mathcal{L}^g(\gamma) \sup_{x \in U} |\omega(x)| \leq Cm \sup_{x \in U} |\omega(x)|.$$

Cette inégalité étant valable pour tout  $m$  positif, il s'en suit que

$$\int_U \omega \wedge \Phi_\varphi dx = 0.$$

En appliquant le lemme 3, on en déduit  $\varphi$  appartient à l'ensemble des déformations admissibles.

#### 3.4.4. Invariance par reparamétrisation

Soit  $\varphi$  une déformation de  $M$  de classe  $W^{1,1}$ . On peut reparamétriser  $M$  de tel sorte que, exprimé dans la nouvelle configuration, la norme de la dérivée de la déformation soit constante. On note  $\tilde{\varphi}$  cette déformation. Plus précisément, dans le cas  $M = [0, 1]$  on introduit l'application  $p$  de  $M$  dans  $M$  définie par

$$p(t) = \int_0^t |\dot{\varphi}(s)| ds / \int_0^1 |\dot{\varphi}(s)| ds. \quad (14)$$

Dans ce cas,  $\tilde{\varphi}$  est la seule application de  $M$  dans  $\mathbb{R}^2$  telle que

$$\tilde{\varphi} \circ p = \varphi. \quad (15)$$

On vérifie sans mal que  $\tilde{\varphi}$  est correctement définie et de manière univoque par cette équation (si  $p(s) = p(t)$ , on a  $\varphi(s) = \varphi(t)$ ). De plus,  $\tilde{\varphi}$  est Lipschitzienne et

$$|\tilde{\varphi}'| = \left( \int_0^1 |\dot{\varphi}(s)| ds \right)^{-1},$$

presque partout.

**Proposition 10.** *Soit  $\varphi \in W^{1,1}(M; \mathbb{R}^2)$  une déformation de  $M$ . La valeur de la pénalisation  $J^G(\varphi)$  est invariante par reparamétrisation de  $\varphi$ . En d'autres termes,*

$$J^G(\varphi) = J^G(\tilde{\varphi}),$$

où  $\tilde{\varphi}$  est défini par (15).

La preuve de cette proposition repose sur une série de lemmes.

**Lemme 4.** Soit  $\varphi \in W^{1,1}(M; \mathbb{R}^2)$  une déformation de  $M$ , et  $p$  la reparamétrisation définie par (14). Pour tout  $\delta > 0$ , on a

$$(p \times p)(\Gamma_U(\varphi)) \subset \Gamma_V(\tilde{\varphi}),$$

où  $U = U_\delta(\varphi)$  et  $V = U_\delta(\tilde{\varphi})$ .

**Preuve.** Soit  $\gamma$  un élément de  $\Gamma_U(\varphi)$ . On pose  $\tilde{\gamma} = (p \times p) \circ \gamma$ . On cherche à prouver que  $\tilde{\gamma}$  appartient à  $\Gamma_V(\tilde{\varphi})$ . Tout d'abord, on a évidemment  $\partial\tilde{\gamma} \subset \mathbb{C}V$ . D'autre part, soit  $\tilde{\omega}$  un champ de vecteur irrotationnel de  $M \times M$ , de support inclus dans  $V$ . On pose  $\omega = (\nabla(p \times p))\tilde{\omega} \circ (p \times p)$ . Le rotationnel de  $\tilde{\omega}$  étant nul, on en déduit que le rotationnel de  $\omega$  l'est également. En effectuant un changement de variables, on peut établir que

$$\int_{\tilde{\gamma}} \tilde{\omega} \wedge nds = \int_{\gamma} \omega \wedge nds \quad (16)$$

et que

$$\int_{M \times M} \omega \wedge \nabla r_\varphi(\Phi(r_\varphi))dx = \int_{M \times M} \tilde{\omega} \wedge \nabla r_{\tilde{\varphi}}(\Phi(r_{\tilde{\varphi}}))dx. \quad (17)$$

Le rotationnel de  $\nabla r_j(\Phi(r_j))$  étant nul et  $(p \times p)$  homotope à l'identité, on a

$$\begin{aligned} \int_{M \times M} \tilde{\omega} \wedge \nabla r_j(\Phi(r_j))dx &= \int_{M \times M} (\nabla(p \times p)\tilde{\omega} \circ (p \times p)) \wedge (\nabla r_j \Phi(r_j))dx \\ &= \int_{M \times M} \omega \wedge (\nabla r_j(\Phi(r_j)))dx. \end{aligned} \quad (18)$$

Des définitions de  $\Phi_\varphi$  et  $\Phi_{\tilde{\varphi}}$  et des équations (17) et (18), on déduit que

$$\int_{M \times M} \omega \wedge \Phi_\varphi dx = \int_{M \times M} \tilde{\omega} \wedge \Phi_{\tilde{\varphi}} dx. \quad (19)$$

De plus, comme  $\omega$  est un champ de rotationnel nul et que  $\gamma$  appartient à  $\Gamma_U(\varphi)$ , on a

$$\int_{\gamma} \omega \wedge nds = \int_{M \times M} \omega \wedge \Phi_\varphi dx. \quad (20)$$

Enfin, on déduit de (16), (19) et (20) que

$$\int_{\tilde{\gamma}} \tilde{\omega} \wedge nds = \int_{M \times M} \tilde{\omega} \wedge \Phi_{\tilde{\varphi}} dx.$$

Cette égalité étant vérifiée pour tout champ  $\tilde{\omega}$  de rotationnel nul à support inclus dans  $V$ ,  $\tilde{\gamma}$  appartient à  $\Gamma_V(\tilde{\varphi})$ .

**Lemme 5.** Soit  $\varphi$  une déformation de  $M$  et  $p$  la reparamétrisation définie par (14) Alors pour toute application  $\gamma \in W^{1,1}([0, 1]; M)$ , il existe une suite d'applications continues  $\gamma_n$  telle que  $p \circ \gamma_n$  converge vers  $\gamma$  pour la topologie  $W^{1,1}$  forte.

**Preuve.** Si  $p$  est bijective, il suffit de choisir  $\gamma_n$  constant égale à  $p^{-1} \circ \gamma$ . Cependant, dans le cas général,  $p$  n'est pas bijectif. Afin d'obtenir la suite de fonctions  $\gamma_n$  souhaitée, on construit une suite d'approximations  $p_n$  de  $p$  par des applications bijectives. On pose alors  $\gamma_n = p_n^{-1} \circ \gamma$  et on prouve la convergence de  $p \circ \gamma_n$  vers  $\gamma$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on introduit l'approximation de  $p$  suivante

$$p_n = \frac{np + s}{n + 1}.$$

La fonction  $p_n$  définit un difféomorphisme de  $M$  et on a

$$p'_n = \frac{np' + 1}{n + 1}.$$

Les fonctions affines par morceaux étant dense dans  $W^{1,1}$ , on peut supposer sans perte de généralité que  $\gamma$  est affine par morceaux. Comme annoncé, on pose alors  $\gamma_n = p_n^{-1} \circ \gamma$ . Reste à prouver que  $(p \circ \gamma_n)'$  converge vers  $\gamma'$  en norme  $L^1$ . C'est à dire que

$$\begin{aligned} R_n &= \|(p \circ \gamma_n)' - \gamma'\|_{L^1} \\ &= \int_0^1 (1 + 1/n) \left| \left( \frac{1}{np' + 1} \right) \circ (p_n^{-1} \circ \gamma) \right| |\gamma'| ds \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

On peut décomposer cette intégrale sur chacun des intervalles  $[s_i, s_{i+1}]$  sur lesquels  $\gamma$  est affine. Ainsi, afin de prouver la convergence de l'intégrale précédente vers zéro, on peut supposer que  $\gamma$  est affine. Si  $\gamma' = 0$ , il n'y a rien à prouver. Dans le cas contraire, on effectue le changement de variable  $t = p_n^{-1} \circ \gamma(s)$ , ce qui nous conduit à l'expression

$$R_\varepsilon = \int (1 + 1/n) \left| \frac{1}{np'(t) + 1} \right| |p'_n| dt.$$

D'après l'expression de  $p'_n$ , on en déduit que

$$R_\varepsilon = \int (1 + 1/n) \left| \frac{1}{np'(t) + 1} \right| \left| \frac{np' + 1}{n + 1} \right| dt = \int dt/n,$$

qui converge vers zéro lorsque  $n$  tend vers l'infini.

**Lemme 6.** Soit  $\varphi \in W^{1,1}(M; \mathbb{R}^2)$  une déformation de  $M$ . Pour tout  $\delta > 0$ , et tout  $\tilde{\gamma} \in \Gamma_V(\tilde{\varphi})$  de classe  $W^{1,1}$ , il existe  $\gamma_n \in \Gamma_U(\varphi)$  tel que

$$(p \times p) \circ \gamma_n \rightarrow \tilde{\gamma}$$

pour la topologie  $W^{1,1}$ , où  $U = U_\delta(\varphi)$  et  $V = U_\delta(\tilde{\varphi})$ .

