THEORIE D'O'DOHERTY-ANSTEY ET APPROXIMATION-DIFFUSION

J.F CLOUET
CMAP
Ecole Polytechnique

novembre 1992

Abstract

Dans ce rapport, nous donnons une preuve détaillée des résultats annoncés par G.Papanicolaou dans un appendice de [1] concernant la forme du front d'une onde acoustique se déplacant dans un milieu aléatoire unidimensionnel en petites perturbations. Pour cela nous regardons le front d'onde dans un repère mobile se déplaçant à la vitesse (aléatoire) de l'onde dans le milieu puis à la vitesse moyenne. Nous avons besoin d'un théorème d'approximation-diffusion dans un cas de diffusion turbulente non-stationnaire; nous le montrons en étudiant les problèmes de martingale vérifiés par une suite de processus tronqués puis en passant à la limite.

1 INTRODUCTION

La théorie d'O'Doherty-Anstey décrit le comportement d'une onde acoustique en milieu aléatoire lorsque les fluctuations sont faibles. En particulier elle prédit que le front de l'onde est peu modifié lors de la propagation. L'objet de ce rapport est de présenter le travail de Georges Papanicolaou sur la théorie d'O'Doherty-Anstey (cf [1]) ainsi qu'une démonstration d'un théorème d'approximation diffusion dans un cadre général. Le problème se pose comme suit:

- $u(t,z)$ et $p(t,z)$ sont la vitesse et la pression de l'onde acoustique
- $\rho(z)$ et $\kappa(z)$ sont des grandeurs caractéristiques du matériau unidimensionnel dans lequel se propage l'onde (respectivement la densité et le module de compressibilité).

- les équations d'Euler (linéarisées) de l'onde sont:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \\ \frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

On fait les hypothèses suivantes pour obtenir un modèle simplifié qui permette d'effectuer tous les calculs nécessaires:

- Le milieu est unidimensionnel suivant l'axe des z

- Il est homogène pour $z \geq 0$: $\rho(z) = \rho_1$ et $\kappa(z) = \kappa_1$

- Il est inhomogène pour $z \leq 0$: $\rho(z) = \rho_1$ et $\frac{1}{\kappa(z)} = \frac{1}{\kappa_1}\left(1 + \epsilon\nu(\frac{z}{\epsilon^2})\right)$ où μ est un processus aléatoire borné possédant des propriétés de régularité et d'ergodicité à préciser, représentant les inhomogénéités du milieu: elles sont faibles (terme ϵ) et sont de petite échelle (terme $1/\epsilon^2$).

- La condition initiale est donnée par une impulsion $\frac{1}{\epsilon} f(t/\epsilon^2)$ où f est une fonction de classe C^∞ à support compact, d'énergie finie, introduite en $z = 0$

Pour étudier la forme du front de l'onde, on observe l'onde sous une forme lagrangienne c'est-à-dire en utilisant un repère se déplaçant à la même vitesse (aléatoire) que l'onde. On introduit alors la vitesse de déplacement de l'onde:

$$c(z) = \sqrt{\frac{\kappa(z)}{\rho(z)}}$$

et le temps de trajet de l'onde:

$$\tau(z) = \int_0^z \frac{ds}{c(s)}$$

$\tau(z)$ est strictement croissante et admet donc une fonction inverse $\xi(\tau)$, profondeur atteinte par le front de l'onde à l'instant τ. On s'intéresse donc au processus $p(\xi(\tau), t)$ ($u(\xi(\tau), t)$ se traiterait d'une manière analogue) dont nous allons exhiber des équivalents des deux premiers moments pour ϵ petit ce qui nous donnera des renseignements sur la forme du front d'onde pour τ proche de t et comparer ces résultats avec ceux que l'on trouve lorsque le repère se déplace à la vitesse moyenne.

2 VITESSE ALEATOIRE

2.1 Représentation intégrale

On commence par obtenir une représentation intégrale de $p(-L,t)$ pour un réel L positif quelconque à l'aide de l'analyse de Fourier. On introduit les transformées de Fourier:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{p}(z,\omega) = \int e^{\frac{\imath\omega t}{\epsilon^2}} p(z,t)dt \\ \hat{u}(z,\omega) = \int e^{\frac{\imath\omega t}{\epsilon^2}} u(z,t)dt \end{array} \right.$$

ce qui permet de réécrire les équations d'Euler sous la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} = \frac{\imath\omega\rho}{\epsilon^2}\hat{u} \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} = \frac{\imath\omega}{\kappa\epsilon^2}\hat{p} \end{array} \right.$$

On pose ensuite $\eta(z) = \sqrt{\rho(z)\kappa(z)}$ et on définit les ondes montantes A et descendantes B:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{p} = \eta^{1/2}(Ae^{\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}} - Be^{-\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}}) \\ \hat{u} = \eta^{-1/2}(Ae^{\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}} + Be^{-\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}}) \end{array} \right.$$

En supposant $\eta(z)$ suffisamment régulier (ν dérivable au moins une fois) on obtient le système suivant pour les dérivées partielles par rapport à z (il suffit de dériver les deux équations précédentes termes à termes):

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \frac{\partial \eta^{1/2}}{\partial z}\left(Ae^{\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}} - Be^{-\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}}\right) \\ +\eta^{1/2}\left(\frac{\partial A}{\partial z}e^{\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}} - \frac{\partial B}{\partial z}e^{-\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}}\right) \\ +\frac{\imath\omega}{c(z)\epsilon^2}\eta^{1/2}\left(Ae^{\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}} + Be^{-\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}}\right) \end{array} \right. = \frac{\imath\omega\rho}{\epsilon^2}\eta^{-1/2}\left(Ae^{\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}} + Be^{-\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}}\right) \\ \left. \begin{array}{l} \frac{\partial \eta^{-1/2}}{\partial z}\left(Ae^{\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}} + Be^{-\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}}\right) \\ +\eta^{-1/2}\left(\frac{\partial A}{\partial z}e^{\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}} + \frac{\partial B}{\partial z}e^{-\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}}\right) \\ +\frac{\imath\omega}{c(z)\epsilon^2}\eta^{-1/2}\left(Ae^{\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}} - Be^{-\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}}\right) \end{array} \right. = \frac{\imath\omega}{\kappa\epsilon^2}\eta^{1/2}\left(Ae^{\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}} - Be^{-\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}}\right) \end{array} \right.$$

On réarrange ensuite les termes:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial A}{\partial z}e^{\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}} - \frac{\partial B}{\partial z}e^{-\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}} = & \left(-\frac{\imath\omega}{c(z)\epsilon^2} + \frac{\imath\omega\rho}{\eta\epsilon^2}\right)\left(Ae^{\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}} + Be^{-\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}}\right) \\ & -\eta^{-1/2}\frac{\partial \eta^{1/2}}{\partial z}\left(Ae^{\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}} - Be^{-\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}}\right) \\ \frac{\partial A}{\partial z}e^{\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}} + \frac{\partial B}{\partial z}e^{-\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}} = & \left(-\frac{\imath\omega}{c(z)\epsilon^2} + \frac{\imath\omega\eta}{\kappa\epsilon^2}\right)\left(Ae^{\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}} - Be^{-\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}}\right) \\ & -\eta^{+1/2}\frac{\partial \eta^{-1/2}}{\partial z}\left(Ae^{\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}} + Be^{-\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}}\right) \end{array} \right.$$

On utilise alors $\frac{\rho}{\eta} = \frac{\eta}{\kappa} = \frac{1}{c(z)}$ et $\frac{f'}{f} = -f(f^{-1})' = \ln(f)'$, on fait la demi-somme et la demi-différence et on obtient finalement:

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(\ln \eta^{1/2}(z)) e^{-2\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}} B \\ \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(\ln \eta^{1/2}(z)) e^{2\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}} A \end{cases}$$

Supposons que le milieu aléatoire soit compris entre $-L$ et 0, L étant arbitraire, les conditions aux limites de ce système différentiel sont:

$$\begin{cases} A(-L,\omega) = 0 \text{ (il n'y a pas d'onde montante)} \\ B(0,\omega) = \frac{\epsilon}{2\eta^{1/2}(0)} \hat{f}(\omega) \end{cases}$$

La quantité intéressante est la pression transmise par le milieu aléatoire $p(-L,t)$. On peut représenter $p(-L,t)$ par:

$$p(-L,t) = \frac{1}{2\pi\epsilon^2} \int \hat{p}(-L,\omega) e^{-\frac{\imath\omega t}{\epsilon^2}} d\omega$$

La méthode consiste maintenant à considérer $\hat{p}(-L,\omega)$ comme la valeur en 0 d'un processus vérifiant une équation différentielle ordinaire et auquel on pourra appliquer les techniques d'approximation-diffusion. On introduit donc les quantités suivantes:

$$\begin{cases} \Gamma(z,\omega) = \frac{A(z,\omega)}{B(z,\omega)} \\ Z(z,\omega) = \frac{\hat{p}(-L,\omega)}{B(z,\omega)} \end{cases}$$

Alors $\hat{p}(-L,\omega)$ est donné par $\hat{p}(-L,\omega) = \frac{\epsilon}{2\eta^{1/2}(0)} \hat{f}(\omega) Z(0,\omega)$ et Z vérifie le système suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial z}(z,\omega) = -\frac{\partial}{\partial z}(\ln \eta^{1/2}(z)) e^{-2\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}} \Gamma Z \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial z}(z,\omega) = \frac{\partial}{\partial z}(\ln \eta^{1/2}(z)) (e^{-2\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}} - \Gamma^2 e^{2\frac{\imath\omega\tau(z)}{\epsilon^2}}) \end{cases}$$

avec les conditions initiales $\Gamma(-L) = 0$ et $Z(-L) = -\eta^{1/2}(-L) e^{-\frac{\imath\omega\tau(-L)}{\epsilon^2}}$ d'où finalement:

$$p(-L,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon\eta_1^{1/2}} \int \hat{f}(\omega) Z(0,\omega) e^{-\frac{\imath\omega t}{\epsilon^2}} d\omega$$

On note avec l'indice 1 les valeurs des fonctions de z prises en 0 (toutes ces quantités étant supposées continues). Remarquons que dans cette expression L est une variable qui intervient via la condition initiale du système différentiel vérifié par Z.

Pour obtenir l'expression de $p(\xi(\tau),t)$, il suffit d'effectuer un changement de variable. On pose alors:

$$\begin{cases} \tilde{\Gamma}(\sigma,\omega) = \Gamma(\xi(\sigma),\omega) \\ \tilde{Z}(\sigma,\omega) = Z(\xi(\sigma),\omega) \quad \text{pour } -\tau \leq \sigma \leq 0 \\ \tilde{\eta}(\sigma) = \eta(\xi(\sigma)) \end{cases}$$

Donc, finalement, la représentation intégrale que l'on obtient pour $p(\xi(\tau),t)$ est:

$$p(\xi(\tau),t) = \frac{1}{4\pi\epsilon\eta_1^{1/2}} \int \hat{f}(\omega) \tilde{Z}(0,\omega) e^{-\frac{\imath\omega t}{\epsilon^2}} d\omega$$

avec:

$$\begin{cases} \tilde{\Gamma}(-\tau,\omega) = 0 \\ \tilde{Z}(-\tau,\omega) = -\tilde{\eta}^{1/2}(-\tau)e^{\frac{\imath\omega\tau}{\epsilon^2}} \end{cases}$$

Le nouveau système différentiel vérifié par les processus intermédiaires introduits est:

$$\begin{cases} \frac{\partial\tilde{\Gamma}(\sigma,\omega)}{\partial\sigma} = \frac{d\xi}{d\sigma}\frac{\partial\Gamma(z,\omega)}{\partial z}|_{z=\xi(\sigma)} \\ \frac{\partial\tilde{Z}(\sigma,\omega)}{\partial\sigma} = \frac{d\xi}{d\sigma}\frac{\partial Z(z,\omega)}{\partial z}|_{z=\xi(\sigma)} \\ \frac{d\xi}{d\sigma} = c(\xi(\sigma)) \end{cases}$$

Il s'agit maintenant de passer à la limite dans ce système pour obtenir une expression plus explicite de $p(\xi(\tau),t)$; en fait les deux premiers moments vont suffire pour interprêter la forme du front d'onde.

2.2 Passage à la limite

Nous allons effectuer un développement limité en ϵ du système différentiel précédent de manière à pouvoir utiliser un théorème d'approximation-diffusion. Dans toute la suite on supposera que ν est deux fois dérivable à dérivées bornées pour que les développements limités soient uniformes. On a:

$$\ln\eta^{1/2}(z) = \frac{1}{4}\ln\rho_1\kappa_1 - \frac{1}{4}\ln(1+\nu(\frac{z}{\epsilon^2}))$$

d'où:

$$\frac{d}{dz}\ln\eta^{1/2}(z) = -\frac{1}{4\epsilon}\dot{\nu}(\frac{z}{\epsilon^2}) - \frac{1}{4}\nu\dot{\nu}(\frac{z}{\epsilon^2}) + O(\epsilon)$$

et

$$c(z) = c_1\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\nu(\frac{z}{\epsilon^2}) + \frac{3\epsilon^2}{8}\nu^2(\frac{z}{\epsilon^2})\right) + O(\epsilon^3)$$

Le système différentiel s'écrit alors:

$$\begin{cases} \frac{\partial\tilde{\Gamma}(\sigma,\omega)}{\partial\sigma} = & -\left(\frac{c_1}{4\epsilon}\dot{\nu}(\frac{\xi(\sigma)}{\epsilon^2}) - \frac{3c_1}{8}\nu\dot{\nu}(\frac{\xi(\sigma)}{\epsilon^2})\right)\left(e^{-2\frac{\imath\omega\sigma}{\epsilon^2}} - \tilde{\Gamma}(\sigma,\omega)^2 e^{2\frac{\imath\omega\sigma}{\epsilon^2}}\right) \\ & + \left(1+\tilde{\Gamma}(\sigma,\omega)^2\right)O(\epsilon) \\ \frac{\partial\tilde{Z}(\sigma,\omega)}{\partial\sigma} = & \left(\frac{c_1}{4\epsilon}\dot{\nu}(\frac{\xi(\sigma)}{\epsilon^2}) - \frac{3c_1}{8}\nu\dot{\nu}(\frac{\xi(\sigma)}{\epsilon^2})\right)e^{2\frac{\imath\omega\sigma}{\epsilon^2}}\tilde{Z}(\sigma,\omega)\tilde{\Gamma}(\sigma,\omega) \\ & + \tilde{Z}(\sigma,\omega)\tilde{\Gamma}(\sigma,\omega)O(\epsilon) \\ \frac{d\xi}{d\sigma} = & c_1\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\nu(\frac{z}{\epsilon^2}) + \frac{3\epsilon^2}{8}\nu^2(\frac{z}{\epsilon^2})\right) + O(\epsilon^3) \end{cases}$$

Posons:

$$\begin{cases} \lambda(\sigma) = \frac{\xi(\sigma)-c_1\sigma}{c_1\epsilon^2} \\ \mu(z) = -\frac{c_1}{4}\dot{\nu}(c_1 z) \\ q(z) = -\frac{3c_1}{8}\nu\dot{\nu}(c_1 z) \\ r(z) = -\frac{1}{2}\nu(c_1 z) \\ s(z) = \frac{3}{8}\nu^2(c_1 z) \end{cases}$$

On a:

$$\left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial\tilde{\Gamma}(\sigma,\omega)}{\partial\sigma} = & \left(\frac{1}{\epsilon}\mu(\lambda+\frac{\sigma}{\epsilon^2})+q(\lambda+\frac{\sigma}{\epsilon^2})\right)\left(e^{-2\frac{i\omega\sigma}{\epsilon^2}}-\tilde{\Gamma}(\sigma,\omega)^2e^{2\frac{i\omega\sigma}{\epsilon^2}}\right) \\ & +\left(1+\tilde{\Gamma}(\sigma,\omega)^2\right)O(\epsilon) \\ \frac{\partial\tilde{Z}(\sigma,\omega)}{\partial\sigma} = & -\left(\frac{1}{\epsilon}\mu(\lambda+\frac{\sigma}{\epsilon^2})+q(\lambda+\frac{\sigma}{\epsilon^2})\right)e^{2\frac{i\omega\sigma}{\epsilon^2}}\tilde{Z}(\sigma,\omega)\tilde{\Gamma}(\sigma,\omega) \\ & +\tilde{Z}(\sigma,\omega)\tilde{\Gamma}(\sigma,\omega)O(\epsilon) \\ \frac{d\lambda}{d\sigma} = & \frac{1}{\epsilon}r(\lambda+\frac{\sigma}{\epsilon^2})+s(\lambda+\frac{\sigma}{\epsilon^2})+O(\epsilon) \end{array}\right.$$

En considérant la fréquence ω comme un paramètre, ce système entre dans le cadre général des équations de la forme:

$$\frac{dX_t^\epsilon}{dt} = \frac{1}{\epsilon}F(X_t^\epsilon,\frac{t}{\epsilon^2})+G(X_t^\epsilon,\frac{t}{\epsilon^2},\epsilon)$$

où X_t^ϵ est un vecteur réel, F et G sont des champs aléatoires possédant des propriétés d'ergodicité (F étant centré) et où $\lim_{\epsilon\to 0}G(x,t,\epsilon)$ existe. Pour de tels systèmes, il existe des théorèmes d'approximation-diffusion, i.e. on peut prouver la convergence en loi de X_t^ϵ vers une diffusion. Dans le cas présent nous démontrerons que la diffusion limite a pour générateur infinitésimal:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{L}f(X) = & \int_0^\infty(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\mathbb{E}(F(X,v).\nabla_X(F(X,u+v).\nabla_Xf(X)))dv)du \\ & +\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\mathbb{E}(G(X,v,0).\nabla_Xf(X)dv \end{array}$$

Pour pouvoir appliquer le théorème il suffit que le processus ν soit de classe C_b^2, centré, stationnaire et qu'il possède la propriété de mixing avec un coefficient suffisamment décroissant à l'infini (nous reviendrons dans la démonstration sur le sens qu'il faut donner à cette propriété).

Dans un premier temps, si on se contente d'étudier le premier moment de $p(\xi(\sigma),t)$ il est inutile de calculer entièrement le générateur puisque seule la dérive de $\tilde{Z}(\sigma,\omega)$ intervient dans l'espérance. Le calcul est alors grandement simplifié. Les quantités étudiées étant complexes, il faudrait a priori considérer parties réelles et imaginaires mais comme F et G sont holomorphes en chacune de leurs composantes on peut, comme nous le verrons plus loin, appliquer directement la formule ci-dessus. De plus F et G sont périodiques et même circulaires en "temps" (le rôle du temps est ici joué par σ) donc la plupart des intégrales limites se réduisent à des intégrations sur une période. En particulier $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\mathbb{E}(G(X,v,0).\nabla_Xf(X)dv$ n'intervient pas et il reste à calculer $\int_0^\infty(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\mathbb{E}(F(X,v).\nabla_X(F(X,u+!v).\nabla_Xf(X)))dv)du$.

On se contente de plus de calculer le coefficient a_Z de $\frac{\partial f}{\partial\tilde{Z}}$ dans cette expression. Il

vient alors:

$$
\begin{aligned}
a_Z &= \int_0^\infty \lim_{T\to\infty} \tfrac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}
\begin{bmatrix}
\mu(\lambda+v)\left(e^{-2\imath\omega v}-\tilde\Gamma(\sigma,\omega)^2 e^{2\imath\omega v}\right)\\
-\mu(\lambda+v)e^{2\imath\omega v}\tilde\Gamma(\sigma,\omega)\tilde Z(\sigma,\omega)\\
r(\lambda+v)
\end{bmatrix}\cdot\\
&\qquad
\begin{bmatrix}
\frac{\partial}{\partial\tilde\Gamma}\left(-\mu(\lambda+u+v)e^{2\imath\omega(u+v)}\tilde\Gamma(\sigma,\omega)\tilde Z(\sigma,\omega)\right)\\
\frac{\partial}{\partial\tilde Z}\left(-\mu(\lambda+u+v)e^{2\imath\omega(u+v)}\tilde\Gamma(\sigma,\omega)\tilde Z(\sigma,\omega)\right)\\
\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(-\mu(\lambda+u+v)e^{2\imath\omega(u+v)}\tilde\Gamma(\sigma,\omega)\tilde Z(\sigma,\omega)\right)
\end{bmatrix} du dv\\
&= \int_0^\infty \lim_{T\to\infty} \tfrac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}
\begin{cases}
-\mu(\lambda+v)\mu(\lambda+u+v)\left(e^{2\imath\omega u}-\tilde\Gamma(\sigma,\omega)^2 e^{\imath\omega(3v+2u)}\right)\tilde Z(\sigma,\omega)\\
+\mu(\lambda+v)\mu(\lambda+u+v)e^{\imath\omega(3v+2u)}\tilde\Gamma(\sigma,\omega)^2\tilde Z(\sigma,\omega)\\
-r(\lambda+v)\dot\mu(\lambda+u+v)e^{2\imath\omega(u+v)}\tilde\Gamma(\sigma,\omega)\tilde Z(\sigma,\omega)
\end{cases} du dv\\
&= -\int_0^\infty \tfrac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbb{E}\mu(0)\mu(u)\tilde Z(\sigma,\omega)e^{2\imath\omega u} du dv\\
&= -\int_0^\infty \mathbb{E}\mu(0)\mu(u)\tilde Z(\sigma,\omega)e^{2\imath\omega u} du
\end{aligned}
$$

Ce sont la stationnarité de ν ainsi que la nullité de $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_o^T e^{2\imath\omega v}dv$ qui simplifient considérablement cette expression. Finalement le premier moment de $\tilde Z(\sigma,\omega)$ vérifie l'équation suivante pour ϵ petit:

$$
\begin{cases}
d\mathbb{E}\tilde Z(\sigma,\omega) = -\left(\int_0^\infty \mathbb{E}(\mu(0)\mu(u))e^{2\imath\omega u}du\right)\mathbb{E}\tilde Z(\sigma,\omega)d\sigma\\
\mathbb{E}\tilde Z(-\tau,\omega) = \eta_1^{1/2} e^{\frac{\imath\omega\tau}{\epsilon^2}}
\end{cases}
$$

(en toute rigueur il faut, pour appliquer le théorème d'approximation-diffusion, que la suite des lois initiales, prises ici à l'instant $-\tau$, soit tendue, on est alors amené à considérer le processus $e^{\frac{-\imath\omega\tau}{\epsilon^2}}\tilde Z(\sigma,\omega)$ plutôt que $\tilde Z(\sigma,\omega)$ mais le résultat est identique).

On peut ensuite simplifier cette expression grâce à des intégrations par parties:

$$
\begin{aligned}
-\int_0^{+\infty}\mathbb{E}\mu(0)\mu(u)e^{2\imath\omega u}du &= -\tfrac{c_1}{16}\int_0^{+\infty}\mathbb{E}\dot\nu(0)\dot\nu(t)e^{\frac{2\imath\omega t}{c_1}}dt\\
&= -\tfrac{c_1}{16}\left[\mathbb{E}\dot\nu(0)\nu(t)e^{\frac{2\imath\omega t}{c_1}}\right]_0^\infty + \tfrac{\imath\omega}{8}\int_0^\infty \mathbb{E}\dot\nu(0)\nu(t)e^{\frac{2\imath\omega t}{c_1}}dt
\end{aligned}
$$

ν étant stationnaire centré mixing:

$$
2\mathbb{E}\dot\nu(0)\nu(0) = \frac{d}{dt}\mathbb{E}\nu^2(t)_{|t=0} = 0
$$

et

$$
\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\dot\nu(0)\nu(t) = 0
$$

d'où:

$$
\begin{aligned}
-\int_0^\infty \mathbb{E}\mu(0)\mu(u)e^{2\imath\omega u}du &= -\tfrac{\imath\omega}{8}[\mathbb{E}\nu(0)\nu(t)e^{\frac{2\imath\omega t}{c_1}}] - \int_0^\infty -\tfrac{\omega^2}{4c_1}\int_0^\infty \mathbb{E}\nu(0)\nu(t)e^{\frac{2\imath\omega t}{c_1}}dt\\
&= \tfrac{\imath\omega R(0)}{8} - \omega^2(\alpha_R+\imath\alpha_I)
\end{aligned}
$$

avec:

$$
\begin{cases}
R(t) = \mathbb{E}\nu(0)\nu(t)\\
\alpha_R = \frac{1}{c_1}\int_0^\infty R(s)\cos\frac{2\omega s}{c_1}ds\\
\alpha_I = \frac{1}{c_1}\int_0^\infty R(s)\sin\frac{2\omega s}{c_1}ds
\end{cases}
$$

On intègre alors l'équation pour obtenir:

$$\mathbb{E}\tilde{Z}(0,\omega) = \eta_1^{1/2} e^{\frac{\imath\omega\tau}{\epsilon^2} + \frac{\imath\omega R(0)}{8}\tau - \omega^2(\alpha_R + \imath\alpha_I)\tau}$$

et

$$\mathbb{E}p(\xi(\tau),t) \sim \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{\frac{\imath\omega(\tau-t)}{\epsilon^2}} e^{\frac{\imath\omega R(0)}{8}\tau} e^{-\omega^2(\alpha_R+\imath\alpha_I)\tau} d\omega$$

Cette expression est un équivalent pour ϵ petit, licite pour $\tau < t$. Les termes $e^{\frac{\imath\omega R(0)}{8}\tau}$ et $e^{-\omega^2(\alpha_R+\imath\alpha_I)\tau}$ s'interprètent respectivement comme un retard et comme une convolution par une gaussienne pouvu que α_R et α_I varient peu sur le support de $\hat{f}$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}$ puisque f est à support compact. La forme du front de l'onde est en fait donnée par cette formule car on peut montrer que les fluctuations de $p(\xi(\tau),t)$ sont négligeables i.e. $\mathbb{E}p(\xi(\tau),t)^2 \sim (\mathbb{E}p(\xi(\tau),t))^2$.

Pour calculer $\mathbb{E}p(\xi(\tau),t)^2$, il faut reprendre l'approximation-diffusion pour deux fréquences ω_1 et ω_2 distinctes.

$$\mathbb{E}p(\xi(\tau),t)^2 = \frac{1}{16\pi\eta_1\epsilon^2}\int\int \hat{f}(\omega_1)\hat{f}(\omega_2)\mathbb{E}(\tilde{Z}(0,\omega_1)(\tilde{Z}(0,\omega_2))e^{\frac{-\imath(\omega_1+\omega_2)t}{\epsilon^2}} d\omega_1 d\omega_2$$

Or, en faisant le calcul du générateur limite de la diffusion, on s'aperçoit que tous les termes couplant deux fréquences distinctes disparaissent à cause de la moyennisation et, à la limite, $\tilde{Z}(\sigma,\omega_1)et(\tilde{Z}(\sigma,\omega_2)$ sont indépendants. D'où:

$$\begin{cases} \mathbb{E}\tilde{Z}(0,\omega_1) = \eta_1^{1/2} e^{\frac{\imath\omega_1\tau}{\epsilon^2} + \frac{\imath\omega_1 R(0)}{8}\tau - \omega_1^2(\alpha_R(\omega_1)+\imath\alpha_I(\omega_1))\tau} \\ \mathbb{E}\tilde{Z}(0,\omega_2) = \eta_1^{1/2} e^{\frac{\imath\omega_2\tau}{\epsilon^2} + \frac{\imath\omega_2 R(0)}{8}\tau - \omega_2^2(\alpha_R(\omega_2)+\imath\alpha_I(\omega_2))\tau} \end{cases}$$

Donc pour $\mathbb{E}p(\xi(\tau),t)^2$ comme pour $(\mathbb{E}p(\xi(\tau),t))^2$ on trouve la même expression:

$$\begin{aligned}(\mathbb{E}(p(\xi(\tau),t)^2) \sim \quad & \frac{1}{16\pi^2\epsilon^2}\int\int \hat{f}(\omega_1)\hat{f}(\omega_2) e^{\frac{\imath(\omega_1+\omega_2)(\tau-t)}{\epsilon^2}} e^{\frac{\imath(\omega_1+\omega_2)R(0)\tau}{8}} \\ & e^{-\omega_1^2(\alpha_R(\omega_1)+\imath\alpha_I(\omega_1))\tau} e^{-\omega_2^2(\alpha_R(\omega_2)+\imath\alpha_I(\omega_2))\tau} d\omega_1 d\omega_2\end{aligned}$$

On fait alors le changement de variable $\omega = \omega_1 + \omega_2$ et $\omega' = \omega_1$, on remarque que α_R est paire tandis que α_I est impaire puis on utilise le lemme suivant:

$$\forall F \in L^2(\mathbb{R}^2) \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\int\int F(x,y)e^{\lambda\imath xy}dxdy = 2\pi F(0,0)$$

On en déduit que, au sens des distributions,:

$$\mathbb{E}p(\xi(\tau),t)^2 \sim \frac{\delta(t-\tau)}{8\pi}\int |\hat{f}(\omega)|^2 e^{-2\omega\alpha_R(\omega)\tau} d\omega$$

3 VITESSE MOYENNE

La propriété $\mathbb{E}p(\xi(\tau),t)^2 \sim (\mathbb{E}p(\xi(\tau),t))^2$ n'est plus vraie si on observe la pression transmise en se déplaçant non plus á la vitesse aléatoire de l'onde acoustique mais á la vitesse moyenne de l'onde. On reprend point par point l'étude précédente en faisant intervenir les quantités moyennes.