**Preuve.** Tout d'abord, tout élément de  $\Gamma_V(\tilde{\varphi})$  peut être approché par un élément de  $\Gamma_V(\tilde{\varphi})$  affine par morceaux tel que  $\partial\tilde{\gamma}$  soit inclus dans l'intérieur du complémentaire de  $V$ . On reprend la construction de la suite d'approximations  $p_n$  de  $p$ , introduite au lemme 5 et on pose  $\gamma_n = (p_n \times p_n)^{-1}(\tilde{\gamma})$ . D'après le lemme 5,  $(p \times p) \circ \gamma_n$  converge vers  $\tilde{\gamma}$  pour la topologie  $W^{1,1}$ . On en déduit tout d'abord que pour  $n$  assez grand,  $\partial\gamma_n$  est inclus dans le complémentaire de  $U$ . Afin d'établir que  $\gamma_n$  appartient à  $\Gamma_U(\varphi)$ , il reste à prouver que pour tout champ irrotationnel  $\omega$  de support inclus dans  $U$ , on a

$$\int_{\gamma_n} \omega \wedge nds = \int_{M \times M} \omega \wedge \Phi_\varphi ds. \quad (21)$$

Par un simple changement de variable, on a

$$\int_{\gamma_n} \omega \wedge nds = \int_{\tilde{\gamma}} \tilde{\omega}_n \wedge nds, \quad (22)$$

où

$$\nabla(p_n \times p_n)\tilde{\omega}_n \circ (p_n \times p_n) = \omega. \quad (23)$$

Le champ  $\tilde{\omega}_n$  est de rotationnel nul et de support inclus dans  $V$ . Comme  $\tilde{\gamma}$  appartient à  $\Gamma_V(\tilde{\varphi})$ , on a donc

$$\int_{\tilde{\gamma}} \tilde{\omega}_n \wedge nds = \int_{M \times M} \tilde{\omega}_n \wedge \Phi_{\tilde{\varphi}} dx. \quad (24)$$

Soit  $\varphi_n = \varphi \circ p_n^{-1}$ . Comme  $r_{\tilde{\varphi}}$  et  $r_{\tilde{\varphi}_n}$  sont homotopes comme fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}_*^2$  sur  $V$ , on a

$$\int_{M \times M} \tilde{\omega}_n \wedge \Phi_{\tilde{\varphi}} dx = \int_{M \times M} \tilde{\omega}_n \wedge \Phi_{\tilde{\varphi}_n} dx \quad (25)$$

Par changement de variable, on établit de plus que

$$\int_{M \times M} \tilde{\omega}_n \wedge \Phi_{\tilde{\varphi}_n} dx = \int_{M \times M} \omega \wedge \Phi_\varphi dx. \quad (26)$$

Finalement, en rassemblant les équations (22-26), on obtient (21), ce qui achève la preuve.

**Lemme 7.** Soit  $\varphi \in W^{1,1}(M; \mathbb{R}^2)$ . Pour tout ouvert  $U$  de  $\text{int}(M) \times \text{int}(M)$  vérifiant la condition (2), il existe  $\tilde{\gamma} \in \Gamma_V(\tilde{\varphi})$  tel que

$$J_V(\tilde{\varphi}) = \mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^G(\tilde{\gamma}),$$

où  $V = (p \times p)(U)$ .



**Preuve.** Soit  $U$  un ouvert de  $\text{int}(M) \times \text{int}(M)$  tel que la condition (2) soit vérifiée et  $V = (p \times p)(U)$ . On rappelle que

$$J_V(\tilde{\varphi}) = \inf_{\tilde{\gamma} \in \Gamma_V(\tilde{\varphi})} \mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^G(\tilde{\gamma}).$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que l'infimum est fini (sinon, il n'y a rien à démontrer). Soit  $\tilde{\gamma}_n$  une suite minimisante de  $\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^G$  dans  $\Gamma_V(\tilde{\varphi})$ . Pour simplifier, on suppose que  $\tilde{\gamma}_n$  ne comporte qu'un unique élément, par exemple une application de  $[0, 1]$  à valeurs dans  $M \times M$ . Comme on a supposé l'infimum fini, il existe une constante  $C$  telle que

$$\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^G(\tilde{\gamma}_n) < C.$$

De plus, on peut supposer que pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a  $r_{\varphi}(\gamma_n(t)) > \delta$ , où  $\delta$  est une constante strictement positive. D'après la propriété d'ellipticité (11), on a

$$\mathcal{L}(\tilde{\varphi} \times \tilde{\varphi} \circ \tilde{\gamma}_n) < C \left( \inf_{t > \delta/2} g(t) \right)^{-1} \mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^G(\tilde{\gamma}_n),$$

où  $\mathcal{L}((\tilde{\varphi} \times \tilde{\varphi}) \circ \tilde{\gamma}_n)$  désigne la longueur usuelle de la courbe  $(\tilde{\varphi} \times \tilde{\varphi}) \circ \tilde{\gamma}_n$ . Quitte à reparamétriser  $\tilde{\gamma}_n$ , on peut  $(\tilde{\varphi} \times \tilde{\varphi}) \circ \tilde{\gamma}_n$  appartenir à  $W^{1,\infty}$  et que la norme de sa dérivée est constante. Comme  $\tilde{\varphi}$  appartient lui même à  $W^{1,\infty}$  et que la norme de sa dérivée est également constante, il s'en suit que  $\tilde{\gamma}_n$  appartient à  $W^{1,\infty}$  et que la suite  $\tilde{\gamma}_n$  est équicontinue. De plus, comme  $M \times M$  est compact, on déduit du théorème d'Ascoli qu'il existe une sous suite extraite de  $\tilde{\gamma}_n$  (que nous noterons également  $\tilde{\gamma}_n$ ) convergente vers un élément  $\tilde{\gamma} \in \Gamma_V(\tilde{\varphi})$  pour la topologie  $\mathcal{C}^0$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^G(\tilde{\gamma}) &= \mathcal{L}^G((\tilde{\varphi} \times \tilde{\varphi}) \circ \tilde{\gamma}) \\ &\leq \liminf_n \mathcal{L}^G((\tilde{\varphi} \times \tilde{\varphi}) \circ \tilde{\gamma}_n) \\ &= \liminf_n \mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^G(\tilde{\gamma}_n) = J_V^G(\tilde{\varphi}). \end{aligned}$$

Enfin, quitte à reparamétriser  $\tilde{\gamma}$ , l'infimum peut être atteint pour un élément de classe  $W^{1,\infty}$ .

**Preuve (Proposition 10).** Pour tout  $\delta > 0$ , on a

$$\begin{aligned} J_{U_\delta}(\varphi) &= \inf_{\gamma \in \Gamma_{U_\delta}(\varphi)} \mathcal{L}_\varphi^G(\gamma) \\ &= \inf_{\gamma \in \Gamma_{U_\delta}(\varphi)} \mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^G((p \times p) \circ \gamma). \end{aligned}$$

Or  $(p \times p)(\Gamma_{U_\delta}(\varphi)) \subset \Gamma_{V_\delta}(\tilde{\varphi})$ . Ainsi,

$$J_{U_\delta}^G(\varphi) \geq \inf_{\tilde{\gamma} \in \Gamma_{V_\delta}(\tilde{\varphi})} \mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^G(\tilde{\gamma}) = J_{V_\delta}^G(\tilde{\varphi}). \quad (27)$$

Réciproquement, d'après le lemme 7, il existe  $\tilde{\gamma} \in \Gamma_{V_\delta}(\tilde{\varphi}) \cap W^{1,\infty}$  tel que

$$J_{V_\delta}^G(\tilde{\varphi}) = \mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^G(\tilde{\gamma}).$$

D'après le lemme 6, il existe une suite  $\gamma_n$  d'éléments de  $\Gamma_{U_\delta}(\varphi)$  telle que  $(p \times p) \circ \gamma_n$  converge vers  $\tilde{\gamma}$  pour la topologie  $W^{1,1}$ . Ainsi,

$$\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^G(\tilde{\gamma}) = \lim_n \mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^G((p \times p) \circ \gamma_n) = \lim_n \mathcal{L}_{\varphi}^G(\gamma_n)$$

et

$$J_{V_\delta}^G(\tilde{\varphi}) \geq \lim_n \mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^G((p \times p) \circ \gamma_n) - \varepsilon \geq J_{U_\delta}^G(\varphi) - \varepsilon.$$

On déduit de cette inégalité et de (27) que

$$J_{U_\delta}^G(\varphi) = J_{V_\delta}^G(\tilde{\varphi}),$$

d'où découle la conclusion de la proposition.