3.1 Représentation intégrale

On introduit les ondes montantes et descendantes:

$$\begin{cases} \hat{p} = \eta^{1/2}(Ae^{\frac{\imath\omega z}{c_1\epsilon^2}} - Be^{-\frac{\imath\omega z}{c_1\epsilon^2}}) \\ \hat{u} = \eta^{-1/2}(Ae^{\frac{\imath\omega z}{c_1\epsilon^2}} + Be^{-\frac{\imath\omega z}{c_1\epsilon^2}}) \end{cases}$$

Leurs dérivées sont:

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\imath\omega}{\epsilon c_1}\nu(\frac{z}{\epsilon^2})\left[A - e^{-2\frac{\imath\omega z}{c_1\epsilon^2}}B\right] \\ \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\imath\omega}{\epsilon c_1}\nu(\frac{z}{\epsilon^2})\left[Ae^{2\frac{\imath\omega z}{c_1\epsilon^2}} - B\right] \end{cases}$$

Les conditions initiales sont les mêmes qu'auparavant. On introduit encore

$$\begin{cases} \Gamma(z,\omega) = \frac{A(z,\omega)}{B(z,\omega)} \\ Z(z,\omega) = \frac{\hat{p}(-L,\omega)}{B(z,\omega)} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \tilde{\Gamma}(\sigma,\omega) = \Gamma(c_1\sigma,\omega) \\ \tilde{Z}(\sigma,\omega) = Z(c_1\sigma,\omega) \quad \text{pour } -\tau \le \sigma \le 0 \end{cases}$$

On s'intéresse à la quantité $p(c_1\sigma,t)$ dont on obtient la représentation intégrale suivante:

$$p(c_1\tau,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon\eta_1^{1/2}}\int \hat{f}(\omega)\tilde{Z}(0,\omega)e^{-\frac{\imath\omega t}{\epsilon^2}}d\omega$$

avec:

$$\begin{cases} \tilde{\Gamma}(-\tau,\omega) = 0 \\ \tilde{Z}(-\tau,\omega) = -\tilde{\eta}^{1/2}(-\tau)e^{\frac{\imath\omega\tau}{\epsilon^2}} \end{cases}$$

$\tilde{Z}(\sigma,\omega)$ et $\tilde{\Gamma}(\sigma,\omega)$ sont solution du systéme différentiel suivant (il n'y a pas besoin d'effectuer un développement limité):

$$\begin{cases} \frac{\partial\tilde{\Gamma}(\sigma,\omega)}{\partial\sigma} = & -\frac{\imath\omega}{\epsilon}\nu(\frac{c_1\sigma}{\epsilon^2})\left(e^{-2\frac{\imath\omega\sigma}{\epsilon^2}} - 2\tilde{\Gamma}(\sigma,\omega) + \tilde{\Gamma}(\sigma,\omega)^2e^{2\frac{\imath\omega\sigma}{\epsilon^2}}\right) \\ \frac{\partial\tilde{Z}(\sigma,\omega)}{\partial\sigma} = & -\frac{\imath\omega}{\epsilon}\nu(\frac{c_1\sigma}{\epsilon^2})\left(e^{2\frac{\imath\omega\sigma}{\epsilon^2}}\tilde{\Gamma}(\sigma,\omega)\tilde{Z}(\sigma,\omega) - \tilde{Z}(\sigma,\omega)\right) \end{cases}$$

3.2 Passage à la limite

Commençons par ne considérer qu'une seule fréquence. Le calcul est similaire à celui effectué dans le cas de la vitesse aléatoire. En particulier on n'a pas besoin de séparer parties réelle et imaginaire puisqu'on ne calcule que le terme de dérive a_Z.

$$\begin{aligned} a_Z &= -\omega^2\int_0^\infty \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}\begin{bmatrix} \nu(c_1v)\left(e^{-2\imath\omega v} - 2\tilde{\Gamma}(\sigma,\omega) + \tilde{\Gamma}(\sigma,\omega)^2e^{2\imath\omega v}\right) \\ \nu(c_1v)\left(e^{2\imath\omega v}\tilde{\Gamma}(\sigma,\omega)\tilde{Z}(\sigma,\omega) - \tilde{Z}(\sigma,\omega)\right) \\ \frac{\partial}{\partial\tilde{\Gamma}}\nu(c_1(u+v))\left(e^{2\imath\omega(u+v)}\tilde{\Gamma}(\sigma,\omega)\tilde{Z}(\sigma,\omega) - \tilde{Z}(\sigma,\omega)\right) \\ \frac{\partial}{\partial\tilde{Z}}\nu(c_1(u+v))\left(e^{2\imath\omega(u+v)}\tilde{\Gamma}(\sigma,\omega)\tilde{Z}(\sigma,\omega) - \tilde{Z}(\sigma,\omega)\right) \end{bmatrix} dudv \\ &= -\frac{\omega^2}{c_1}\int_0^\infty \mathbb{E}\nu(o)\nu(u)\left(1 + e^{\frac{2\imath\omega u}{c_1}}\right)du\tilde{Z}(\sigma,\omega) \end{aligned}$$

On obtient donc en intégrant:

$$\mathbb{E}\hat{Z}(0,\omega) = \eta_1^{1/2} e^{\frac{\imath\omega\tau}{\epsilon^2} - c_1\omega^2(\delta+\alpha_R+\imath\alpha_I)\tau}$$

on a posé:

$$\begin{cases} R(t) = \mathbb{E}\nu(0)\nu(t) \\ \delta = \frac{1}{c_1}\int_0^\infty R(s)ds \\ \alpha_R = \frac{1}{c_1}\int_0^\infty R(s)\cos\frac{2\omega s}{c_1}ds \\ \alpha_I = \frac{1}{c_1}\int_0^\infty R(s)\sin\frac{2\omega s}{c_1}ds \\ \alpha = \frac{1}{c_1}\int_0^\infty R(s)e^{\frac{2\omega s}{c_1}}ds = \alpha_R + \imath\alpha_I \end{cases}$$

L'équivalent $p(c_1\tau,t)$ pour ϵ petit est alors:

$$\mathbb{E}p(c_1\tau,t) \sim \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{\frac{\imath\omega(\tau-t)}{\epsilon^2}}e^{-\omega^2(\delta+\alpha)\tau}d\omega$$

En élevant au carré et en prenant la limite on obtient donc une expression similaire à celle trouvée dans le cas de la vitesse aléatoire:

$$(\mathbb{E}p(c_1\tau,t))^2 \sim \frac{\delta(t-\tau)}{8\pi}\int |\hat{f}(\omega)|^2 e^{-2\omega(\delta+\alpha_R(\omega))\tau}d\omega$$

Pour calculer $\mathbb{E}p(c_1\tau,t)^2$ il faut étudier l'approximation-diffusion d'un vecteur $(Z_1,\Gamma_1,Z_2,\Gamma_2)$ dans $\mathbb{C}^4$ correspondant à deux fréquences distinctes ω_1 et ω_2. Contrairement à ce qui se passait auparavant les termes ne se découplent pas à la limite parce qu'il y a des coefficients sans phase qui interviennent. Il faut donc séparer parties réelle et imaginaire pour calculer la matrice de diffusion. Le calcul est en fait assez simple parce que Γ_1 et Γ_2 sont absents de la matrice de diffusion du vecteur (Z_1,Z_2) (on sait déjà qu'ils sont absents de la dérive). Posons $Z_1 = x_1 + \imath y_1$ et $Z_2 = x_2 + \imath y_2$. Nous devons calculer l'action du générateur de la diffusion limite sur une fonction $f(x_1,y_1,x_2,y_2)$. Calculons par exemple le coefficient $a(x_1,y_2)$ de $\frac{\partial f}{\partial x_1\partial x_2}$

$$\begin{aligned} a(x_1,y_2) &= 2\int_0^\infty \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_o^T \mathbb{E}\Re\left[-\imath\omega_1\nu(c_1t)\left(\Gamma_1 Z_1 e^{2\imath\omega_1 t} - Z_1\right)\right]. \\ &\quad \Im\left[-\imath\omega_1\nu(c_1(t+s))\left(\Gamma_2 Z_2 e^{2\imath\omega_2(t+s)} - Z_2\right)\right]dtds \\ &= 2\int_0^\infty \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_o^T \mathbb{E}\Re\left[-\imath\omega_1\nu(c_1t)Z_1\right]\Im\left[-\imath\omega_1\nu(c_1(t+s))Z_2\right]dtds \\ &= 2\omega_1\omega_2\delta\Re(\imath Z_1)\Im(\imath Z_2) \\ &= -2\omega_1\omega_2\delta y_1 x_2 \end{aligned}$$

Les autres coefficients sont du même type et on trouve finalement que la matrice de diffusion s'écrit:

$$A(x_1,y_1,x_2,y_2) = \delta\begin{pmatrix} \omega_1^2y_1^2 & -\omega_1^2y_1x_1 & \omega_1\omega_2y_1y_2 & -\omega_1\omega_2y_1x_2 \\ -\omega_1^2y_1x_1 & \omega_1^2x_1^2 & -\omega_1\omega_2y_2x_1 & \omega_1\omega_2x_1x_2 \\ \omega_1\omega_2y_1y_2 & -\omega_1\omega_2y_2x_1 & \omega_2^2y_2^2 & -\omega_2^2y_2x_2 \\ -\omega_1\omega_2y_1x_2 & \omega_1\omega_2x_1x_2 & -\omega_2^2y_2x_2 & \omega_2^2x_2^2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice se décompose sous la forme:

$$A = \delta \begin{bmatrix} -\omega_1 y_1 \\ \omega_1 x_1 \\ -\omega_2 y_2 \\ \omega_1 x_1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -\omega_1 y_1 & \omega_1 x_1 & -\omega_2 y_2 & \omega_1 x_1 \end{bmatrix}$$

Donc $Z(\sigma,\omega_1)$ et $Z(\sigma,\omega_2)$ vérifient l'équation différentielle stochastique suivante:

$$d\begin{pmatrix} x_1(\sigma) \\ y_1(\sigma) \\ x_2(\sigma) \\ y_2(\sigma) \end{pmatrix} = \sqrt{\delta}\begin{pmatrix} -\omega_1 y_1(\sigma) \\ \omega_1 x_1(\sigma) \\ -\omega_2 y_2(\sigma) \\ \omega_2 x_2(\sigma) \end{pmatrix} dW_\sigma - \begin{pmatrix} \omega_1^2(\delta+\alpha_1)x_1(\sigma) \\ \omega_1^2(\delta+\alpha_1)y_1(\sigma) \\ \omega_2^2(\delta+\alpha_2)x_2(\sigma) \\ \omega_2^2(\delta+\alpha_2)y_2(\sigma) \end{pmatrix} d\sigma$$

Soit encore:

$$d\begin{pmatrix} Z(\sigma,\omega_1) \\ Z(\sigma,\omega_2) \end{pmatrix} = \imath\sqrt{\delta}\begin{pmatrix} \omega_1 Z(\sigma,\omega_1) \\ \omega_2 Z(\sigma,\omega_2) \end{pmatrix} dW_\sigma - \begin{pmatrix} \omega_1^2(\delta+\alpha_1)Z(\sigma,\omega_1) \\ \omega_2^2(\delta+\alpha_2)Z(\sigma,\omega_2) \end{pmatrix} d\sigma$$

où W_σ est un brownien réel. On intègre cette équation grâce à la formule d'Itô:

$$\begin{cases} Z(\sigma,\omega_1) = & Z(0,\omega_1)\exp\left(-\omega_1^2(\alpha_1+\frac{\delta}{2})\sigma + \imath\sqrt{\delta}\omega_1 W_\sigma\right) \\ Z(\sigma,\omega_2) = & Z(0,\omega_2)\exp\left(-\omega_2^2(\alpha_2+\frac{\delta}{2})\sigma + \imath\sqrt{\delta}\omega_2 W_\sigma\right) \end{cases}$$

D'où:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Z(0,\omega_1)Z(0,\omega_2) &\sim \eta_1 e^{\imath\frac{\omega_1+\omega_2}{\epsilon^2}\tau} e^{\left(-\omega_1^2(\alpha_1+\frac{\delta}{2})-\omega_2^2(\alpha_2+\frac{\delta}{2})\right)\tau}\mathbb{E}e^{\imath\sqrt{\delta}(\omega_1+\omega_2)W_{-\tau}} \\ &\sim \eta_1 e^{\imath\frac{\omega_1+\omega_2}{\epsilon^2}\tau} e^{\left(-\omega_1^2(\alpha_1+\frac{\delta}{2})-\omega_2^2(\alpha_2+\frac{\delta}{2})+\delta\frac{(\omega_1+\omega_2)^2}{2}\right)\tau} \end{aligned}$$

On obtient donc:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}p(c_1\tau,t)^2 \sim\ & \tfrac{1}{16\pi\epsilon^2}\int\int \hat{f}(\omega_1)\hat{f}(\omega_2)e^{\imath\frac{\omega_1+\omega_2}{\epsilon^2}(\tau-t)}e^{-\omega_1^2(\alpha_R(\omega_1)+\imath\alpha_I(\omega_1))\tau}. \\ & e^{-\omega_2^2(\alpha_R(\omega_2)+\imath\alpha_I(\omega_2))\tau}e^{\delta\omega_1\omega_2\tau}d\omega_1 d\omega_2 \end{aligned}$$

Après changement de variable il vient:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}p(c_1\tau,t)^2 \sim\ & \tfrac{1}{16\pi\epsilon^2}\int\int \hat{f}(\omega)\hat{f}(\omega'-\omega)e^{\imath\frac{\omega'}{\epsilon^2}(\tau-t)}e^{-\omega^2(\alpha_R(\omega)+\imath\alpha_I(\omega))\tau}. \\ & e^{-(\omega'-\omega)^2(\alpha_R(\omega'-\omega)+\imath\alpha_I(\omega'-\omega))\tau}e^{\delta\omega(\omega'-\omega)\tau}d\omega d\omega' \end{aligned}$$

Et, à la limite, on trouve:

$$\mathbb{E}p(c_1\tau,t)^2 \sim \frac{\delta(t-\tau)}{8\pi}\int |\hat{f}(\omega)|^2 e^{-2\omega(\alpha_R+\frac{\delta}{2})(\omega)\tau}d\omega$$

Donc les fluctuations ne sont pas négligeables puisque $\mathbb{E}p(c_1\tau,t)^2$ n'est pas équivalent à $(\mathbb{E}p(c_1\tau,t))^2$.

4 APPROXIMATION-DIFFUSION ET MOYENNISATION

4.1 Introduction

Les problèmes de lois limites pour les solutions d'équations différentielles avec second membre aléatoire ont été étudiés par de nombreux auteurs. Après renormalisation du temps, ces problèmes admettent la formulation suivante: il s'agit de prouver la convergence en loi des solutions de systèmes différentiels que l'on écrit:

$$\begin{cases} \frac{dX_t^\epsilon}{dt} = \frac{1}{\epsilon}F(t, \frac{t}{\epsilon}, \frac{t}{\epsilon^2}, X_t^\epsilon, \epsilon) + G(t, \frac{t}{\epsilon}, \frac{t}{\epsilon^2}, X_t^\epsilon) \\ X_0^\epsilon = X_0 \end{cases}$$

Nous ne considérerons ici que le cas où le système est un système différentiel ordinaire ([10] et [7] traitent des problèmes faisant intervenir des intégrales stochastiques). $F(t, \tau, s, X)$ et $G(t, \tau, s, X)$ sont alors des champs aléatoires mesurables par rapport à une certaine filtration. Kohler-Papanicolaou [6] et Skorokhod [11] traitent le cas où ces champs ne dépendent que des deux variables $\frac{t}{\epsilon^2}$ et X et où, à t fixé, ce sont des fonctions déterministes de X; le premier fait des hypothèses assez restrictives quant à la croissance du champ et le deuxième utilise des hypothèses techniques difficiles à vérifier. Récemment, Lukacher-Merzbach [9] ont obtenu un résultat sous des hypothèses plus faibles. Un cas particulier important est celui où la source d'aléas est un processus extérieur au système, par exemple un processus de Markov ergodique, la méthode de la fonction perturb! ée permet alors de résoudre l On peut également résoudre ces problèmes en terme de convergence de flots stochastiques (cf Kunita [7]).

Dans le cas des diffusions turbulentes (à t fixé, $F(t, X)$ est aléatoire), le problème a été résolu par Kesten-Papanicolaou [5] lorsque le champ est stationnaire. Nous nous proposons ici de donner une démonstration de l'approximation-diffusion ainsi que de la moyennisation pour une diffusion turbulente dans le cas non stationnaire en nous inspirant de la méthode de Skorokhod. Nous n'avons pas cherché à affaiblir autant que possible les hypothèses, l'objectif recherché étant avant tout de pouvoir appliquer le théorème dans le cadre de la théorie d'O'Doherty-Anstey.