### 3.4.5. Semi continuité inférieure

**Proposition 11.** *La fonction  $J^G$  est semi continue inférieurement pour la topologie  $\mathcal{C}^0$ .*

**Preuve.** Comme le supremum de fonctions semi continues inférieurement est semi continue inférieurement, il suffit d'établir la semi continuité des fonctions  $J_U^G$ . Soit  $\varphi$  une déformation de  $M$  et  $U$  un ouvert de  $M \times M$  vérifiant la condition (2). Soit  $\varphi_n$  une suite de déformations convergeant vers  $\varphi$  pour la topologie  $\mathcal{C}^0$ . Pour  $n$  assez grand, la condition (2) est également vérifiée par le couple  $(\varphi_n, U)$  et  $J_U^G(\varphi_n)$  est correctement défini. Pour tout  $n$ , il existe  $\gamma_n \in \Gamma_U(\varphi)$  tel que pour tout  $n$ ,

$$J_U^G(\varphi_n) \geq \mathcal{L}_{\varphi_n}^G(\gamma_n) - 1/n.$$

On a

$$\liminf J_U^G(\varphi_n) = \liminf \mathcal{L}_{\varphi_n}^G(\gamma_n). \quad (28)$$

On peut supposer sans perte de généralité que cette limite est finie (dans le cas contraire, il n'y a rien à prouver). On peut choisir  $\gamma_n$  de tel sorte que  $|r_{\varphi_n}(\gamma_n(t))| > \delta/2$  pour tout  $t$ , où  $\delta$  est une constante strictement positive indépendante de  $n$ . De plus, d'après (28) et quitte à extraire une sous suite, on peut supposer que  $\mathcal{L}_{\varphi_n}^G(\gamma_n)$  est borné indépendamment de  $n$ . Ainsi, on peut reparamétriser les applications  $\gamma_n$  de sorte que pour tout éléments  $s$  et  $t$  de  $[0, 1]$  on ait

$$\mathcal{L}((\varphi_n \times \varphi_n) \circ \gamma_n|[s, t]) \leq C|s - t| + 1/n,$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $n$ . En particulier,

$$\text{diametre}((\varphi_n \times \varphi_n) \circ \gamma_n|[s, t]) \leq C|s - t| + 1/n,$$

et comme  $\varphi_n$  converge vers  $\varphi$  pour la topologie  $\mathcal{C}^0$ , on en déduit que

$$\text{diametre}((\varphi \times \varphi) \circ \gamma_n|[s, t]) \leq C_2(|s - t| + 1/n).$$

On pose  $\tilde{\gamma} = (p \times p) \circ \gamma_n$ , où  $p$  est la fonction de reparamétrisation associée à  $\varphi$ . L'équation précédente implique que

$$\text{diametre}((\tilde{\varphi} \times \tilde{\varphi}) \circ \tilde{\gamma}_n([s, t])) \leq C_2(|s - t| + 1/n).$$

En utilisant le fait que la norme de la dérivée de  $\tilde{\varphi}$  est constante, strictement positive, on en déduit que pour tout  $\alpha > 0$ , il existe  $\delta(\alpha) > 0$  tel que si  $|s - t| + 1/n < \delta(\alpha)$  alors

$$|\tilde{\gamma}_n(s) - \tilde{\gamma}_n(t)| < \alpha.$$

D'après le théorème d'Ascoli, il s'en suit qu'il existe une sous suite de  $\tilde{\gamma}_n$  (que nous noterons également  $\tilde{\gamma}_n$ ) convergente vers un élément  $\tilde{\gamma}$  pour la topologie  $\mathcal{C}^0$ . Or pour tout  $n$ ,  $\tilde{\gamma}_n$  appartient à  $\Gamma_V(\tilde{\varphi})$ , où  $V = (p \times p)(U)$ . Comme  $\Gamma_V(\tilde{\varphi})$  est fermé pour la topologie  $\mathcal{C}^0$ ,  $\tilde{\gamma}$  appartient donc à  $\Gamma_V(\tilde{\varphi})$  et

$$\begin{aligned} J_U(\varphi) &= J_v(\tilde{\varphi}) \leq \mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}^G(\tilde{\gamma}) \\ &= \mathcal{L}^G((\tilde{\varphi} \times \tilde{\varphi}) \circ \tilde{\gamma}) \\ &\leq \liminf \mathcal{L}^G((\tilde{\varphi} \times \tilde{\varphi}) \circ \tilde{\gamma}_n) \\ &\leq \liminf \mathcal{L}^G((\varphi_n \times \varphi_n) \circ \gamma_n) = \liminf J_U(\varphi_n), \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.

En utilisant des arguments similaires, on peut établir de même que

**Proposition 12.** *La fonction  $J^g$  est semi continue inférieurement pour la topologie  $\mathcal{C}^0$ .*

### 3.4.6. Différentiabilité des fonctions de pénalisation

Les fonctions de pénalisation  $J^G$  et  $J^g$  ne sont en générale pas dérivables. Cependant, on peut effectuer un calcul formel de leurs dérivées dans le cas où la déformation  $\varphi$  est une immersion ne possédant que des auto-intersections transverses. On rappelle que dans ce cas,

$$J^G(\varphi) = \inf_{\gamma \in \Gamma(\varphi)} \mathcal{L}_{\varphi}^G(\gamma) \text{ et } J^g(\varphi) = \inf_{\gamma \in \Gamma(\varphi)} \mathcal{L}_{\varphi}^g(\gamma),$$

où  $\Gamma(\varphi)$  est donnée par (8) si  $M$  est l'union d'intervalles disjoints. De plus, il existe  $\gamma^G(\varphi)$  et  $\gamma^g(\varphi) \in \Gamma(\varphi)$  tels que

$$J^G(\varphi) = \mathcal{L}_{\varphi}^G(\gamma^G(\varphi)) \text{ et } J^g(\varphi) = \mathcal{L}_{\varphi}^g(\gamma^g(\varphi)).$$

En supposant que  $\gamma^G(\varphi)$  et  $\gamma^g(\varphi)$  sont dérivables par rapport à  $\varphi$ , on peut établir la dérivabilité de  $J^G$  et de  $J^g$ . Plus précisément,

**Proposition 13.** *Soit  $\varphi$  une immersion dont les auto-intersections sont transverses. Si  $\gamma^G(\varphi)$  est dérivable par rapport à  $\varphi$ , alors  $J^G$  est dérivable et*

$$\begin{aligned} \langle (J^G)'(\varphi, \psi) \rangle &= \int_{\gamma} \frac{F \circ (\varphi, \varphi) \circ \gamma}{|F \circ (\varphi, \varphi) \circ \gamma|} \cdot (F \circ (\varphi, \varphi) \circ \gamma) \frac{d((\psi, \psi) \circ \gamma)}{ds} \\ &+ \frac{F \circ (\varphi, \varphi) \circ \gamma}{|F \circ (\varphi, \varphi) \circ \gamma|} \cdot \left( D_{(\varphi, \varphi) \circ \gamma} F(\psi, \psi) \circ \gamma \frac{d((\varphi, \varphi) \circ \gamma)}{ds} \right) ds, \end{aligned}$$

où  $F$  est une matrice symétrique positive telle que  $F^2 = G$ . De plus,

$$\langle (J^G)'(\varphi, \psi) \rangle = \langle (J^G)'(\varphi, (\psi \cdot n_{\varphi})n_{\varphi}) \rangle, \quad (29)$$

où  $n_{\varphi}$  est la normale à  $\varphi$ .

*Remarque 5.* On peut étendre (du moins formellement) cette formule de dérivation à toute déformation (présentant par exemple des auto-intersections non transverses) dans le cas où  $G = 0$  sur  $\Delta(\mathbb{R}^2)$ .

De même,

**Proposition 14.** *Soit  $\varphi$  une immersion dont les auto-intersections sont transverses. Si  $\gamma^g(\varphi)$  est dérivable par rapport à  $\varphi$ , alors  $J^g$  est dérivable et*

$$\langle (J^g)'(\varphi, \psi) \rangle = 2 \int_{\gamma(\varphi)} g'(|\varphi(s_1) - \varphi(s_2)|^2) (\varphi(s_1) - \varphi(s_2)) \cdot (\psi(s_1) - \psi(s_2)) ds.$$

**Preuve (Propositions 14 et 13).** Soit

$$j^g(\varphi, \gamma) = \mathcal{L}_{\varphi}^g(\gamma) = \int_{\gamma} g(|\varphi(s_1) - \varphi(s_2)|^2) ds.$$

On a  $J^g(\varphi) = j^g(\varphi, \gamma^g(\varphi))$ . En utilisant le fait que  $\gamma^g(\varphi)$  minimise  $j^g(\varphi, \gamma)$  sur l'ensemble des  $\gamma$  appartenant à  $\Gamma(\varphi)$  et que  $g(0) = 0$ , on établit que  $\partial j^g / \partial \gamma = 0$ . Ainsi,  $(J^g)'(\varphi) = \partial j^g / \partial \varphi(\varphi, \gamma^g(\varphi))$ , ce qui conduit à l'expression annoncée de la dérivée de  $J^g$ . On procède de même pour déterminer la dérivée de  $J^G$ . Dans ce cas, comme  $J^G$  est invariant par reparamétrisation, la dérivée de  $J^G$  ne dépendant que des variations de  $\varphi$  le long de sa normale.

#### 4. Un exemple d'application à l'élasticité non linéaire

Dans cette section, nous présentons une application de la méthode de pénalisation à un certain type de problème non linéaire.

#### 4.1. Position du problème

On considère un solide hyperélastique non linéaire  $M$  de dimension un se déplaçant dans le plan  $\mathbb{R}^2$ , soumis à des forces mortes  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ , fixé sur une partie non vide  $N \subset M$ . L'énergie  $I(\psi)$  associée à une déformation  $\psi : M \rightarrow M$  est la différence entre l'énergie interne et le travail des forces extérieures.

$$I(\psi) = \int_M W(x, \psi(x)) dx - \int f(x) \cdot \psi(x) dx,$$

où  $W$  est la densité d'énergie interne et dépend de la nature du matériau constitutif de  $W$  (et éventuellement d'autres paramètres tel que la section). Les points critiques de l'énergie sont les déformations d'équilibre. En particulier, si  $I$  admet un minimiseur, c'est un état d'équilibre stable. On suppose que  $W(x, \cdot)$  est convexe et qu'il existe  $p > 1$  et des constantes  $C_1$  et  $C_2$  positives tels que pour tout  $a \in \mathbb{R}^2$  et tout  $x \in M$ ,

$$W(x, a) \leq C_1(|a|^p + 1) \quad (30)$$

et

$$W(x, a) \geq C_2(|a|^p - 1). \quad (31)$$

L'ensemble des déformation admissibles d'énergie finie est

$$\Phi(j_M) = \left\{ \varphi \in W^{1,p}(M; \mathbb{R}^2) : \varphi \in \mathcal{A}(j_M) \right. \\ \left. \text{et } \varphi(x) = j_M(x) \text{ pour tout } x \in N \right\}.$$

**Proposition 15.** *Il existe une déformation  $\varphi \in \Phi(j_M)$  minimisant  $I$  sur  $\Phi(j_M)$ .*

$$I(\varphi) = \inf_{\psi \in \Phi(j_M)} I(\psi). \quad (32)$$

**Preuve.** Soit  $\varphi_n$  une suite minimisante. D'après la propriété de coercivité (31), la suite est bornée dans  $W^{1,p}(M; \mathbb{R}^2)$ . Ainsi, quitte à extraire une sous suite, on peut supposer que la suite  $\varphi_n$  est convergente pour la topologie faible\* de  $W^{1,p}(M; \mathbb{R}^2)$  vers une déformation  $\varphi$ . Comme  $\mathcal{A}(j_M)$  est fermé pour la topologie  $\mathcal{C}^0$  et que l'injection de  $W^{1,p}$  dans  $\mathcal{C}^0$  est compacte, il s'en suit que  $\varphi$  appartient à  $\Phi(j_M)$ . Enfin, comme  $W$  est convexe et d'après la propriété de croissance (30),  $I$  est séquentiellement semi continue inférieure pour la topologie faible\* de  $W^{1,p}$  et  $\varphi$  est un minimiseur de  $I$  sur  $\Phi(j_M)$ .

#### 4.2. Formulation pénalisée

Soit  $T$  une fonction de pénalisation des auto-intersections, semi-continue inférieure pour la topologie  $\mathcal{C}^0$  telle que pour toute déformation  $\psi$  de  $M$ ,  $T(\psi) = 0$  si et seulement si  $\psi \in \mathcal{A}(j_M)$ . En particulier, on peut choisir  $T = J^g$  pour  $M$  quelconque ou encore  $T = J^G$  si  $M$  est soit un cercle, soit une union disjointe d'intervalles fermés. Pour tout réel  $\delta > 0$ , on note  $I_\delta$  la somme de l'énergie  $I$  et de la pénalisation, pondérée par  $\delta^{-1}$ .

$$I_\delta(\varphi) = I(\varphi) + \delta^{-1}T(\varphi).$$

**Proposition 16.** *Le problème de minimisation de  $I_\delta$  sur  $\Phi$  admet au moins une solution. De plus, toute famille de solution  $\varphi_\delta$  est relativement compact pour la topologie  $W^{1,p}$  faible\* et ses valeurs d'adhérence sont solutions du problème de minimisation (32).*

**Preuve.** Le même raisonnement que celui effectué lors de la preuve de la proposition 32 nous permet de prouver l'existence de solutions au problème pénalisé. Enfin, tout suite  $\varphi_\delta$  de solutions des problèmes pénalisés est bornée dans  $W^{1,p}(M; \mathbb{R}^2)$  et admet donc une sous-suite convergente (que nous notons également  $\varphi_\delta$ ). On a

$$T(\lim \varphi_\delta) \leq \liminf T(\varphi_\delta) = 0.$$

Ainsi,  $\lim \varphi_\delta \in \mathcal{A}(j_M)$  et pour tout  $\varphi \in \mathcal{A}(j_M)$ ,

$$I(\varphi) = \liminf I_\delta(\varphi) \geq \liminf I_\delta(\varphi_\delta) \geq \liminf I(\varphi_\delta) \geq I(\lim \varphi_\delta).$$

Comme  $I_\delta$  est dérivable, on peut obtenir des minimums (locaux du moins) de  $I_\delta$  par des méthodes classiques de descente de gradient. Reste à préciser comment calculer d'un point de vu pratique les termes de pénalisation et leur dérivées.

### 5. Applications Numériques

Dans cette section, on s'intéresse aux applications numériques de la méthode de pénalisation introduite. Dans un premier temps, nous présentons deux méthodes permettant d'évaluer les termes de pénalisation  $J^g$  et  $J^G$ . Dans un deuxième temps, nous présentons quelques résultats numériques obtenus à l'aide de la deuxième méthode. Tout d'abord, nous considérons le problème de projection d'une déformation quelconque sur l'ensemble des déformations admissibles, puis un problème physique d'interaction entre des ballons gonflés par un gaz parfait.

## 5.1. Évaluation des termes de pénalisation

### 5.1.1. Une méthode directe

Rappelons que pour une déformation  $\varphi$  ne présentant que des auto-intersections transverses,  $J^g(\varphi)$  et  $J^G(\varphi)$  sont définies comme étant la longueur minimale, pour une métrique dépendant de  $\varphi$ , sur l'ensemble  $\Gamma(\varphi)$ .

$$J^G(\varphi) = \inf_{\gamma \in \Gamma(\varphi)} \mathcal{L}_\varphi^G(\gamma) \text{ et } J^g(\varphi) = \inf_{\gamma \in \Gamma(\varphi)} \mathcal{L}_\varphi^g(\gamma)$$

Par mesure de commodité, on notera  $J$  en lieu et place de  $J^G$  ou  $J^g$  et  $\mathcal{L}_\varphi$  en lieu et place de  $\mathcal{L}_\varphi^G$  ou  $\mathcal{L}_\varphi^g$ . De plus, afin de simplifier la présentation, on considère uniquement le cas particulier d'une variété  $M$  constituée d'une union disjointe d'intervalles fermés. Dans ce cas, on rappelle que

$$\Gamma(\varphi) = \left\{ \gamma \in C_1(M \times M) : \partial\gamma \cap \text{int}(M \times M \setminus \Delta(M)) = r_\varphi^{-1}(0) \setminus \Delta(M) \right\}.$$

On note  $(y_i^+)_{i=1, \dots, n^+}$  et  $(y_j^-)_{j=1, \dots, n^-}$  les familles constitués des éléments de  $r_\varphi^{-1}(0) \setminus \Delta(M)$  telles que  $s(y_i^+) = +1$  et  $s(y_j^-) = -1$ . De plus, pour tout couple  $(i, j)$  tels que  $1 \leq i \leq n^+$  et  $0 \leq j \leq n^-$ , on note  $A_{ij}$  la distance de  $y_i^+$  à  $y_j^-$  pour la métriques associée à  $\mathcal{L}_\varphi$ . De plus, on note  $A_{i0}$  la distance de  $y_i^+$  à  $\partial(M \times M \setminus \Delta(M))$  et  $A_{0j}$  celle de  $y_j^-$  à  $\partial(M \times M \setminus \Delta(M))$  (toujours pour la métrique correspondante). Enfin, on pose  $A_{00} = 0$ . On vérifie sans mal qu'on a alors

$$J(\varphi) = \inf_{v \in V} \sum_{\substack{i=0, \dots, n^+ \\ j=0, \dots, n^-}} v_{ij} A_{ij}, \quad (33)$$

où  $V$  est l'ensemble des matrices  $n^+ \times n^-$  à coefficients dans  $\{0, 1\}$  telles que

$$\sum_{k=0, \dots, n^-} v_{ik} = 1 \text{ pour tout } i = 1, \dots, n^+$$

et

$$\sum_{k=0, \dots, n^+} v_{kj} = 1 \text{ pour tout } j = 1, \dots, n^-.$$

Afin d'évaluer  $J(\varphi)$ , il suffit donc de calculer la matrice  $A$  puis de résoudre le programme linéaire (33). Notons que l'ensemble des déformations possédant des auto-intersections transverses est générique. Ainsi, la méthode exposée peut s'appliquer à toute déformation, quitte à la perturbée légèrement. Cependant, elle est délicate à implanter d'un point de vue pratique. En effet, le temps de calcul augmente rapidement en fonction du nombre de points d'auto-intersections. Il faut calculer de  $(1 + n^+)(1 + n^-)$  géodésiques afin de déterminer  $A$ , tandis que le nombre d'éléments de  $V$  augmente exponentiellement en fonction du nombre de points d'intersection.

### 5.1.2. Une méthode de type changement de phase

L'inconvénient principal de la méthode précédente réside dans l'augmentation rapide du temps de calcul de  $J$  en fonction du nombre de points d'auto-intersections. Afin de pallier cet inconvénient, on propose une autre méthode, basée sur la théorie des changements de phase. Avant toutes choses, il convient de rappeler quelques résultats classiques en la matière (voire [1, 20, 21]).

#### Le théorème de Modica-Mortola

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  et  $R$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^+$  possédant exactement deux puits aux points 1 et 0. Pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , on introduit la fonctionnelle

$$F_\varepsilon(u) = \begin{cases} \varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \varepsilon^{-1} \int_\Omega R(u) dx & \text{si } u \in H^1(\Omega) \\ +\infty & \text{si } u \notin H^1(\Omega) \end{cases}$$

définie pour toute application  $u \in L^1(\Omega)$ . La fonctionnelle  $F_\varepsilon$  n'est autre que l'énergie d'interface associée à un système constitué de deux fluides. La fonction  $u$  représente la proportion locale en l'un des deux fluides. Lorsqu'on cherche à minimiser  $F_\varepsilon$ , le deuxième terme de l'énergie d'interface favorise les configurations  $u$  prenant les valeurs 0 ou 1 (séparation des phases), tandis que le premier pénalise les sauts de la phase. Lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, la fonctionnelle  $F_\varepsilon$   $\Gamma$ -converge (pour la topologie  $L^1$ ) vers la fonctionnelle longueur  $\mathcal{L}$  définie par

$$\mathcal{L}(u) = \begin{cases} \alpha \mathcal{H}^1(Su) & \text{si } u \in SBV(\Omega; 0, 1) \\ +\infty & \text{si } u \notin SBV(\Omega; 0, 1) \end{cases},$$

où  $Su$  est l'ensemble des points essentiellement discontinus de  $u$ , tandis que  $SBV(\mathbb{R}^2, 0, 1)$  désigne l'ensemble des fonctions spéciales à variations bornées de  $\mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\{0, 1\}$  et  $\alpha$  est un réel strictement positif ne dépendant que de  $R$ .