4.2 Théorème d'approximation-diffusion

Nous commençons par un cas particulier des systémes précédents mais qui contient toutes les difficultés. On s'intéresse donc à la convergence en loi des solutions du système différentiel ordinaire suivant:

$$\begin{cases} \frac{dX_t^\epsilon}{dt} = \frac{1}{\epsilon}F(\frac{t}{\epsilon^2}, X_t^\epsilon) \\ X_0^\epsilon = X_0 \end{cases}$$

vers une diffusion caractérisée par son générateur infinitésimal. Ici F est un champ aléatoire de $\mathbb{R}^+ x \mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, centré et possédant des propriétés d'ergodicité à préciser. Nous commençons par donner un critère général de convergence vers une diffusion:

Théorème 4.1
(Skorokhod): Soit $\mathcal{L}_t$ un opérateur défini sur un sous-espace $\mathcal{D}(\mathcal{L}_t)$ de fonctions continues de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ tel que le problème de martingale associé possède une unique solution ξ_t. Soit $(\xi_t^\epsilon)_{\epsilon>0}$ une suite de processus vérifiant:

- *ξ_0^ϵ converge en loi vers une variable aléatoire ξ_0*
- *Il existe un ensemble D de fonctions de $C_K^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ dense dans l'ensemble des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini tel que:*

$$\forall 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_{m+1} < t < t+h \leq T$$
$$\forall \phi_1, \ldots, \phi_m, \phi \in D$$
$$\exists (h_\epsilon)_{\epsilon>0} \text{ avec } 0 < h_\epsilon < h \text{ et } \lim_{\epsilon \to 0} h_\epsilon = 0 \text{ telle que}$$
$$\limsup_{\epsilon \to 0} \sup_{[t_{m+1}, T]} \frac{1}{h_\epsilon} \mathbb{E}\left(\phi_1(\xi_{t_1}^\epsilon) \ldots \phi_m(\xi_{t_m}^\epsilon)\left[\phi(\xi_{t+h_\epsilon}^\epsilon) - \phi(\xi_t^\epsilon) - h_\epsilon \mathcal{L}\phi(\xi_t^\epsilon)\right]\right) = 0$$

Alors la suite de processus $(\xi_t^\epsilon)_{\epsilon>0}$ converge en loi vers la loi solution du problème de martingale associé à $\mathcal{L}_t$ avec ξ_0 pour condition initiale

Nous définissons maintenant la propriété de mixing du champ $F(t,X)$ dont nous aurons besoin:

Soit la filtration $\mathcal{F}_s^t(M) = \sigma\{F(u,X), s \leq u \leq t, |X| \leq M\}$. On définit alors le coefficient de mixing par:

$$\rho(t,M) = \sup\left\{\mathbb{E}(XY), s>0, \begin{array}{l} Xv.a.\mathcal{F}_0^s(M)-\text{mesurable, centrée }, \|X\|_2 = 1 \\ Yv.a.\mathcal{F}_{t+s}^\infty(M)-\text{mesurable, centrée }, \|Y\|_2 = 1 \end{array}\right\}$$

Alors $F(t,X)$ possède la propriété de mixing si, pour tout M, $\rho(t,M)$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini.Grâce à ce coefficient on peut majorer la décorrélation de deux variables aléatoires. Si X est $\mathcal{F}_0^s(M)$-mesurable et Y est $\mathcal{F}_{t+s}^\infty(M)$-mesurable alors:

$$|\mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y| \leq 4\rho(t,M)\|X\|_2\|Y\|_2$$

Remarque 4.2
Ceci n'est qu'une des manières de définir la propriété de mixing, nous avons utilisé celle-ci parce qu'elle apparaîtra de manière naturelle dans la démonstration mais on aurait aussi bien pu utiliser, en modifiant légèrement la démonstration, le coefficient $r(t,M)$ défini par:

$$r(t,M) = \sup\{|P(AB) - P(A)P(B)|, s>0, A \in \mathcal{F}_0^s(M), B \in \mathcal{F}_{t+s}^\infty(M)\}$$

Ce coefficient est équivalent au précédent pour les champs gaussiens. Notons également que nous ne faisons pas d'hypothèses de stationnarité sur $F(t,X)$.

Nous précisons les hypothèses faites sur le champ $F(t,X)$:

- H_1:$F(t,X)$ est un champ aléatoire mesurable en t et en X. En tant que fonction de X , F est de classe C^2, bornée sur les compacts et à dérivées partielles bornées (on pourrait facilement affaiblir cette hypothèse en demandant que:

$$\sup_t \mathbb{E}\left(\sup_{X\in K}\|F(t,X)\|_2\right) < +\infty$$

  et des conditions similaires pour les dérivées). Notons que cette hypothèse assure l'existence et l'unicité de la solution du système différentiel.

- H_2:F est centré: $\forall (t,X)\in \mathbb{R}^+\mathrm{x}\mathbb{R}^d, \mathbb{E}F(t,X)=0$

- H_3:F possède la propriété de mixing avec un coefficient $\rho(t,M)$ vérifiant

$$\forall \alpha>0, \forall M>0, \lim_{T\to\infty}\rho(T,M)T^{\frac{d+1}{2}+\alpha}=0$$

- H_4: On fait l'hypothèse technique suivante qui, comme nous le verrons dans l'exemple d'application, est une conséquence du mixing pour les champs de la forme $F(t+V.X)$:

$$\begin{array}{l}
\forall K\, compact, \forall i,j,k,l\in\{1,\dots,d\},\\
\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\sup_{t>0}\mathbb{E}\sup_{X\in K}\left(\int_0^T\int_0^s F_i(v+t,X)F_j(s+t,X)dvds\right)^2<+\infty\\
\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\sup_{t>0}\mathbb{E}\sup_{X\in K}\left(\int_0^T\int_0^s F_i(v+t,X)\frac{\partial F_j}{\partial X_k}(s+t,X)dvds\right)^2<+\infty\\
\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\sup_{t>0}\mathbb{E}\sup_{X\in K}\left(\int_0^T\int_0^s F_i(v+t,X)\frac{\partial^2 F_j}{\partial X_k\partial X_l}(s+t,X)dvds\right)^2<+\infty\\
\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\sup_{t>0}\mathbb{E}\sup_{X\in K}\left(\int_0^T\int_0^s \frac{\partial F_i}{\partial X_l}(v+t,X)\frac{\partial F_j}{\partial X_k}(s+t,X)dvds\right)^2<+\infty
\end{array}$$

- H_5: Enfin on fait une hypothèse d'existence du générateur infinitésimal et d'unicité de la solution du problème de martingale associé;

  les limites:

$$\begin{cases}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\mathbb{E}F_j(u,X)\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(u+v,X)du\\ \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\mathbb{E}F_j(u,X)F_i(u+v,X)du\end{cases}$$

  existent uniformément en X sur les compacts. On définit alors les coefficients du générateur infinitésimal par:

$$\begin{cases}A_{ij}(X)=\int_0^\infty\left(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\mathbb{E}F_j(u,X)F_i(u+v,X)du\right)dv\\ b_j(X)=\sum_{i=1}^{i=d}\int_0^\infty\left(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\mathbb{E}F_j(u,X)\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(u+v,X)du\right)dv\end{cases}$$

On suppose que $A_{ij}(X)$ et $b_j(X)$ sont des fonctions bornées de X sur les compacts et que le problème de martingale associé au générateur infinitésimal:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}(A_{ij}+A_{ji})\frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j} + \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial X_j}$$

est bien posé (par exemple: la matrice $(A_{ij}+A_{ji})_{i,j\in\{1,\ldots,d}$ est hypoelliptique)

Théorème 4.3
Sous les hypothèses H_1 à H_5 la solution du systéme différentiel ordinaire:

$$\begin{cases} \frac{dX_t^\epsilon}{dt} = \frac{1}{\epsilon}F(\frac{t}{\epsilon^2}, X_t^\epsilon) \\ X_0^\epsilon = X_0 \end{cases}$$

converge en loi quand ϵ tend vers 0 vers la solution du problème de martingale associé au générateur défini en H_5.

4.2.1 Etude du processus tronqué

Nous commençons par étudier la convergence en loi d'une suite de processus tronqués. Soit:

$$\begin{array}{l} \Psi^M \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d, [0,1]) \\ \Psi^M(X) = 1 \text{ si } \|X\| \le M/2 \\ \Psi^M(X) = 0 \text{ si } \|X\| \ge M \end{array}$$

Soit $F^M(t,X) = F(t,X)\Psi^M(X)$ et soit $X_t^{\epsilon,M}$ la solution (unique) du système:

$$\begin{cases} \frac{dX_t^{\epsilon,M}}{dt} = \frac{1}{\epsilon}F(\frac{t}{\epsilon^2}, X_t^{\epsilon,M}) \\ X_0^{\epsilon,M} = X_0 \end{cases}$$

Il est clair que, lorsque M tend vers l'infini, à t fixé, $X_t^{\epsilon,M}$ tend vers X_t^ϵ. On notera $Q^{\epsilon,M}$ la suite des lois des processus $X_t^{\epsilon,M}$.

$$\begin{array}{l} \text{Soit } f \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \\ \text{Soient } 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_{m+1} < t \\ \text{Soient } \phi_1, \ldots, \phi_m, \phi \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \end{array}$$

Afin d'alléger les notations on omettra les indices ϵ et M et on écrira simplement X_t^ϵ pour $X_t^{\epsilon,M}$ et F pour F^M. On notera également $\Phi = \phi_1(X_{t_1}^{\epsilon,M}), \ldots, \phi_m(X_{t_m}^{\epsilon,M})$ et C représentera une constante quelconque indépendante de ϵ. On considère un h_ϵ (noté h) de la forme ϵ^α avec $\alpha \in]0,2[$ de manière à ce que $\frac{h}{\epsilon^2} \to \infty$. Un développement donne alors simplement:

$$\begin{aligned} f(X_{t+h}) - f(X_t) = \; & \frac{1}{\epsilon}\sum_i \frac{\partial}{\partial X_i} f(X_t) \int_t^{t+h} F_i(\tfrac{s}{\epsilon^2}, X_t) ds \\ & + \frac{1}{\epsilon^2}\sum_{i,j} \int_t^{t+h}\int_t^s F_j(\tfrac{v}{\epsilon^2}, X_t) \frac{\partial}{\partial X_j}\left[F_i(\tfrac{s}{\epsilon^2}, X_t)\frac{\partial}{\partial X_i} f(X_t)\right] dv ds \\ & + \frac{1}{\epsilon^3}\sum_{i,j,k} \int_t^{t+h}\int_t^s\int_t^v F_k(\tfrac{u}{\epsilon^2}, X_u). \\ & \frac{\partial}{\partial X_k}\left\{F_j(\tfrac{v}{\epsilon^2}, X_u)\frac{\partial}{\partial X_j}\left[F_i(\tfrac{s}{\epsilon^2}, X_u)\frac{\partial}{\partial X_i} f(X_u)\right]\right\} du dv ds \end{aligned}$$

Notons respectivement Δ_1, Δ_2 et Δ_3 les trois termes de cette somme. On va montrer que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\mathbb{E}(\frac{\Phi\Delta_1}{h})+\mathbb{E}(\frac{\Phi(\Delta_2-h\mathcal{L}f(X_t))}{h})+\mathbb{E}(\frac{\Phi\Delta_3}{h})\right)=0$$

ce qui identifiera $\mathcal{L}$ comme le générateur de la diffusion limite d'une sous-suite convergente de $X_t^{\epsilon,M}$.

Etude de Δ_3: $\lim_{\epsilon\to 0}\mathbb{E}(\frac{\Phi\Delta_3}{h})=0$ Nous commençons par le terme le plus simple à traiter qui est Δ_3. C'est une somme de d^3 termes de forme identique qui se traitent de la même manière. Considérons un terme particulier:

$$\delta_3=\frac{1}{\epsilon^3}\int_t^{t+h}\int_t^s\int_t^v F_k(\frac{u}{\epsilon^2},X_u)\frac{\partial}{\partial X_i}f(X_u)F_j(\frac{v}{\epsilon^2},X_u)\frac{\partial^2}{\partial X_k\partial X_j}F_i(\frac{s}{\epsilon^2},X_u)dudvds$$

Par Fubini, on a aussi:

$$\delta_3=\frac{1}{\epsilon^3}\int_t^{t+h}F_k(\frac{u}{\epsilon^2},X_u)\frac{\partial}{\partial X_i}f(X_u)\int_u^{t+h}\int_v^{t+h}F_j(\frac{v}{\epsilon^2},X_u)\frac{\partial^2}{\partial X_k\partial X_j}F_i(\frac{s}{\epsilon^2},X_u)dvdsdu$$

f étant à support compact bornée, on a:

$$|\delta_3|\le C\frac{1}{\epsilon^3}\int_t^{t+h}\left|F_k(\frac{u}{\epsilon^2},X_u)\right|.\left|\int_u^{t+h}\int_v^{t+h}F_j(\frac{v}{\epsilon^2},X_u)\frac{\partial^2}{\partial X_k\partial X_j}F_i(\frac{s}{\epsilon^2},X_u)dvds\right|du$$

Par Cauchy-Schwartz:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\frac{|\Phi\delta_3|}{h} &\le \tfrac{1}{\epsilon^3}\tfrac{C}{h}\textstyle\int_t^{t+h}\sqrt{\mathbb{E}F_k(\frac{u}{\epsilon^2},X_u)^2}\\ &\sqrt{\mathbb{E}\left(\textstyle\int_u^{t+h}\int_v^{t+h}F_j(\frac{v}{\epsilon^2},X_u)\frac{\partial^2}{\partial X_k\partial X_j}F_i(\frac{s}{\epsilon^2},X_u)dvds\right)^2}du\end{aligned}$$

Après changement de variable, il vient:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\frac{|\Phi\delta_3|}{h} &\le \tfrac{C\epsilon^3}{h}\textstyle\int_0^{\frac{h}{\epsilon^2}}\sqrt{\sup_{t>0}\mathbb{E}\sup_{X\in\mathcal{B}(0,M)}F_k(t,X)^2}\\ &\sqrt{\sup_{t>0}\mathbb{E}\sup_{X\in\mathcal{B}(0,M)}\left(\textstyle\int_0^{\frac{h}{\epsilon^2}}\int_0^s F_j(v+t,X)\frac{\partial^2}{\partial X_k\partial X_j}F_i(s+t,X)dsdv\right)^2}du\end{aligned}$$

Ψ^M étant régulière bornée, la propriété H_4 sur F entraîne la même propriété sur F^M. Cette propriété nous servira à majorer des quantités de la forme:

$$\left|\mathbb{E}\int_t^{t+h}\int_t^s F_j(\frac{v}{\epsilon^2},X_u)\frac{\partial}{\partial X_k}F_i(\frac{s}{\epsilon^2},X_u)dsdv\right|$$

par $h\epsilon^2$: après un changement de variable, l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwartz et des majorations évidentes, on majore

$$\sup_{t>0}\mathbb{E}\sup_{X\in\mathcal{B}(0,M)}\left(\int_0^{\frac{h}{\epsilon^2}}\int_0^s F_j(v+t,X)\frac{\partial}{\partial X_k}F_i(s+t,X)dsdv\right)^2$$

par $\frac{h^2}{\epsilon^4}$. Donc, on a:

$$\mathbb{E}\frac{|\Phi\delta_3|}{h}\le\frac{C\epsilon^3}{h}\frac{h}{\epsilon^2}\frac{h}{\epsilon^2}\le\frac{Ch}{\epsilon}$$

dóù $\lim_{\epsilon\to 0}(\mathbb{E}(\frac{\Phi\Delta_3}{h}))=0$ dès que $h=\epsilon^\alpha$ avec $1<\alpha<2$