*Remarque 6.* Notons que pour toute fonction  $u \in SBV(\mathbb{R}^2, \{0, 1\})$ ,  $\mathcal{L}(u)$  n'est autre que le périmètre de l'ensemble des points tels que  $u = 1$ .

De plus, toute suite  $u_\varepsilon$  telle que,  $F_\varepsilon(u_\varepsilon)$  est borné, est relativement compacte dans  $L^1(\Omega)$ . Ces deux propriétés nous permettent d'obtenir aisément, à l'aide de la théorie de la  $\Gamma$ -convergence, des résultats de convergence sur les minimiseurs des fonctionnelles  $F_\varepsilon$ . Par exemple, la suite des minimiseurs  $u_\varepsilon$  de  $F_\varepsilon$  sur l'ensemble des fonctions  $u$  telles que  $\int_\Omega u dx = V$  est relativement compacte, et tout point d'adhérence de cette suite est un minimiseur de  $\mathcal{L}$  sur l'ensemble des  $u$  vérifiant la même contrainte.

Ce résultat peut être étendu à des métriques autres que l'identité. Par un simple changement de variable, on peut montrer que si  $A$  est une matrice symétrique définie positive et  $a = (\det A)$ , alors la fonctionnelle

$$F_\varepsilon^A(u) = \begin{cases} \int_\Omega \left( \varepsilon A^{-1} \nabla u \cdot \nabla u + \varepsilon^{-1} R(u) \right) \sqrt{a} dx & \text{si } u \in H^1(\Omega) \\ +\infty & \text{si } u \notin H^1(\Omega) \end{cases}$$



$\Gamma$ -converge, lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro vers la fonctionnelle

$$\mathcal{L}^A(u) = \begin{cases} \alpha \mathcal{H}_A^1(Su) & \text{si } u \in SBV(\Omega; 0, 1) \\ +\infty & \text{si } u \notin SBV(\Omega; 0, 1) \end{cases}$$

où  $\mathcal{H}_A^1$ , est la mesure de Hausdorff unidimensionnel sur  $\mathbb{R}^2$  muni de la norme  $\|x\|_A^2 = Ax \cdot x$ . Enfin, le même résultat reste valable dans le cas inhomogène, c'est à dire lorsque  $A$  est un champ continu de matrices symétriques définies positives.

### Application au calcul des termes de pénalisation

Rappelons qu'une déformation  $\varphi$  est admissible si pour tout ouvert  $U$  de  $\text{int}(M) \times \text{int}(M)$ , tel que  $\inf_{x \in U} |r_\varphi(x)| > 0$ , il existe  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$\Phi_\varphi(x) = \nabla u(x), \text{ pour tout } x \in U, \quad (34)$$

où

$$\Phi_\varphi = \nabla r_\varphi(\Phi(r_\varphi)) - \nabla r_{j_M}(\Phi(r_{j_M}))$$

et

$$r_\varphi(x_1, x_2) = \varphi(x_1) - \varphi(x_2).$$

Si  $\theta_\varphi$  est la fonction de  $U$  dans  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  qui à tout couple  $x_1, x_2$  associe l'angle du vecteur  $\varphi(x_1) - \varphi(x_2)$  avec l'axe des abscisses, c'est à dire telle que

$$r_\varphi(x) = |r_\varphi(x)|(\cos(\theta_\varphi), \sin(\theta_\varphi)),$$

on a

$$\Phi_\varphi = \nabla \theta_\varphi - \nabla \theta_{j_M}.$$

Ainsi, la condition d'admissibilité (34) équivaut à l'existence d'une fonction  $u$  de  $U$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$\begin{cases} \nabla u(x) = (\nabla \theta_\varphi - \nabla \theta_{j_M})(x), \\ u(x) \equiv (\theta_\varphi - \theta_{j_M})(x) [2\pi]. \end{cases}$$

pour tout  $x \in U$ . Soit  $\mathcal{R}$  une fonction régulière  $2\pi$ -périodique à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , telle que  $\mathcal{R}(x) = 0$  si et seulement si  $x \equiv 0 [2\pi]$ . Pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , on introduit la fonctionnelle définie sur  $L^1(U)$  par

$$\mathcal{F}_{\varphi, \varepsilon}(u) = \int_U \left( \varepsilon |\nabla u - \nabla(\theta_\varphi - \theta_{j_M})|^2 + \varepsilon^{-1} \mathcal{R}(u - (\theta_\varphi - \theta_{j_M})) \right) dx$$

pour tout  $u \in H^1(U)$  et  $\mathcal{F}_{\varphi, \varepsilon}(u) = +\infty$  sinon. La fonctionnelle  $\mathcal{F}_{\varphi, \varepsilon}$  est à mettre en regard à la fonction  $F_\varepsilon$  introduite dans la section précédente. La différence essentielle porte sur le fait qu'un déphasage  $\theta_\varphi - \theta_{j_M}$  a été introduit et que la fonction  $R$  qui ne comportait que deux puits a été remplacée par une fonction périodique (comportant une infinité de puits). Notons que si  $u - (\theta_\varphi - \theta_{j_M})$  n'est défini qu'à un multiple de  $2\pi$  prêt,  $\mathcal{R}(u - (\theta_\varphi - \theta_{j_M}))$  est correctement défini, suite à la périodicité de  $\mathcal{R}$ .

On peut énoncer un résultat de  $\Gamma$ -convergence sur la suite de fonctionnelles  $\mathcal{F}_{\varphi,\varepsilon}(u)$  similaire au résultat classique de Modica-Mortola. En effet,  $\mathcal{F}_{\varphi,\varepsilon}$   $\Gamma$ -converge (pour la topologie  $L^1$ ) vers la fonctionnelle  $\widetilde{\mathcal{L}}_\varphi$  définie par

$$\widetilde{\mathcal{L}}_\varphi(u) = \begin{cases} \beta \int_U |[u]| \mathcal{H}^1 \llcorner Su & \text{si } u \in SBV(\Omega) \\ & \text{et } u \equiv \theta_\varphi - \theta_{j_M} [2\pi] \text{ presque partout} \\ +\infty & \text{si } u \notin SBV(\Omega) \\ & \text{ou } u \not\equiv \theta_\varphi - \theta_{j_M} [2\pi] \\ & \text{sur un ensemble de mesure non nul.} \end{cases}$$

Dans cette expression,  $Su$  désigne les points essentiellement discontinus de  $u$  et  $[u]$  le saut de  $u$  en ces points, tandis que  $\beta$  est un réel positif ne dépendant que de  $\mathcal{R}$ . Notons que pour tout élément  $u$  tel que  $\widetilde{\mathcal{L}}_\varphi(u)$  est fini, le gradient de  $u$  est de la forme suivante

$$\nabla u = \nabla \theta_\varphi - \nabla \theta_{j_M} + [u] \nu \mathcal{H}^1 \llcorner Su,$$

où  $\nu$  est la normale unitaire à  $Su$ . Enfin, pour tout  $u$  tel que  $\widetilde{\mathcal{L}}_\varphi(u)$  est fini, si l'ensemble des points singuliers  $Su$  est suffisamment régulier ne présentant que des sauts de  $\pm 2\pi$ , alors  $Su$  est un élément de  $\Gamma_U(\varphi)$  (nous ne donnons pas dans cet article la preuve de cette assertion). Aussi, le problème de minimisation de  $\mathcal{L}_\varphi$  équivaut à déterminer l'élément de  $\Gamma_U(\varphi)$  de longueur minimale (pour la métrique euclidienne). En d'autres termes, on a

$$\inf_u \mathcal{L}_\varphi(u) = \inf_{\gamma \in \Gamma_U(\varphi)} \mathcal{L}(\gamma).$$

Or les fonctions de pénalisation  $J_U^g$  et  $J_U^G$  sont précisément définis comme étant la longueur minimale des éléments de  $\Gamma_U(\varphi)$  à ceci prêt que la métrique utilisée n'est pas la métrique euclidienne mais une métrique dépendant de  $\varphi$ . Afin d'évaluer la valeur des fonctions de pénalisation  $J^g$  et  $J^G$ , il suffit simplement d'adapter la définition de  $\widetilde{\mathcal{L}}_\varphi$  afin de prendre en compte l'utilisation de métriques autres que l'identité.

On note  $A_\varphi^g$  et  $A_\varphi^G$  les métriques de  $M \times M$  associées au calcul respectif de  $J^g$  et  $J^G$ , c'est à dire

$$A_\varphi^G(x) = \nabla_{\gamma(x)}(\varphi \times \varphi(x)) G((\varphi \times \varphi) \circ \gamma(x)) \nabla_{\gamma(x)}(\varphi \times \varphi(x))^T$$

et

$$A_\varphi^g(x) = g(|r_\varphi(x)|^2) \nabla_{\gamma(x)}(\varphi \times \varphi(x)) \nabla_{\gamma(x)}(\varphi \times \varphi(x))^T.$$

On introduit les suites de fonctionnelles  $\mathcal{L}_{\varphi,\varepsilon}^G$  et  $\mathcal{L}_{\varphi,\varepsilon}^g$  définies par

$$\mathcal{L}_{\varphi,\varepsilon}^G(u) = \int_{M \times M \setminus \Delta M} \left( \varepsilon (A_\varphi^G)^{-1} (\Phi_\varphi - \nabla u) \cdot (\Phi_\varphi - \nabla u) + \varepsilon^{-1} \mathcal{R}(u - \theta_\varphi + \theta_{j_M}) \right) (\det A_\varphi^G)^{1/2} dx$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\varphi,\varepsilon}^g(u) = \int_{M \times M \setminus \Delta M} & \left( \varepsilon (A_\varphi^g)^{-1} (\Phi_\varphi - \nabla u) \cdot (\Phi_\varphi - \nabla u) \right. \\ & \left. + \varepsilon^{-1} \mathcal{R}(u - \theta_\varphi + \theta_{j_M}) \right) (\det A_\varphi^g)^{1/2} dx. \end{aligned}$$

On a alors

**Proposition 17.** *Si  $\varphi$  est une déformation ne possédant que des auto-intersections transverses, alors les fonctionnelles  $\mathcal{L}_{\varphi,\varepsilon}^G$   $\Gamma$ -convergent, lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, vers  $\widetilde{\mathcal{L}}_\varphi^G$  définie par*

$$\widetilde{\mathcal{L}}_\varphi^G(u) = \begin{cases} \beta \int_U |[u]| \mathcal{H}_{A_\varphi^G \perp}^1 S u & \text{si } u \in SBV(\Omega) \\ & \text{et } u \equiv \theta_\varphi - \theta_{j_M} [2\pi] \text{ presque partout} \\ +\infty & \text{si } u \notin SBV(\Omega) \\ & \text{ou } u \not\equiv \theta_\varphi - \theta_{j_M} [2\pi] \\ & \text{sur un ensemble de mesure non nul.} \end{cases}$$

De plus, on a

$$\inf_u \widetilde{\mathcal{L}}_\varphi^G(u) = \inf_{\gamma \in \Gamma(\varphi)} \mathcal{L}^G(\gamma) = J^G(\varphi).$$

Enfin, si  $u_\varepsilon$  est une suite de minimiseurs de  $\mathcal{L}_{\varphi,\varepsilon}^G$  et si

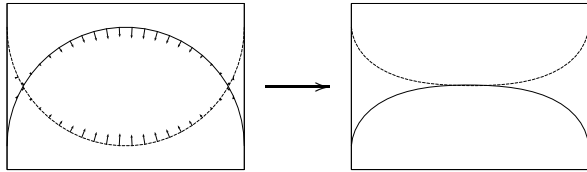
$$\gamma_\varepsilon = (u_\varepsilon - (\theta_\varphi - \theta_{j_M}))^{-1}(\pi [2\pi]),$$

alors  $\gamma_\varepsilon$  converge (quitte à extraire une sous-suite) vers un minimiseur de  $\mathcal{L}^G$  sur  $\Gamma(\varphi)$ .

Le même résultat reste valable quitte à remplacer  $G$  par  $g$ . On en déduit que si

$$J_\varepsilon^G(\varphi) = \inf_u \mathcal{L}_{\varphi,\varepsilon}^G(u) \text{ et } J_\varepsilon^g(\varphi) = \inf_u \mathcal{L}_{\varphi,\varepsilon}^g(u),$$

alors  $J_\varepsilon^G(\varphi)$  (resp.  $J_\varepsilon^g(\varphi)$ ) converge vers  $J^G(\varphi)$  (resp.  $J^g(\varphi)$ ). On obtient ainsi une bonne approximation des termes de pénalisations en évaluant, suivant la pénalisation choisie,  $J_\varepsilon^G$  ou  $J_\varepsilon^g$  en lui et place de  $J^G$  et  $J^g$ . Même si on a remplacé un problème unidimensionnel (recherche des géodésiques  $\gamma \in \Gamma(\varphi)$  minimisant  $\mathcal{L}_\varphi^G$  ou  $\mathcal{L}_\varphi^g$ ) par un problème bidimensionnel (recherche de la phase  $u$  minimisant  $\mathcal{L}_{\varphi,\varepsilon}^G$  ou  $\mathcal{L}_{\varphi,\varepsilon}^g$ ), le temps de calcul de  $J_\varepsilon^G$  ou de  $J_\varepsilon^g$  est essentiellement indépendant du nombre d'auto-intersections, contrairement au calcul direct de  $J^G$  et  $J^g$ . De plus, cette méthode ne nécessite pas de décrire l'ensemble  $\Gamma(\varphi)$  qui dépend de  $M$ , ce qui simplifie l'implantation numérique.



**Fig. 9.** Projection d'une déformation présentant une intersection simple

### 5.2. Projection sur l'ensemble des déformations admissibles

Avant d'appliquer notre méthode de pénalisation à un cas physique concret, on s'intéresse au problème consistant à construire pour une déformation  $\varphi$  donnée une déformation admissible proche. A cet effet on se propose d'appliquer un algorithme de minimisation par descente de gradient à la fonction de pénalisation  $J^G$  initialisée par  $\varphi$ . Dans les exemples qui suivent, nous avons employé un algorithme de gradient à pas fixe, muni l'espace des déformations du produit scalaire  $H^1$  et utilisé la métrique  $G(x, y) = |x - y|^4 \text{Id}$ . Ainsi, on construit la suite de déformations  $\varphi_n$  définies comme suit.

1. Initialisation.  $\varphi_0 = \varphi$
2. Pour tout  $n \geq 0$ 
  - (a) Calcul de  $J^G(\varphi_n)$  par la méthode de type changement de phase (voir section 5.1.2). Obtention de la phase  $u_n$  associée.
  - (b) Détermination la famille de géodésiques  $\gamma_n \in \Gamma(\varphi_n)$ , solution du problème de minimisation

$$\mathcal{L}^G(\gamma_n) = \inf_{\gamma \in \Gamma(\varphi_n)} \mathcal{L}_{\varphi_n}^G(\gamma).$$

La famille  $\gamma_n$  est obtenue comme l'ensemble des lignes de niveau de  $u_n$  égales à  $\theta_{\varphi_n} - \theta_{j_M} + \pi [2\pi]$ .

- (c) Calcul du gradient de  $J$  (voir la Proposition 13).
- (d) Descente de gradient: Résolution du problème variationnel.

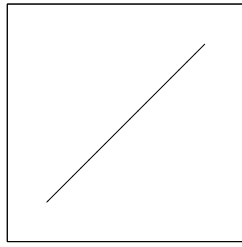
$$(\varphi_{n+1}, \psi)_{H^1} = (\varphi_n, \psi)_{H^1} - h \langle J', \psi \rangle$$

pour toute fonction tests  $\psi$ , où  $h > 0$  est le pas de descente.

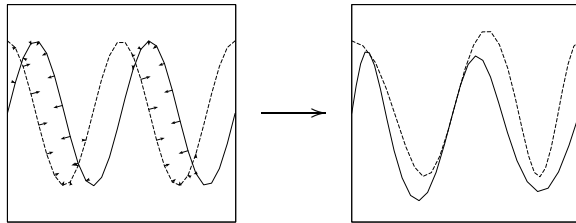
On arrête l'algorithme lorsque le gradient de  $J$  est assez petit.

La figure 9 illustre l'action de cet algorithme sur une configuration présentant une intersection simple. La variété  $M$  est constituée de deux intervalles, les déformations sont fixées à leurs extrémités. De plus, on a représenté par un champ de vecteur le gradient de  $J$  sur la configuration initiale. Les géodésiques  $\gamma_0$  associées sont représentées sur la figure 10.

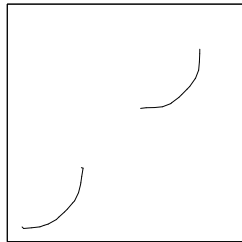
Les figures 11 et 12 ont été obtenues avec une initialisation différente. Notre algorithme peut s'appliquer au cas particulier des auto-intersections. Nous présentons plusieurs résultats obtenus pour  $M = S^1$  identifié à  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ . L'injection de référence choisie est  $j_M(t) = (\cos(t), \sin(t))$ .