Etude de Δ_1: $\lim_{\epsilon\to 0}(\mathbb{E}(\frac{\Phi\Delta_1}{h}))=0$ C'est le terme le plus délicat à étudier. On commence par faire apparaître un décalage afin de pouvoir utiliser la condition de mixing:

$$\Delta_1=\sum_i\frac{\partial}{\partial X_i}f(X_t)\frac{1}{\epsilon}\int_t^{t+h}F_i(\frac{s}{\epsilon^2},X_t)ds=\sum_i\delta^i+\sum_{i,j}\delta^{i,j}+\sum_{i,j,k}\delta^{i,j,k}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l}\delta^i=\frac{\partial}{\partial X_i}f(X_{t-h})\frac{1}{\epsilon}\int_t^{t+h}F_i(\frac{s}{\epsilon^2},X_{t-h})ds\\ \delta^{i,j}=\frac{1}{\epsilon^2}\int_{t-h}^t F_j(\frac{u}{\epsilon^2},X_{t-h})\frac{\partial}{\partial X_j}[\frac{\partial}{\partial X_i}f(X_{t-h})\int_t^{t+h}F_i(\frac{s}{\epsilon^2},X_{t-h})ds]du\\ \delta^{i,j,k}=\frac{1}{\epsilon^3}\int_{t-h}^t\int_{t-h}^u F_k(\frac{v}{\epsilon^2},X_v)\frac{\partial}{\partial X_k}[F_j(\frac{u}{\epsilon^2},X_v)\frac{\partial}{\partial X_j}(\frac{\partial}{\partial X_i}f(X_v)\int_t^{t+h}F_i(\frac{s}{\epsilon^2},X_v)ds)]dudv\end{array}\right.$$

Etude de δ^i. Soit $\{\mathrm{B}_m\}_{m\in I_n}$ un recouvrement fini indicé par n de $\mathrm{B}(0,M)$ par des boules de centre z_m et de rayon $1/n$ ($cardI_n\le Cn^d$). On écrit:

$$\begin{array}{rl}\delta^i=&\sum_m\frac{\partial}{\partial X_i}f(X_{t-h})\mathbb{1}_{X_{t-h}\in\mathcal{B}_m}\frac{1}{\epsilon}\int_t^{t+h}F_i(\frac{s}{\epsilon^2},z_m)ds\\ &+\sum_m\frac{\partial}{\partial X_i}f(X_{t-h})\mathbb{1}_{X_{t-h}\in\mathcal{B}_m}\frac{1}{\epsilon}\int_t^{t+h}[F_i(\frac{s}{\epsilon^2},X_{t-h})-F_i(\frac{s}{\epsilon^2},z_m)]ds\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\Phi\frac{\partial}{\partial X_i}f(X_{t-h})\mathbb{1}_{X_{t-h}\in\mathcal{B}_m}\text{ est }\mathcal{F}_0^{\frac{t-h}{\epsilon^2}}(M)-\text{mesurable}\\ \int_t^{t+h}F_i(\frac{s}{\epsilon^2},z_m)ds\text{ est }\mathcal{F}_{\frac{t}{\epsilon^2}}^{\infty}(M)-\text{mesurable centré}\end{array}\right.$$

D'où, en utilisant la définition du coefficient de mixing:

$$\begin{array}{rl}|\mathbb{E}(\frac{\Phi}{h\epsilon}\frac{\partial}{\partial X_i}f(X_{t-h})\mathbb{1}_{X_{t-h}\in\mathcal{B}_m}\int_t^{t+h}F_i(\frac{s}{\epsilon^2},z_m)ds)|\le&\frac{4}{h\epsilon}\rho(\frac{h}{\epsilon^2},M)\|\Phi\frac{\partial}{\partial X_i}f(X_{t-h}).\\ &.\mathbb{1}_{X_{t-h}\in\mathcal{B}_m}\|_2\|\int_t^{t+h}F_i(\frac{s}{\epsilon^2},z_m)ds\|_2\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}\left\{\begin{array}{l}\sum_m|\mathbb{E}\frac{\Phi}{h\epsilon}\frac{\partial}{\partial X_i}f(X_{t-h})\mathbb{1}_{X_{t-h}\in\mathcal{B}_m}\cdot\\ \int_t^{t+h}F_i(\frac{s}{\epsilon^2},z_m)ds|\end{array}\right.&\le\left\{\begin{array}{l}C\frac{\epsilon}{h}\rho(\frac{h}{\epsilon^2},M)\sum_m\sqrt{P(X_{t-h}\in\mathcal{B}_m)}.\\ \sqrt{\sup_{t>0}\mathbb{E}(\sup_{X\in\mathcal{B}(0,M)}\int_0^{\frac{h}{\epsilon^2}}F_i(s+t,X)ds)^2}\end{array}\right.\\ &\le\frac{Cn^{d/2}}{\sqrt{h}}\rho(\frac{h}{\epsilon^2},M)\end{array}$$

l'autre terme se traite simplement:

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbb{E}|\frac{\Phi}{h\epsilon}\frac{\partial}{\partial X_i}f(X_{t-h})\mathbb{1}_{X_{t-h}\in\mathcal{B}_m}\cdot\\ \int_t^{t+h}[F_i(\frac{s}{\epsilon^2},X_{t-h})-F_i(\frac{s}{\epsilon^2},z_m)]ds|\end{array}\right.\le\left\{\begin{array}{l}\mathbb{E}(|\frac{\Phi}{h}\frac{\partial}{\partial X_i}f(X_{t-h})\mathbb{1}_{X_{t-h}\in\mathcal{B}_m}|.\\ \frac{1}{\epsilon}\frac{1}{n}\int_t^{t+h}\sup X\in\mathcal{B}(0,M)|\nabla F_i(\frac{s}{\epsilon^2},X)|ds)\end{array}\right.$$

comme F est à dérivées partielles bornées sur les compacts:

$$\mathbb{E}|\frac{\Phi}{h}\frac{\partial}{\partial X_i}f(X_{t-h})\mathbb{1}_{X_{t-h}\in\mathcal{B}_m}\frac{1}{\epsilon}\int_t^{t+h}[F_i(\frac{s}{\epsilon^2},X_{t-h})-F_i(\frac{s}{\epsilon^2},z_m)]ds|\le C\frac{P(X_{t-h}\in\mathcal{B}_m)}{n\epsilon}$$

Finalement on a:

$$|\mathbb{E}\frac{\Phi\delta^i}{h}|\le C\left(\frac{Cn^{d/2}}{\sqrt{h}}\rho(\frac{h}{\epsilon^2},M)+\frac{1}{n\epsilon}\right)$$

Etude de $\delta^{i,j}$. Nous considérons un terme $\delta^{i,j}$ particulier, les autres se traitant de même:

$$\delta = \frac{1}{\epsilon^2}\int_{t-h}^{t} F_j(\frac{u}{\epsilon^2}, X_{t-h})du \frac{\partial}{\partial X_i} f(X_{t-h}) \int_t^{t+h} \frac{\partial}{\partial X_j} F_i(\frac{s}{\epsilon^2}, X_{t-h})ds$$

On introduit un temps intermédiaire T tel que $0 < T < h$ et $\frac{T}{\epsilon^2} \to \infty$ de manière à utiliser la propriété de mixing. On écrit alors $\delta = a + b + c$ avec:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{\epsilon^2}\int_{t-h}^{t} F_j(\frac{u}{\epsilon^2}, X_{t-h})du \frac{\partial}{\partial X_i} f(X_{t-h}) \int_t^{t+T} \frac{\partial}{\partial X_j} F_i(\frac{s}{\epsilon^2}, X_{t-h})ds \\ b = \sum_m \frac{1}{\epsilon^2}\int_{t-h}^{t} F_j(\frac{u}{\epsilon^2}, X_{t-h})du \frac{\partial}{\partial X_i} f(X_{t-h}) \int_{t+T}^{t+h} \frac{\partial}{\partial X_j} F_i(\frac{s}{\epsilon^2}, z_m)ds \mathbb{1}_{(X_{t-h}\in\mathcal{B}_m)} \\ c = \sum_m \frac{1}{\epsilon^2}\int_{t-h}^{t} F_j(\frac{u}{\epsilon^2}, X_{t-h})du \frac{\partial}{\partial X_i} f(X_{t-h}) \int_{t+T}^{t+h} \frac{\partial}{\partial X_j} [F_i(\frac{s}{\epsilon^2}, X_{t-h}) - F_i(\frac{s}{\epsilon^2}, z_m)]ds \mathbb{1}_{(X_{t-h}\in\mathcal{B}_m)} \end{array} \right.$$

On a, par l'hypothèse H_4:

$$\begin{array}{rl} |\mathbb{E}\frac{\Phi a}{h}| & \leq \frac{C}{h}\frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}(\sup_{X\in\mathcal{B}(0,M)}\int_{t-h}^{t} F_j(\frac{u}{\epsilon^2}, X)du \frac{\partial}{\partial X_i} f(X) \sup_{X\in\mathcal{B}(0,M)}\int_t^{t+T} \frac{\partial}{\partial X_j} F_i(\frac{s}{\epsilon^2}, X)ds) \\ & \leq \frac{C}{h}\frac{1}{\epsilon^2}\epsilon\sqrt{h}\epsilon\sqrt{T} \\ & \leq C\sqrt{\frac{T}{h}} \end{array}$$

On traite b en faisant intervenir le coefficient de mixing:

$$\begin{array}{rl} |\mathbb{E}\frac{\Phi b}{h}| & \leq \sum_m 4\rho(\frac{T}{\epsilon^2}, M)\| \int_{t-h}^{t} F_j(\frac{u}{\epsilon^2}, X_{t-h})du \frac{\partial}{\partial X_i} f(X_{t-h}) \frac{\Phi}{h\epsilon^2}\mathbb{1}_{(X_{t-h}\in\mathcal{B}_m)}\|_2 \| \int_{t+T}^{t+h} \frac{\partial}{\partial X_j} F_i(\frac{s}{\epsilon^2}, z_m)ds\|_2 \\ & \leq \left\{ \begin{array}{l} \sum_m \frac{C}{h\epsilon^2}\rho(\frac{T}{\epsilon^2}, M) \sup_{t>0} \| \sup_{X\in\mathcal{B}(0,M)} \epsilon^2 \int_0^{\frac{h}{\epsilon^2}} F_j(u+t, X)du\|_4 \| \mathbb{1}_{(X_{t-h}\in\mathcal{B}_m)}\|_4) \\ \sup_{t>0} \| \sup_{X\in\mathcal{B}(0,M)} \epsilon^2 \int_0^{\frac{h-T}{\epsilon^2}} \frac{\partial}{\partial X_j} F_i(s+t, X)ds\|_2 \end{array} \right. \\ & \leq \sum_m \frac{C}{h\epsilon^2}\rho(\frac{T}{\epsilon^2}, M)\frac{\epsilon^2\sqrt{h}}{\epsilon}\frac{\epsilon^2\sqrt{h-T}}{\epsilon} P(X_{t-h} \in \mathcal{B}_m)^{1/4} \\ & \leq C\rho(\frac{T}{\epsilon^2}, M)\sum_m P(X_{t-h} \in \mathcal{B}_m)^{1/4} \\ & \leq Cn^{d/4}\rho(\frac{T}{\epsilon^2}, M) \end{array}$$

Et le troisième terme se traite facilement puisque F est à dérivées bornées sur $\mathcal{B}(0, M)$:

$$\begin{array}{rl} |\mathbb{E}\frac{\Phi c}{h}| & \leq \sum_m \frac{C}{h\epsilon^2}\mathbb{E}\sup_{X\in\mathcal{B}(0,M)}\int_{t-h}^{t} F_j(\frac{u}{\epsilon^2}, X)du \frac{\partial}{\partial X_i} f(X) \mathbb{1}_{(X_{t-h}\in\mathcal{B}_m)} \frac{h-T}{n} \sup_{X\in\mathcal{B}(0,M)} |\nabla F(t, X)| \\ & \leq \sum_m \frac{CP(X_{t-h}\in\mathcal{B}_m)(h-T)}{nh\epsilon^2}\mathbb{E}\sup_{X\in\mathcal{B}(0,M)}\int_{t-h}^{t} F_j(\frac{u}{\epsilon^2}, X)du \mathbb{E}\sup_{X\in\mathcal{B}(0,M)} |\nabla F(t, X)| \\ & \leq \frac{C\sqrt{h}}{n\epsilon} \end{array}$$

Etude de $\delta^{i,j,k}$. Ce terme se traite comme Δ_3; considérons encore un terme particulier:

$$\delta = \frac{1}{\epsilon^3}\int_{t-h}^{t}\int_{t-h}^{u} F_k(\frac{v}{\epsilon^2}, X_v)F_j(\frac{u}{\epsilon^2}, X_v)\frac{\partial}{\partial X_i} f(X_v) \int_t^{t+h} \frac{\partial^2}{\partial X_k \partial X_j} F_i(\frac{s}{\epsilon^2}, X_v)dsdudv$$

Par Fubini:

$$\delta = \frac{1}{\epsilon^3}\int_{t-h}^{t} F_k(\frac{v}{\epsilon^2}, X_v)\frac{\partial}{\partial X_i} f(X_v) \int_v^{t} f_j(\frac{u}{\epsilon^2}, X_v)du \int_t^{t+h} \frac{\partial^2}{\partial X_k \partial X_j} F_i(\frac{s}{\epsilon^2}, X_v)dsdv$$

D'où:

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}\frac{\Phi\delta}{h}\right| &\leq \frac{C}{h\epsilon^3}\int_{t-h}^{t}\mathbb{E}\left|F_k(\tfrac{v}{\epsilon^2},X_v)\right|.\left|\int_v^t F_j(\tfrac{u}{\epsilon^2},X_v)du\int_t^{t+h}\frac{\partial^2}{\partial X_k\partial X_j}F_i(\tfrac{s}{\epsilon^2},X_v)ds\right|dv\\
&\leq \begin{cases}\frac{C}{h\epsilon^3}\int_{t-h}^{t}\sqrt{\mathbb{E}\sup_{X\in\mathcal{B}(0,M)}f_k(t,X)^2}\\ \sqrt{\mathbb{E}\sup_{X\in\mathcal{B}(0,M)}\left(\int_v^t F_j(\frac{u}{\epsilon^2},X)du\right)^2\left(\int_t^{t+h}\frac{\partial^2}{\partial X_k\partial X_j}F_i(\frac{s}{\epsilon^2},X)ds\right)^2}dv\end{cases}\\
&\leq \frac{C}{h\epsilon^3}\int_{t-h}^{t}\sqrt[4]{\mathbb{E}\sup_{X\in\mathcal{B}(0,M)}\left(\int_v^t F_j(\frac{u}{\epsilon^2},X)du\right)^4\mathbb{E}\sup_{X\in\mathcal{B}(0,M)}\left(\int_t^{t+h}\frac{\partial^2}{\partial X_k\partial X_j}F_i(\frac{s}{\epsilon^2},X)ds\right)^4}dv\\
&\leq \frac{C}{h\epsilon^3}\epsilon^4\int_{t-h}^{t}\frac{\sqrt{t-v}}{\epsilon}\frac{\sqrt{h}}{\epsilon}dv\\
&\leq C\frac{h}{\epsilon}
\end{aligned}$$

conclusion. On a finalement la majoration:

$$\left|\mathbb{E}\frac{\Phi\Delta_1}{h}\right| \leq C\left[\frac{n^{d/2}}{\sqrt{h}}\rho(\frac{h}{\epsilon^2},M)+\frac{1}{n\epsilon}+\sqrt{\frac{T}{h}}+n^{d/4}\rho(\frac{T}{\epsilon^2},M)+\frac{\sqrt{h}}{n\epsilon}+\frac{h}{\epsilon}\right]$$