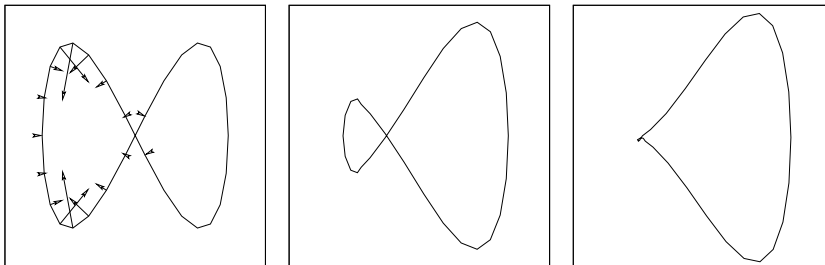
**Fig. 10.** Géodésiques  $\gamma_0$  associées à la déformation initiale de la figure 9



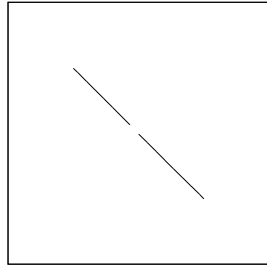
**Fig. 11.** Projection d'une déformation présentant plusieurs intersections



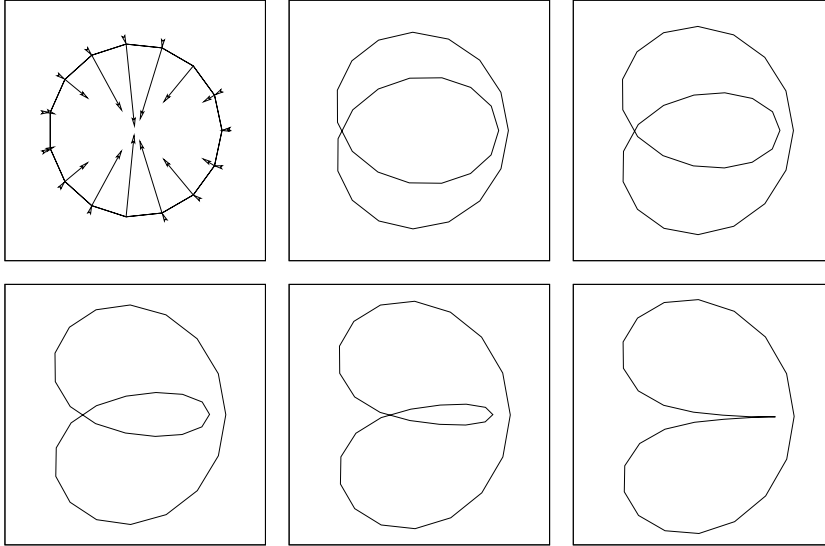
**Fig. 12.** Géodésiques  $\gamma_0$  associées à la déformation initiale de la figure 11



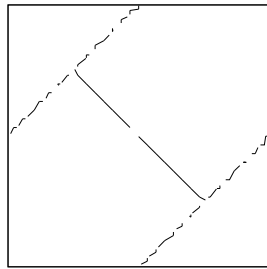
**Fig. 13.** Projection de la déformation  $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(2t))$



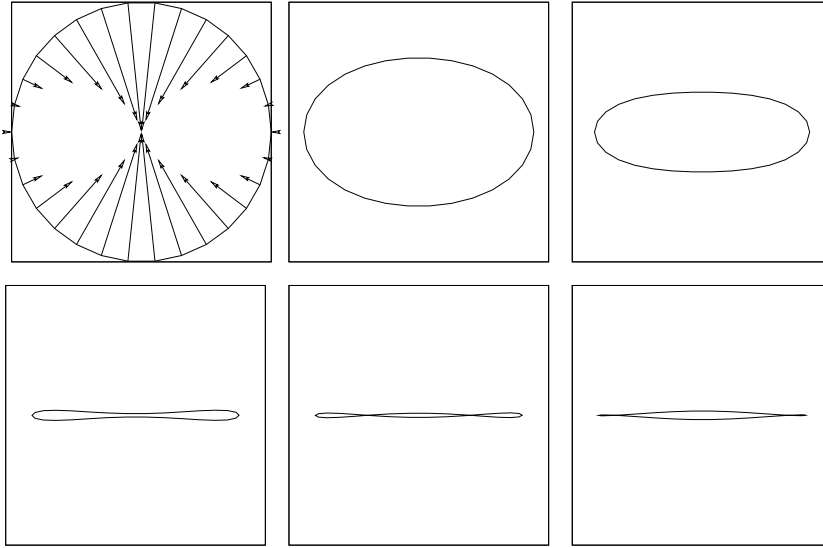
**Fig. 14.** Géodésiques  $\gamma_0$  associées à la déformation initiale de la figure 13



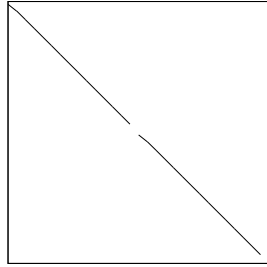
**Fig. 15.** Projection de la déformation  $\varphi(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$



**Fig. 16.** Géodésiques  $\gamma_0$  associées à la déformation initiale de la figure 15



**Fig. 17.** Projection de la déformation  $\varphi(t) = (\cos(-t), \sin(-t))$



**Fig. 18.** Géodésiques  $\gamma_0$  associées à la déformation initiale de la figure 17

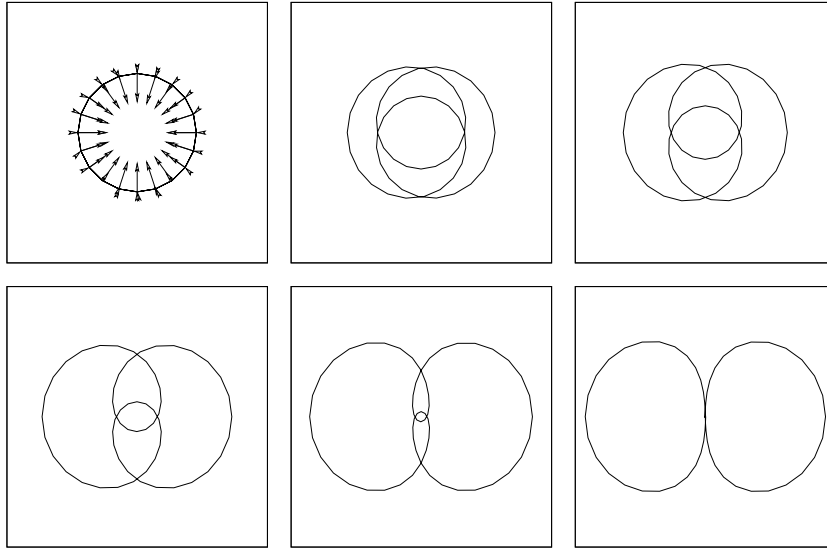
### 5.3. Application à un cas physique

Dans cette section, on donne un exemple d'application de la méthode de pénalisation introduite à un problème non-linéaire. On considère deux membranes  $M_1$  et  $M_2$  difféomorphes à l'intervalle  $[0, \pi]$ . Chacune d'elles est constituée d'un matériau élastique non linéaire de densité d'énergie

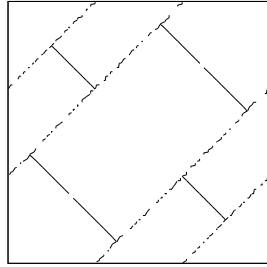
$$W_\alpha(F) = \mu_\alpha \begin{cases} (|F|^2 - 1)^2 & \text{si } |F| \geq 1 \\ 0 & \text{si } |F| < 1. \end{cases},$$

où  $\mu_\alpha > 0$  est un coefficient d'élasticité correspondant à la membrane  $M_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ). L'énergie interne associée à une déformation  $\psi_\alpha$  de la membrane  $M_\alpha$  est

$$E_\alpha(\psi_\alpha) = \int_{M_\alpha} W_\alpha(\dot{\psi}_\alpha) dx.$$



**Fig. 19.** Projection de la déformation  $\varphi(t) = (\cos(3t), \sin(3t))$



**Fig. 20.** Géodésiques  $\gamma_0$  associées à la déformation initiale de la figure 19

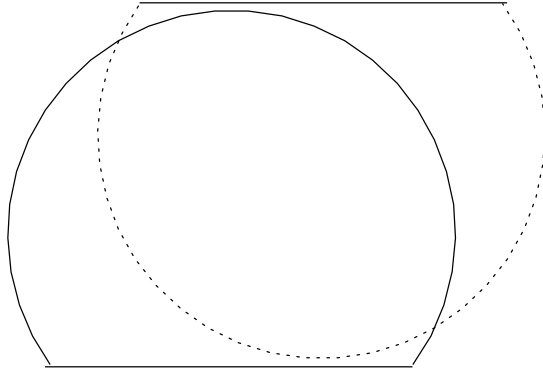
On suppose de plus que chacune des membranes est fixées sur un support plan et que l'espace contenu entre les membranes et leur support est occupé par un gaz rare qui exerce sur chacune des membranes une pression uniforme inversement proportionnelle à l'aire  $V_\alpha$  qu'il occupe. Ainsi, l'énergie totale associée à un couple  $\psi = (\psi_1, \psi_2)$  de déformations est

$$I(\psi) = \sum_{\alpha=1,2} \int_{M_\alpha} W_\alpha(\psi_\alpha) dx + C_\alpha \ln(V_\alpha).$$

Toute position d'équilibre des membranes est un point critique de l'énergie sur l'ensemble des déformations admissibles. La fonction  $W_\alpha$  étant convexe, il existe configuration  $\varphi$  solution du problème de minimisation de l'énergie sur l'ensemble des déformations admissibles,

$$I(\varphi) = \inf_{\psi \in \mathcal{F}(j_M)} I(\psi). \quad (35)$$





**Fig. 21.** Position d'équilibre des membranes sans pénalisation

Nous avons résolu ce problème de minimisation à l'aide de la méthode de pénalisation. En effet, les minimiseurs de