Rappelons que, après l'étude de Δ_3, on avait pris h de la forme $\epsilon^{1+\beta}$ avec $\beta\in]0,1[$. On prend donc T de la forme $\epsilon^{1+\gamma}$ avec $\gamma>\beta$ et n de l'ordre $\epsilon^{-1-\lambda}$; pour que l'expression ci-dessus tende vers 0, il suffit que:

$$\begin{cases}\rho(\epsilon^{-1+\beta},M)\frac{\epsilon^{-(\lambda+1)d/2}}{\epsilon^{1/2+\beta}}\longrightarrow 0\\ \rho(\epsilon^{-1+\gamma},M)\epsilon^{-(\lambda+1)d/4}\longrightarrow 0\end{cases}$$

ce qui est le cas si $\forall\alpha>0,\forall M>0,\lim_{T\to\infty}\rho(T,M)T^{\frac{d+1}{2}+\alpha}=0$

Etude de Δ_2: $\lim\left(\mathbb{E}\frac{\Phi(\Delta_2-h\mathcal{L}f(X_t))}{h}\right)=0$ C'est ce terme qui fournira le générateur de la diffusion limite. Nous commençons par l'identifier. On note:

$$\Delta(X)=\sum_{i,j=1}^{d}\frac{1}{\epsilon^2}\int_t^{t+h}\int_t^s F_j(\frac{v}{\epsilon^2},X)\frac{\partial}{\partial X_j}\left[f_i(\frac{s}{\epsilon^2},X)\frac{\partial}{\partial X_i}f(x)\right]dsdv$$

Après le changement de variable $\frac{v-t}{\epsilon^2}\to v$ et $\frac{s-v}{\epsilon^2}\to u$ il vient:

$$\mathbb{E}\Delta(X)=\sum_{i,j=1}^{d}\int_0^\infty(h-\epsilon^2v)\mathbb{1}_{v\in[0,\frac{h}{\epsilon^2}]}\frac{1}{\frac{h}{\epsilon^2}-v}\int_{\frac{t}{\epsilon^2}}^{\frac{h+t}{\epsilon^2}-v}\mathbb{E}F_j(u,X)\frac{\partial}{\partial X_j}\left[F_i(u+v,X)\frac{\partial}{\partial X_i}f(x)\right]dudv$$

L'hypothèse H_5 implique que $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\mathbb{E}F_j(u,X)\frac{\partial}{\partial X_j}\left[F_i(u+v,X)\frac{\partial}{\partial X_i}f(x)\right]dudv$ existe uniformément en $X\in\mathcal{B}(0,M)$ (la troncation Ψ^M ne change pas cette propriété). La convergence est aussi uniforme sur $\mathbb{R}^d$ puisque ces expressions sont nulles en dehors du compact $\mathcal{B}(0,M)$. On utilise alors le lemme suivant:

Lemme 4.4
(Skorokhod): Si $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(u,X)du=0$ *uniformément en* $X\in K$ *(K compact) et si* $h(T)$ *est tel que :*

$$\begin{cases}h(T)\to 0\\ Th(T)\to+\infty\end{cases}$$

alors $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{Th(T)} \int_T^{T+h(T)} F(u,X)du = 0$ *uniformément en* $X \in K$.

Ici on prend $T = \frac{t}{\epsilon^2}$ et $h(T) = \frac{\frac{h}{\epsilon^2} - v}{\frac{t}{\epsilon^2}}$. Par convergence dominée, il est alors facile de voir que $\mathbb{E}\frac{\Delta(X)}{h}$ tend uniformément sur R^d vers:

$$\mathcal{L}^M f(X) = \int_0^\infty \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E} F^M(u,X).\nabla_X \left[F^M(u+v,X).\nabla_X f(X) \right] du \right) dv$$

Il reste à montrer que $\lim_{\epsilon\to 0} \left| \mathbb{E}\frac{\Phi(\Delta_2(X_t) - h\mathcal{L}^M f(X_t))}{h} \right| = 0$. Soit T un temps intermédiaire et $\{\mathrm{B}_m\}_{m\in I_n}$ un recouvrement fini de $\mathrm{B}(0,M)$ par des boules de centre z_m et de rayon $1/n$. On écrit:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\Delta_2(X_t) - h\mathcal{L}^M f(X_t)}{h} = \quad & \textstyle\sum_{i,j} \frac{1}{h\epsilon^2} \int_t^{t+T} \int_t^s F_j(\frac{v}{\epsilon^2}, X_t) \frac{\partial}{\partial X_j} \left[F_i(\frac{s}{\epsilon^2}, X_t) \frac{\partial}{\partial X_i} f(X_t) \right] dsdv \\
& + \textstyle\sum_{i,j} \frac{1}{h\epsilon^2} \int_{t+T}^{t+h} \int_t^{t+T} F_j(\frac{v}{\epsilon^2}, X_t) \frac{\partial}{\partial X_j} \left[F_i(\frac{s}{\epsilon^2}, X_t) \frac{\partial}{\partial X_i} f(X_t) \right] dsdv \\
& + \textstyle\sum_{i,j} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{\epsilon^2} \int_{t+T}^{t+h} \int_{t+T}^s F_j(\frac{v}{\epsilon^2}, X_t) \frac{\partial}{\partial X_j} \left[F_i(\frac{s}{\epsilon^2}, X_t) \frac{\partial}{\partial X_i} f(X_t) \right] dsdv - h\mathcal{L}^M f(X_t) \right)
\end{aligned}$$

Notons a, b et c les trois termes de cette somme.

Majoration de $|\mathbb{E}\Phi a|$.

$$\begin{aligned}
S &= \left| \mathbb{E}\tfrac{\Phi}{h\epsilon^2} \int_t^{t+T} \int_t^s F_j(\tfrac{v}{\epsilon^2}, X_t) \tfrac{\partial}{\partial X_j} \left[F_i(\tfrac{s}{\epsilon^2}, X_t) \tfrac{\partial}{\partial X_i} f(X_t) \right] dsdv \right| \\
S &\leq \begin{cases} \frac{C\epsilon^2}{h} \sup_{t>0} \mathbb{E} \sup_{X\in\mathcal{B}(0,M)} \left(\int_0^{\frac{T}{\epsilon^2}} \int_0^s F_j(v+t,X) \frac{\partial}{\partial X_j} F_i(s+t,X) dsdv \right) \\ + \frac{C\epsilon^2}{h} \sup_{t>0} \mathbb{E} \sup_{X\in\mathcal{B}(0,M)} \left(\int_0^{\frac{T}{\epsilon^2}} \int_0^s F_j(v+t,X) F_i(s+t,X) dsdv \right) \end{cases} \\
&\leq C \tfrac{\epsilon^2}{h} \tfrac{T}{\epsilon^2} \\
&\leq C \tfrac{T}{h}
\end{aligned}$$

Majoration de $|\mathbb{E}\Phi b|$.

$$\begin{aligned}
S &= \left| \mathbb{E}\tfrac{\Phi}{h\epsilon^2} \int_{t+T}^{t+h} \int_t^{t+T} F_j(\tfrac{v}{\epsilon^2}, X_t) \tfrac{\partial}{\partial X_j} \left[F_i(\tfrac{s}{\epsilon^2}, X_t) \tfrac{\partial}{\partial X_i} f(X_t) \right] dsdv \right| \\
S &\leq \tfrac{C\epsilon^2}{h} \sup_{t>0} \mathbb{E} \left(\sup_{X\in\mathcal{B}(0,M)} \int_0^{\frac{h-T}{\epsilon^2}} F_j(v+t,X) dv \right) \left(\sup_{X\in\mathcal{B}(0,M)} \int_0^{\frac{T}{\epsilon^2}} \tfrac{\partial}{\partial X_j} F_j(s+t,X) ds \right) \\
&\leq \tfrac{C\epsilon^2}{h} \tfrac{\sqrt{h-T}}{\epsilon} \tfrac{\sqrt{T}}{\epsilon} \\
&\leq C\sqrt{\tfrac{T}{h}}
\end{aligned}$$

Majoration de $|\mathbb{E}\Phi c|$. En reprenant l'identification du générateur on voit que, pourvu que T soit négligeable devant h, on a, uniformément en $X \in \mathbb{R}^d$:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{h} \mathbb{E} \left(\sum_{i,j=1}^d \frac{1}{\epsilon^2} \int_{t+T}^{t+h} \int_{t+T}^s F_j(\frac{v}{\epsilon^2}, X) \frac{\partial}{\partial X_j} \left[f_i(\frac{s}{\epsilon^2}, X) \frac{\partial}{\partial X_i} f(X) \right] dsdv - h\mathcal{L}^M f(X) \right) = 0$$

On décompose alors ce terme comme suit:

$$\frac{1}{\epsilon^2}\int_{t+T}^{t+h}\int_{t+T}^{s} F_j(\frac{v}{\epsilon^2},X_t)\frac{\partial}{\partial X_j}\left[f_i(\frac{s}{\epsilon^2},X_t)\frac{\partial}{\partial X_i}f(X_t)\right]dsdv - h\mathcal{L}^M f(X_t) = \sum_n (T_m^1+T_m^3+T_m^2)$$

avec:

$$\left\{\begin{array}{rcl} T_m^1 = & \left(\frac{1}{\epsilon^2}\int_{t+T}^{t+h}\int_{t+T}^{s} F_j(\frac{v}{\epsilon^2},z_m)\frac{\partial}{\partial X_j}\left[f_i(\frac{s}{\epsilon^2},z_m)\frac{\partial}{\partial X_i}f(z_m)\right]dsdv - h\mathcal{L}^M f(z_m)\right)\mathbb{1}_{(X_t\in\mathcal{B}_m)} \\ T_m^2 = & \mathbb{1}_{(X_t\in\mathcal{B}_m)}\frac{1}{\epsilon^2}\int_{t+T}^{t+h}\int_{t+T}^{s} F_j(\frac{v}{\epsilon^2},X_t)\frac{\partial}{\partial X_j}\left[f_i(\frac{s}{\epsilon^2},X_t)\frac{\partial}{\partial X_i}f(X_t)\right] \\ & -F_j(\frac{v}{\epsilon^2},z_m)\frac{\partial}{\partial X_j}\left[f_i(\frac{s}{\epsilon^2},z_m)\frac{\partial}{\partial X_i}f(z_m)\right]dsdv \\ T_m^2 = & h\left[\mathcal{L}^M f(z_m)-\mathcal{L}^M f(X_t)\right]\mathbb{1}_{(X_t\in\mathcal{B}_m)} \end{array}\right.$$

Pour T_m^1 on utilise la propriété de mixing:

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi\,\mathbb{1}_{(X_t\in\mathcal{B}_m)} \text{ est } \mathcal{F}_0^{\frac{t}{\epsilon^2}}-\text{mesurable} \\ \frac{1}{h\epsilon^2}\left(\int_{t+T}^{t+h}\int_{t+T}^{s} F_j(\frac{v}{\epsilon^2},z_m)\frac{\partial}{\partial X_j}\left[f_i(\frac{s}{\epsilon^2},z_m)\frac{\partial}{\partial X_i}f(z_m)\right]dsdv - h\mathcal{L}^M f(z_m)\right) \\ \text{est } \mathcal{F}_{\frac{t+T}{\epsilon^2}}^{\infty}-\text{mesurable et d'espérance } O(\epsilon) \text{ uniformément en } n \end{array}\right.$$

D'où:

$$\begin{array}{rl} \left|\mathbb{E}\sum_m \frac{\Phi T_m^1}{h}\right| & \leq O(\epsilon)\sum_m \mathbb{E}\Phi\,\mathbb{1}_{(X_t\in\mathcal{B}_m)} + \sum_m 4\rho(\frac{T}{\epsilon^2},M)\left\|\Phi\,\mathbb{1}_{(X_t\in\mathcal{B}_m)}\right\|_2\left(\left\|\mathcal{L}^M f(z_m)\right\|_2 + C\frac{h-T}{h}\right) \\ & \leq C(O(\epsilon)+n^{d/2}\rho(\frac{T}{\epsilon^2},M)) \end{array}$$

Les termes T_m^2 et T_m^3 se majorent facilement en utilisant la régularité de F^M et de $\mathcal{L}^M f$.

Conclusion. On trouve finalement:

$$\begin{array}{rl} \left|\mathbb{E}\frac{\Phi(\Delta_2(X_t)-h\mathcal{L}^M f(X_t))}{h}\right| & \leq C(\frac{T}{h}+\sqrt{\frac{T}{h}}+O(\epsilon)+n^{d/2}\rho(\frac{T}{\epsilon^2},M)+\frac{(h-T)^2}{nh\epsilon^2}+\frac{1}{n}) \\ & \leq C(\sqrt{\frac{T}{h}}+n^{d/2}\rho(\frac{T}{\epsilon^2},M)+\frac{h}{n\epsilon^2}) \end{array}$$

On vérifie alors que l'hypothèse $\forall\alpha>0,\forall M>0,\lim_{T\to\infty}\rho(T,M)T^{\frac{d+1}{2}+\alpha}=0$ suffit à assurer la convergence vers 0.

Fin de l'étude du processus tronqué. Finalement, en rassemblant les résultats précédents, on a prouvé qu'on pouvait trouver une suite h_ϵ telle que:

$$\limsup_{\epsilon\to 0}\sup_{t\in[t_{m+1},T]}\frac{1}{h_\epsilon}\mathbb{E}\Phi\left(f(X_{t+h_\epsilon}^{\epsilon,M})-f(X_t^{\epsilon,M})-h_\epsilon\mathcal{L}^M f(X_t^{\epsilon,M})\right)=0$$

Cela suffit à montrer la tension des lois $Q^{M,\epsilon}$ de $X^{\epsilon,M}$ mais on ne sait rien dire sur l'unicité des lois limites Q^M des sous-suites convergentes de $Q^{M,\epsilon}$: Q^M est caractérisé par le problème de martingale associé à $\mathcal{L}^M$ dont on ne sait pas s'il a une solution unique).

4.2.2 Suppression de la troncature

Nous reproduisons ici à peu de choses près la démonstration de [5], le theorème suivant permet simplement de généraliser leur méthode à des générateurs non-bornés:

Théorème 4.5
(Stroock-Varadhan[12]): Soit $a(t,X)$ et $b(t,X)$ des fonctions localement bornées mesurables, continues en X pour chaque $t>0$,de $[0,\infty[x\mathbb{R}^d$ à valeurs respectivement dans l'espace des matrices définies positives et dans $\mathbb{R}^d$. Supposons de plus que le problème de martingale associé à a et b issu de (s,X) est bien posé pour tout (s,X) et admet une unique solution $P_{s,X}$. Soit $a_n(t,X)$ et $b_n(t,X)$ des fonctions mesurables, de $[0,\infty[x\mathbb{R}^d$ à valeurs respectivement dans l'espace des matrices définies positives et dans $\mathbb{R}^d$ et telles que:

$$\forall T>0, \forall R>0 \begin{cases} \sup_{n\geq 1}\sup_{o\leq s\leq T}\sup_{|X|\leq R}\|a_n(s,X)\|+|b_n(s,X)|<\infty \\ \lim_{n\to\infty}\int_0^T \sup_{|X|\leq R}\left(\|a_n(s,X)-a(s,X)\|+|b_n(s,X)-b(s,X)|\right)ds=0 \end{cases}$$

Soit P^n une solution du problème de martingale pour a_n et b_n issu de (s_n,X_n). Si $(s_n,X_n)\to(s,X)$ alors $P^n\to P_{s,X}$.