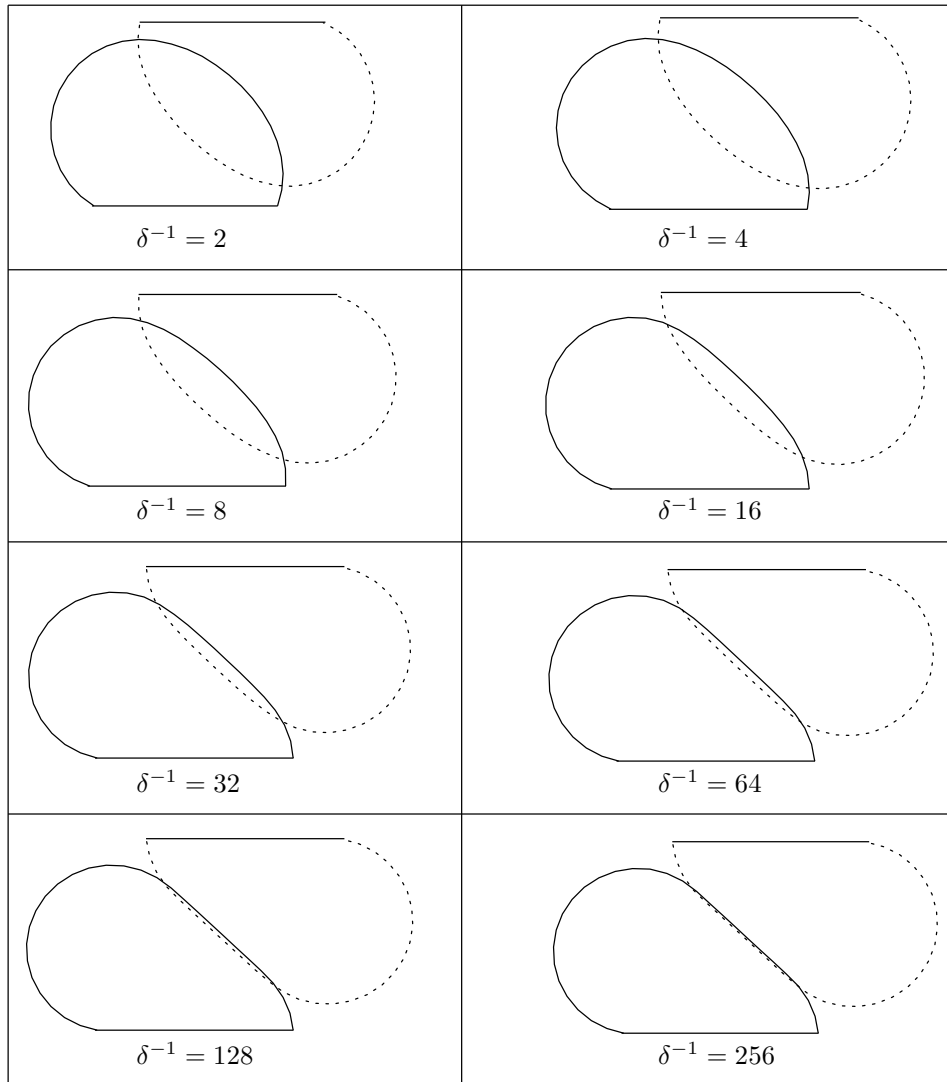
$$I_\delta(\varphi^\delta) = \inf_{\psi} \left\{ I_\delta(\psi) := I(\psi) + \delta^{-1} J^G(\psi) \right\} \quad (36)$$

convergent (quitte à extraire une sous suite) vers une solution  $\varphi$  du problème initial (35) lorsque  $\delta > 0$  tend vers zéro.

Sur les exemples numériques présentés, nous avons choisi:  $C_1 = C = 2 = 140/\pi$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ; l'injection de référence est définie par  $j_M|_{M_1}(t) = (-\cos(t), \sin(t))$  et  $j_M|_{M_2}(t) = (0.5 - \cos(t), 2 - \sin(t))$ , où  $M = M_1 \cup M_2$  et  $M_1$  et  $M_2$  sont identifiés à l'intervalle  $[0, \pi]$ . La figure 21 représente la position d'équilibre des membranes sans prise en compte de la contrainte de non intersection. La figure 22 représente les solutions  $\varphi^\delta$  du problème (36) obtenues par la méthode de descente de gradient à pas fixe pour différentes valeurs de  $\delta$ .

## Bibliographie

1. G. Alberti. Variational models for phase transitions, an approach via  $\Gamma$ -convergence. In *Calculus of variations and partial differential equations (Pisa, 1996)*, pages 95–114. Springer, Berlin, 2000.
2. J. M. Ball. Global invertibility of Sobolev functions and the interpenetration of matter. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 88(3-4):315–328, 1981.
3. D. Baraff. Analytical methods for dynamic simulation of non-penetrating rigid bodies. In *SIGGRAPH '89: Proceedings of the 16th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 223–232, New York, NY, USA, 1989. ACM Press.
4. D. Baraff. Fast contact force computation for nonpenetrating rigid bodies. In *SIGGRAPH '94: Proceedings of the 21st annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 23–34, New York, NY, USA, 1994. ACM Press.



**Fig. 22.** Position d'équilibre des membranes pour différentes pénalisations

5. D. Baraff and A. Witkin. Dynamic simulation of non-penetrating flexible bodies. In *SIGGRAPH '92: Proceedings of the 19th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 303–308, New York, NY, USA, 1992. ACM Press.
6. D. Baraff and A. Witkin. Large steps in cloth simulation. In *SIGGRAPH '98: Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 43–54, New York, NY, USA, 1998. ACM Press.
7. P. G. Ciarlet and J. Nečas. Injectivity and self-contact in nonlinear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 97(3):171–188, 1987.

8. M. Giaquinta, G. Modica, and J. Souček. Cartesian currents, weak diffeomorphisms and existence theorems in nonlinear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 106(2):97–159, 1989.
9. M. Giaquinta, G. Modica, and J. Souček. Erratum and addendum to: “Cartesian currents, weak diffeomorphisms and existence theorems in nonlinear elasticity” [Arch. Rational Mech. Anal. **106** (1989), no. 2, 97–159; MR 90c:58044]. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 109(4):385–392, 1990.
10. O. Gonzalez, J. H. Maddocks, F. Schuricht, and H. von der Mosel. Global curvature and self-contact of nonlinearly elastic curves and rods. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 14(1):29–68, 2002.
11. J. O. Hallquist, G. L. Goudreau, and D. J. Benson. Sliding interfaces with contact-impact in large-scale Lagrangian computations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 51(1-3):107–137, 1985. FENOMECH '84, Part I, II (Stuttgart, 1984).
12. G. Hirota, F. S., and S. A. An improved finite-element contact model for anatomical simulations. *The Visual Computer*, 19(5):291–309, 2003.
13. M. Jean. The non-smooth contact dynamics method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 177(3-4):235–257, 1999. Computational modeling of contact and friction.
14. M. Jean, V. Acary, and Y. Monerie. Non-smooth contact dynamics approach of cohesive materials. *R. Soc. Lond. Philos. Trans. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 359(1789):2497–2518, 2001. Non-smooth mechanics.
15. H. M. A. S. S. J.W. and M. F.J. A general-purpose contact detection algorithm for nonlinear structural analysis code. *Sandia Report*, 1993.
16. N. Kikuchi and J. T. Oden. *Contact problems in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods*, volume 8 of *SIAM Studies in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1988.
17. A. Klarbring. Large displacement frictional contact: a continuum framework for finite element discretization. *European J. Mech. A Solids*, 14(2):237–253, 1995.
18. J. Laursen, T.A.; Simo. A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation frictional contact problems. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 36(20):3451–3485, 1993.
19. V. J. Milenkovic and H. Schmidl. Optimization-based animation. In *SIG-GRAPH '01: Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 37–46, New York, NY, USA, 2001. ACM Press.
20. L. Modica. The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 98(2):123–142, 1987.
21. L. Modica and S. Mortola. Un esempio di  $\Gamma^-$ -convergenza. *Boll. Un. Mat. Ital. B (5)*, 14(1):285–299, 1977.
22. J. J. Moreau. An introduction to unilateral dynamics. *Lect. Notes Appl. Comput. Mech.*, 14:1–26, 2004.
23. W. P. *Computational Contact Mechanics*. J. Wiley & Sons, New York, 2002.
24. O. Pantz. The modeling of deformable bodies with frictionless (self-)contacts. *R.I. CMAP. Ecole Polytechnique, Palaiseau*, 585, 2005.
25. M. A. Puso and T. A. Laursen. A 3D contact smoothing method using Gregory patches. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 54(8):1161–1194, 2002.
26. F. Schuricht. A variational approach to obstacle problems for shearable nonlinearly elastic rods. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 140(2):103–159, 1997.
27. F. Schuricht. Regularity for shearable nonlinearly elastic rods in obstacle problems. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 145(1):23–49, 1998.
28. F. Schuricht. Variational approach to contact problems in nonlinear elasticity. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 15(4):433–449, 2002.

29. F. Schuricht and von der Mosel H. Euler-lagrange equations for nonlinearly elastic rods with self-contact. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 168(1):35–82, 2003.
30. L. T.A. Formulation and treatment of frictional contact problems using finite elements. *SUDAM Report*, 92(6), 1992.
31. Q. Tang. Almost-everywhere injectivity in nonlinear elasticity. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 109(1-2):79–95, 1988.
32. P. Wriggers. Finite element algorithms for contact problems. *Arch. Comput. Methods Engrg.*, 2(4):1–49, 1995.