Ici, l'hypothèse H_5 montre que:

$$\forall R>0, \sup_M \sup_{|X|\leq R}\sum_{i,j}\|A^M_{i,j}(X)\|+|b^M_j(X)|<\infty$$

D'autre part comme $\lim_{M\to\infty}\Psi_M(X)=1$ pour tout X:

$$\lim_{M\to\infty}\sum_{i,j}\|A_{i,j}(X)-A^M_{i,j}(X)\|+|b^M_j-b_j(X)|=0$$

uniformément sur les compacts. En appliquant alors le théorème précédent on voit que la suite Q^M, sous-suite extraite de la suite des valeurs d'adhérence de $Q^{\epsilon,M}$, converge étroitement vers Q solution du problème de martingale associé au générateur:

$$\mathcal{L}f(X)=\int_0^\infty\left(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}F(u,X).\nabla_X\left[F(u+v,X).\nabla_X f(X)\right]du\right)dv$$

Il reste à montrer que Q^ϵ converge vers Q. On définit $\tau(X,K)=\inf\{t\geq 0,|X_t|\geq K\}$ pour tout $X\in C([0,\infty[,\mathbb{R}^d)$. Comme $F^M(t,X)=F(t,X)$ sur $\mathcal{B}(0,M/2)$, on a:

$$\forall K\leq M/2, \tau(X^\epsilon,K)=\tau(X^{\epsilon,M},K)$$

Soit S_0 un fermé de $C([0,T[,\mathbb{R}^d)$ et S un fermé de $C([0,\infty[,\mathbb{R}^d)$ dont la trace sur $C([0,T[,\mathbb{R}^d)$ est S_0: $S=\{X\in C([0,\infty[,\mathbb{R}^d), X_{|[0,T]}\in S_0$. On va montrer que, pour tout S, on a $\limsup_{\epsilon\to 0}Q^\epsilon(S)\leq Q(S)$ ce qui est une définition de la convergence étroite de Q^ϵ vers Q. Soit $(\epsilon_n)_{n>0}$ une suite tendant vers 0 telle que pour tout M plus grand

que $2|X_0|$, $Q^{\epsilon_n,M}$ converge étroitement vers une mesure Q^M sur $C([0,\infty[,\mathbb{R}^d)$ (on peut en trouver une par extraction diagonale). On a, si $K \leq M/2$:

$$\begin{array}{l} Q^{\epsilon_n}(S, \tau(X,K) \geq T) = Q^{\epsilon_n,M}(S, \tau(X,K) \geq T) \\ Q^{\epsilon_n}(\tau(X,K) \leq T) = Q^{\epsilon_n,M}(\tau(X,K) \leq T) \end{array}$$

d'où:

$$\begin{array}{ll} \limsup_{n\to\infty} Q^{\epsilon_n}(S) & \leq \limsup_{n\to\infty} Q^{\epsilon_n,M}(S) + \limsup_{n\to\infty} Q^{\epsilon_n,M}(\tau(X,K) \leq T) \\ & \leq Q^M(S) + Q^M(\sup_{t\leq T} |X_t| \geq K-1) \end{array}$$

On fait ensuite tendre M vers $+\infty$ puis K vers $+\infty$, il vient:

$$\begin{array}{ll} \limsup_{n\to\infty} Q^{\epsilon_n}(S) & \leq Q(S) + Q(\sup_{t\leq T} |X_t| \geq K-1) \\ & \leq Q(S) \end{array}$$

La suite (ϵ_n) pouvant en fait être prise quelconque, quitte à ne pas avoir convergence pour tous les M, on a bien prouvé le résultat annoncé.

4.3 Généralisations

4.3.1 Champ non centré

On considère un système de la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX_t^\epsilon}{dt} = \frac{1}{\epsilon} F(\frac{t}{\epsilon^2}, X_t^\epsilon) + G(\frac{t}{\epsilon^2}, X_t^\epsilon, \epsilon) \\ X_0^\epsilon = X_0 \end{array} \right.$$

G est un champ possédant les mêmes propriétés de mixing et de régularité que F mais non nécessirement centré et tel que $\lim_{\epsilon\to 0} G(t,X,\epsilon) = G(t,X,0)$ uniformément en t sur $\mathbb{R}$ et en X sur les compacts.

Théorème 4.6
Sous les hypothéses précédentes, le processus X_t^ϵ converge en loi vers une diffusion de générateur infinitésimal:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{L}f(X) = & \int_0^\infty \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E} F(v,X).\nabla_X \left[F(u+v,X).\nabla_X f(X) \right] dv \right) du \\ & + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E} G(s,X,0).\nabla_X f(X) ds \end{array}$$

Démonstration :
La démonstration est en tout point semblable à la précédente: l'idée est d'étudier une suite de processus tronqués et d'identifier le générateur infinitésimal de leurs sous-suites convergentes à l'aide du théorème [4.1]. La différence $f(X_{t+h}) - f(X_t)$ se met sous la forme $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$ avec:

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 = &\ \sum_i \frac{\partial}{\partial X_i} f(X_t) \int_t^{t+h} \left(\frac{1}{\epsilon} F_i(\frac{s}{\epsilon^2}, X_t) + G_i(\frac{s}{\epsilon^2}, X_t, \epsilon) \right) ds \\
\Delta_2 = &\ \sum_{i,j} \int_t^{t+h} \int_t^s \left(\frac{1}{\epsilon} F_j(\frac{v}{\epsilon^2}, X_t) + G_j(\frac{v}{\epsilon^2}, X_t, \epsilon) \right) . \\
&\ \frac{\partial}{\partial X_j} \left[\left(\frac{1}{\epsilon} F_i(\frac{s}{\epsilon^2}, X_t) + G_i(\frac{s}{\epsilon^2}, X_t, \epsilon) \right) \frac{\partial}{\partial X_i} f(X_t) \right] dv ds \\
\Delta_3 = &\ \sum_{i,j,k} \int_t^{t+h} \int_t^s \int_t^v F_k \left(\frac{1}{\epsilon} F_k(\frac{u}{\epsilon^2}, X_t) + G_k(\frac{u}{\epsilon^2}, X_t, \epsilon) \right) . \\
&\ \frac{\partial}{\partial X_k} \left\{ \left(\frac{1}{\epsilon} F_j(\frac{v}{\epsilon^2}, X_t) + G_j(\frac{v}{\epsilon^2}, X_t, \epsilon) \right) \frac{\partial}{\partial X_j} \left[\left(\frac{1}{\epsilon} F_i(\frac{s}{\epsilon^2}, X_t) + G_i(\frac{s}{\epsilon^2}, X_t, \epsilon) \right) \frac{\partial}{\partial X_i} f(X_u) \right] \right\} du dv ds
\end{aligned}
$$

G étant borné sur le compact $B(0,M)$ les nouveaux termes apparaissant dans Δ_2 et Δ_3 n'interviennent pas dans la limite. Par exemple:

$$
\begin{aligned}
\delta_2 &= \left| \mathbb{E} \frac{\Phi}{h} \int_t^{t+h} \int_t^s G_j(\frac{v}{\epsilon^2}, X_t, \epsilon) \frac{\partial}{\partial X_j} G_i(\frac{s}{\epsilon^2}, X_t, \epsilon) \frac{\partial}{\partial X_i} f(X_t) ds dv \right| \\
\delta_2 &\leq Ch \mathbb{E} sup_{t,s>0, X \in B(0,M)} \left| G_j(t, X, 0) G_i(s, X, o) \right| \\
\delta_2 &\leq Ch \to o
\end{aligned}
$$

Et pour un terme couplant G et F:

$$
\begin{aligned}
\delta_2 &= \left| \mathbb{E} \frac{\Phi}{h} \int_t^{t+h} \int_t^s \frac{1}{\epsilon} F_j(\frac{v}{\epsilon^2}, X_t) \frac{\partial}{\partial X_j} G_i(\frac{s}{\epsilon^2}, X_t, \epsilon) \frac{\partial}{\partial X_i} f(X_t) ds dv \right| \\
\delta_2 &\leq \frac{Ch}{\epsilon} \mathbb{E} sup_{t,s>0, X \in B(0,M)} \left| F_j(t, X) G_i(s, X, o) \right| \\
\delta_2 &\leq \frac{Ch}{\epsilon} \to o
\end{aligned}
$$

Finalement seule la phase d'identification du générateur est différente. Ici c'est le nouveau terme apparaissant dans Δ_1 qui va fournir une contribution que l'on commence par identifier. Soit $\Delta(X) = \sum_i \frac{\partial}{\partial X_i} f(X) \int_t^{t+h} G_i(\frac{s}{\epsilon^2}, X, \epsilon) ds$.

$$
\begin{aligned}
\left| \mathbb{E} \frac{\Delta(X)}{h} - \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E} G(s, X, 0) . \nabla_X f(X) ds \right| &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \sum_i \mathbb{E} \left| G_i(\frac{s}{\epsilon^2}, X, \epsilon) - G_i(\frac{s}{\epsilon^2}, X, 0) \right| ds \\
&\leq O(\epsilon)
\end{aligned}
$$

On note $\mathcal{L}'_M f(X) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E} G(s, X, 0) . \nabla_X f(X) ds$ et on décompose:

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta(X_t) - h \mathcal{L}'_M f(X_t)}{h} &= a + b \\
a &= \frac{1}{h} \int_t^{t+T} G(\frac{s}{\epsilon^2}, X_t, \epsilon) . \nabla_X f(X_t) ds \\
b &= \frac{1}{h} \int_{t+T}^{t+h} G(\frac{s}{\epsilon^2}, X_t, \epsilon) . \nabla_X f(X_t) ds - \mathcal{L}'_M f(X_t)
\end{aligned}
$$

T est un temps intermédiaire tel que $\frac{T}{h} \to 0$. Donc:

$$
|\mathbb{E} \Phi a| \leq C \frac{T}{h} \mathbb{E} \sup_{t>0, X \in B(0,M)} |G(t, X, 0)| \to 0
$$

Et pour majorer $|\mathbb{E} \Phi b|$ on introduit un recouvrement de $B(0,M)$ par des boules dont le rayon tend vers 0. Avec les mêmes notations qu'auparavant on a:

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{E} \Phi b| &\leq \sum_m (T_m^1 + T_m^2 + T_m^3) \\
T_m^1 &= \left(\frac{1}{h} \int_{t+T}^{t+h} G(\frac{s}{\epsilon^2}, z_m, \epsilon) . \nabla_X f(z_m) ds - \mathcal{L}'_M f(z_m) \right) \mathbb{1}_{(X_t \in \mathcal{B}_m)} \\
T_m^2 &= \left(\frac{1}{h} \int_{t+T}^{t+h} \left[G(\frac{s}{\epsilon^2}, X_t, \epsilon) - G(\frac{s}{\epsilon^2}, z_m, \epsilon) \right] . \nabla_X f(z_m) ds \right) \mathbb{1}_{(X_t \in \mathcal{B}_m)} \\
T_m^3 &= \left(\mathcal{L}'_M f(z_m) - \mathcal{L}'_M f(X_t) \right) \mathbb{1}_{(X_t \in \mathcal{B}_m)}
\end{aligned}
$$

Le terme T_m^1 se majore par $C \left(O(\epsilon) + n^{d/2} \rho(\frac{T}{\epsilon^2}, M) \right)$ grâce à la propriété de mixing, les deux autres tendant vers 0 par régularité de G et de $\mathcal{L}'_M f$. D'où le théorème. □

4.3.2 Moyennisation

On considère un système de la forme:

$$\begin{cases} \frac{dX_t^\epsilon}{dt} = \frac{1}{\epsilon}F(\frac{t}{\epsilon^2}, \frac{t}{\epsilon}, t, X_t^\epsilon) \\ X_0^\epsilon = X_0 \end{cases}$$

F est un champ aléatoire en $\frac{t}{\epsilon^2}$ et X_t^ϵ, déterministe en $\frac{t}{\epsilon}$. La démonstration est identique à celle du cas général mis à part l'identification du générateur limite. On étudie donc:

$$\lim_{\epsilon\to 0} A(\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{h\epsilon^2}\int_t^{t+h}\int_t^s \mathbb{E}F_j(\frac{v}{\epsilon^2}, \frac{v}{\epsilon}, v, X_t)\frac{\partial}{\partial X_j}\left[F_i(\frac{s}{\epsilon^2}, \frac{s}{\epsilon}, s, X_t)\frac{\partial}{\partial X_i}f(X_t)\right] dsdv$$

Pour cela on introduit $B(\epsilon) = \frac{1}{h\epsilon^2}\int_t^{t+h}\int_t^s B(\frac{v}{\epsilon^2}, \frac{v}{\epsilon}, v, \frac{s}{\epsilon^2}, \frac{s}{\epsilon}, s)dsdv$. Après changement de variable, il vient:

$$\begin{aligned} B(\epsilon) = & \frac{\epsilon^2}{h}\int_0^{\frac{h}{\epsilon^2}}\int_{\frac{t}{\epsilon^2}}^{\frac{t+h}{\epsilon^2}-u} B(s+u, \epsilon(s+u), \epsilon^2(s+u), s, \epsilon s, \epsilon^2 s)dsdu \\ & = \frac{\epsilon^2}{h}\int_0^{\frac{h}{\epsilon^2}}\int_{\frac{t}{\epsilon^2}}^{\frac{t+h}{\epsilon^2}-u} B(s+u, \epsilon(s+u), t, s, \epsilon s, t)dsdu + \delta \\ & = \frac{\epsilon^2}{h}\int_0^{\frac{h}{\epsilon^2}}\int_{\frac{t}{\epsilon^2}}^{\frac{t+h}{\epsilon^2}-u} B(s+u, \epsilon s, t, s, \epsilon s, t)dsdu + \delta + \delta' \end{aligned}$$

avec:

$$\begin{aligned} |\delta| & \leq \frac{\epsilon^2}{h}\int_0^{\frac{h}{\epsilon^2}}\int_{\frac{t}{\epsilon^2}}^{\frac{t+h}{\epsilon^2}-u}\left[(\epsilon^2 s - t)(\|\frac{\partial B}{\partial x_3}\|_\infty + \|\frac{\partial B}{\partial x_6}\|_\infty) + \epsilon^2 u\|\frac{\partial B}{\partial x_3}\|_\infty\right] dsdu \\ & \leq C\frac{h^2}{\epsilon^2} \\ |\delta'| & \leq \frac{\epsilon^2}{h}\int_0^{\frac{h}{\epsilon^2}}\int_{\frac{t}{\epsilon^2}}^{\frac{t+h}{\epsilon^2}-u} \epsilon u\|\frac{\partial B}{\partial x_2}\|_\infty dsdu \\ & \leq C\frac{h^2}{\epsilon^3} \end{aligned}$$

Pour que δ et δ' tendent vers 0, il suffit que h soit de la forme $\epsilon^{3/2+\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1/2$ ce qui rend la condition de mixing à imposer plus stricte. Il faut en effet pouvoir choisir n et T tels que:

$$\begin{cases} \frac{n^{d/2}}{\sqrt{h}}\rho(\frac{h}{\epsilon^2}, M) + \frac{1}{n\epsilon} + \sqrt{\frac{T}{h}} + n^{d/4}\rho(\frac{T}{\epsilon^2}, M) + \frac{\sqrt{h}}{n\epsilon} + \frac{h}{\epsilon} \to 0 \\ \sqrt{\frac{T}{h}} + n^{d/2}\rho(\frac{T}{\epsilon^2}, M) + \frac{h}{\epsilon^2} \to 0 \end{cases}$$

d'où la condition $\forall M, \alpha > 0, \lim_{T\to\infty} T^{d+3/2+\alpha}\rho(T, M) = 0$. On utilise alors le lemme suivant:

Lemme 4.7
Soit $F(x, y)$ une fonction $C_b^2(\mathbb{R}_2, \mathbb{R})$ telle que:

- $\|\frac{\partial F}{\partial y}\| - \infty < \infty$

- $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F(x,y)dx$ *existe uniformément en* $y \geq 0$ *et est à dérivée bornée.*

alors:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\epsilon^2}{h}\int_{\frac{t}{\epsilon^2}}^{\frac{t+h}{\epsilon^2}} F(u,\epsilon u)du = \lim_{T_1\to\infty}\lim_{T_2\to\infty} \frac{1}{T_1T_2}\int_0^{T_1}\left[\int_0^{T_2} F(u,s)du\right]ds$$

Démonstration :
On écrit:

$$\frac{\epsilon^2}{h}\int_{\frac{t}{\epsilon^2}}^{\frac{t+h}{\epsilon^2}} F(u,\epsilon u)du = \frac{\epsilon^2}{h}\sum_{k\in K}\int_{\frac{t_k}{\epsilon}}^{\frac{t_{k+1}}{\epsilon}} F(u,\epsilon u)du$$

avec:

$$\left\{\begin{array}{l} t_0 = \frac{t}{\epsilon} \\ t_K = \frac{t+h}{\epsilon} \\ card(K) = \frac{h}{\epsilon\Delta t_k} \end{array}\right.$$

On a $\int_{\frac{t_k}{\epsilon}}^{\frac{t_{k+1}}{\epsilon}} F(u,\epsilon u)du = \int_{\frac{t_k}{\epsilon}}^{\frac{t_{k+1}}{\epsilon}} F(u,t_k)du + \delta$ avec $|\delta| \leq \int_{\frac{t_k}{\epsilon}}^{\frac{t_{k+1}}{\epsilon}} \epsilon u \|\frac{\partial F}{\partial y}\|_\infty \leq C\frac{(\Delta t_k)^2}{\epsilon}$

De plus, d'après le lemme[4.4]:

$$\int_{\frac{t_k}{\epsilon}}^{\frac{t_k}{\epsilon}+\frac{\Delta t_k}{\epsilon}} F(u,t_k)du = \frac{\Delta t_k}{\epsilon}\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int_0^T F(u,t_k)du + o(1)\right)$$

pourvu que:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\Delta t_k}{\epsilon} \to 0 \\ \frac{\Delta t_k}{t_k} \to 0 \\ \frac{t_k}{\epsilon} \end{array}\right.$$

et

$$\sum_k \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(u,t_k)du = \frac{1}{\Delta t_k}\int_{\frac{t}{\epsilon}}^{\frac{t+h}{\epsilon}} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(u,s)duds + O(\Delta t_k card(K))$$

Finalement:

$$\begin{array}{rl} \frac{\epsilon^2}{h}\int_0^{\frac{h}{\epsilon^2}} F(u,\epsilon u)du & = \frac{\epsilon^2}{h}\frac{\Delta t_k}{\epsilon}\frac{1}{\Delta t_k}\int_{\frac{t}{\epsilon}}^{\frac{t+h}{\epsilon}} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(u,s)duds \\ & +O(\frac{\epsilon^2}{h}\frac{\Delta t_k}{\epsilon}\Delta t_k card(K)) + O(\frac{\epsilon^2}{h}card(K)\frac{\Delta t_k}{\epsilon}o(1)) + O(card(K)(\Delta t_k)^2\frac{\epsilon}{h}) \\ & = \frac{\epsilon}{h}\int_{\frac{t}{\epsilon}}^{\frac{t+h}{\epsilon}} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(u,s)duds + O(\Delta t_k) + o(1) \end{array}$$

On choisit alors la subdivision de telle sorte que son pas tende vers 0 moins vite que ϵ et on réapplique le lemme [4.4]. □
Le nouveau générateur s'obtient en utilisant le lemme ci-dessus et le théorème de convergence dominée:

$$\mathcal{L}_t f(X) = \int_0^\infty \left\{\lim_{T_1\to\infty}\lim_{T_2\to\infty}\frac{1}{T_1T_2}\int_0^{T_1}\left[\int_0^{T_2}\mathbb{E}F(u+v,s,t,X).\nabla_X\left(F(v,s,t,X).\nabla_X f(X)\right]dv\right)ds\right\}du$$

Les hypothèses vérifiées par F sont analogues à celles du cas général; seule l'hypothèse de mixing est plus forte.

4.3.3 cas complexe

Dans le cas où F est un champ à valeurs complexes le calcul du générateur n'a a priori plus de sens. On peut cependant calculer les dérives sans avoir à séparer parties imaginaires et parties réelles si F est holomorphe.

Lemme 4.8
Soit $F(t,Z)$ un champ aléatoire à valeurs dans $\mathbb{C}^{\,\mathrm{d}}$ dont les parties réelles et imaginaires vérifient les hypothèses du théorème [4.3] et dont chacune des composantes est holomorphe en chacune des coordonnées. Soit Z_t^ϵ la solution du système différentiel:

$$\begin{cases} \frac{dZ_t^\epsilon}{dt} = \frac{1}{\epsilon} F(\frac{t}{\epsilon^2}, Z_t^\epsilon) \\ Z_0^\epsilon = Z_0 \end{cases}$$

alors Z_t^ϵ converge en loi vers une diffusion Z_t (i.e. les parties réelle et imaginaire convergent en loi vers des diffusions) et, pour chacune des composantes, on a:

$$d\mathbb{E}(z_t^i) = \left(\int_0^\infty \lim_{T\to\infty} \int_0^T \mathbb{E} \begin{bmatrix} F_1(u,Z_t) \\ \vdots \\ F_d(u,Z_t) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{\partial F_i}{\partial z_1}(u+v,Z_t) \\ \vdots \\ \frac{\partial F_i}{\partial z_d}(u+v,Z_t) \end{bmatrix} dudv \right) dt$$

Démonstration :

Il suffit de séparer parties réelles et imaginaires; on écrit:

$$\begin{cases} Z_t = X_t + \imath Y_t \\ F_i(t,Z) = G_{2i-1}(t,X,Y) + \imath G_{2i}(t,X,Y) \end{cases}$$

On identifie alors les coefficients de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial f}{\partial y_i}$ dans le calcul du générateur.

$$d\mathbb{E}(x_t^i) = \int_0^\infty \lim_{T\to\infty} \int_0^T \mathbb{E} \begin{bmatrix} G_1(u,X_t,Y_t) \\ G_2(u,X_t,Y_t) \\ \vdots \\ G_{2d-1}(u,X_t,Y_t) \\ G_{2d}(u,X_t,Y_t) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{\partial G_{2i-1}}{\partial x_1}(u+v,X_t,Y_t) \\ \frac{\partial G_{2i-1}}{\partial y_1}(u+v,X_t,Y_t) \\ \vdots \\ \frac{\partial G_{2i-1}}{\partial x_d}(u+v,X_t,Y_t) \\ \frac{\partial G_{2i-1}}{\partial y_d}(u+v,X_t,Y_t) \end{bmatrix} dudvdt$$

$$d\mathbb{E}(y_t^i) = \int_0^\infty \lim_{T\to\infty} \int_0^T \mathbb{E} \begin{bmatrix} G_1(u,X_t,Y_t) \\ G_2(u,X_t,Y_t) \\ \vdots \\ G_{2d-1}(u,X_t,Y_t) \\ G_{2d}(u,X_t,Y_t) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{\partial G_{2i}}{\partial x_1}(u+v,X_t,Y_t) \\ \frac{\partial G_{2i}}{\partial y_1}(u+v,X_t,Y_t) \\ \vdots \\ \frac{\partial G_{2i}}{\partial x_d}(u+v,X_t,Y_t) \\ \frac{\partial G_{2i}}{\partial y_d}(u+v,X_t,Y_t) \end{bmatrix} dudvdt$$

$$d\mathbb{E}(x_t^i + \imath y_t^i) = \int_0^\infty \lim_{T\to\infty} \int_0^T \mathbb{E} \begin{bmatrix} G_1(u, X_t, Y_t) \\ G_2(u, X_t, Y_t) \\ \vdots \\ G_{2d-1}(u, X_t, Y_t) \\ G_{2d}(u, X_t, Y_t) \end{bmatrix} .$$
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial G_{2i-1}}{\partial x_1}(u+v, X_t, Y_t) + \imath \frac{\partial G_{2i}}{\partial x_1}(u+v, X_t, Y_t) \\ \frac{\partial G_{2i-1}}{\partial y_1}(u+v, X_t, Y_t) + \imath \frac{\partial G_{2i}}{\partial y_1}(u+v, X_t, Y_t) \\ \vdots \\ \frac{\partial G_{2i-1}}{\partial x_d}(u+v, X_t, Y_t) + \imath \frac{\partial G_{2i}}{\partial x_d}(u+v, X_t, Y_t) \\ \frac{\partial G_{2i-1}}{\partial y_d}(u+v, X_t, Y_t) + \imath \frac{\partial G_{2i}}{\partial y_d}(u+v, X_t, Y_t) \end{bmatrix} dudvdt$$

$$d\mathbb{E}(x_t^i + \imath y_t^i) = \int_0^\infty \lim_{T\to\infty} \int_0^T \sum_k \mathbb{E} \begin{bmatrix} G_{2k-1}(u, X_t, Y_t) \\ G_{2k}(u, X_t, Y_t) \end{bmatrix} .$$
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial G_{2i-1}}{\partial x_k}(u+v, X_t, Y_t) + \imath \frac{\partial G_{2i}}{\partial x_k}(u+v, X_t, Y_t) \\ \frac{\partial G_{2i-1}}{\partial y_k}(u+v, X_t, Y_t) + \imath \frac{\partial G_{2i}}{\partial y_k}(u+v, X_t, Y_t) \end{bmatrix} dudvdt$$

$$d\mathbb{E}(x_t^i + \imath y_t^i) = \int_0^\infty \lim_{T\to\infty} \int_0^T \sum_k \mathbb{E} \frac{1}{2} \left[G_{2k-1}(u, X_t, Y_t) + \imath G_{2k}(u, X_t, Y_t) \right] .$$
$$\left[\frac{\partial (G_{2i-1} + G_{2i})}{\partial x_k}(u+v, X_t, Y_t) - \imath \frac{\partial (G_{2i-1} + \imath G_{2i})}{\partial y_k}(u+v, X_t, Y_t) \right] dudvdt$$

Les termes résiduels dans le dernier développement sont nuls parce que F_i est holomorphe:

$$\begin{cases} \frac{\partial G_{2i-1}}{\partial x_k} = \frac{\partial G_{2i}}{\partial y_k} \\ \frac{\partial G_{2i-1}}{\partial y_k} = -\frac{\partial G_{2i}}{\partial x_k} \end{cases}$$

Comme $\frac{\partial F_i}{\partial Z_k} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_k} - \imath \frac{\partial F_i}{\partial y_k} \right]$ on a bien le résultat annoncé. □

Remarque 4.9

- Si $F(t, Z)$ n'est pas holomorphe en une des coordonnées le résultat demeure nanmoins vrai pour les coordonnées restantes (cf le calcul des dérives dans 2.2).
- Le résultat précédent admet les mêmes généralisations que le théorème [4.3] (moyennisation, cas non homogène en temps, etc...)
- Le calcul de la matrice de diffusion est, en général, plus délicat puisqu'on ne peut pas connaître son rang a priori à cause de la moyennisation. Cependant dans le cas simple où F est de la forme $F(t, Z) = \nu(t)G(Z)$, ν étant un processus réel et G une fonction déterministe holomorphe de $\mathbb{C}_d$ dans $\mathbb{C}_d$ un calcul simple montre que le processus limite vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$\begin{cases} \forall i \in [1, d], dZ_t^i = \sqrt{\alpha} G_i(Z_t) dW_t + \sqrt{\alpha} G(Z_t).\nabla_Z G_i(Z_t) dt \\ \text{avec: } \alpha = \int_0^\infty \lim_{T\to\infty} \int_o^T \mathbb{E}\nu(u)\nu(u+v) dudv \\ W_t \text{ étant un brownien standard} \end{cases}$$

4.4 Application

4.4.1 Théorie d'O'Doherty-Anstey

Soit $\nu(t)$ un processus aléatoire gaussien réel centré stationnaire, de classe C^2 satisfaisant la propriété de mixing avec des coefficients $\rho(t)$ et $r(t)$ à décroissance rapide. Nous considérons le système différentiel suivant:

$$\begin{cases} \frac{dX_t^\epsilon}{dt} = \frac{1}{\epsilon}\nu(\frac{t}{\epsilon^2} + X_t^\epsilon)X_t^\epsilon \cos(\frac{t}{\epsilon^2}) \\ X_0^\epsilon = X_0 \end{cases}$$

Les deux lemmes suivants vont nous servir à vérifier nos hypothèses:

Lemme 4.10
(Ivanov[4]): Soit $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, un processus aléatoire centré de coefficient de mixing $r(t)$ (non nécessairement stationnaire) tel que:

- $\exists m \in \mathbb{N}^*, \exists \delta > 0, \forall t \in R, \mathbb{E}|\xi(X)|^{2m+\delta} \leq k < \infty$
- *$r(t)$ est tel que* $\int_0^\infty t^{m-1} r^{\frac{\delta}{2m+\delta}}(t)dt < \infty$

Alors $\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T^m}\mathbb{E}\left[\int_0^T \xi(t)dt\right]^{2m} < \infty$

Lemme 4.11
(Rozanov[3]): pour un processus réel gaussien on a:

$$r(t) \leq \rho(t) \leq 2\pi r(t)$$

On a $\rho(t, M) \leq \rho(t - 2M)$ donc $\rho(t, M)$ et $\rho(t)$ ont le même comportement à l'infini. De plus:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{T^2}\mathbb{E}\sup_{X\leq M}\left(\int_0^T \nu(X+t)dt\right)^4 &\leq \tfrac{1}{T^2}\mathbb{E}\sup_{X\leq M}\left(\int_X^{T+X} \nu(t)dt\right)^4 \\ &\leq \tfrac{C}{T^2}\left[\mathbb{E}\left(\int_0^T \nu(t)dt\right)^4 + \mathbb{E}\sup_{X\leq M}\left(\int_T^{T+X} \nu(t)dt\right)^4\right] \\ &+ \tfrac{C}{T^2}\left[\mathbb{E}\sup_{X\leq M}\left(\int_0^X \nu(t)dt\right)^4\right] \\ &\leq \tfrac{C}{T^2}\left[\mathbb{E}\left(\int_0^T \nu(t)dt\right)^4 + M^4\mathbb{E}\sup_{t\leq T+M}\nu(t)^4\right] \\ &< \infty \end{aligned}$$

En effet, le coefficient de mixing étant à décroissance rapide, $\limsup \frac{1}{T^2}\mathbb{E}\left(\int_0^T \nu(t)dt\right)^4 < \infty$. Les processus $\nu(t)$, $\dot{\nu}(t)$,$\nu(t)\cos(t)$, $\dot{\nu}(t)\cos(t)$,etc... ayant les mêmes coefficients de

mixing on a:

$$\begin{array}{ll}
\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T^2}\mathbb{E}\sup_{X\leq M}\left(\int_0^T \nu(t+X)\cos(t+X)dt\right)^4 & <\infty \\
\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T^2}\mathbb{E}\sup_{X\leq M}\left(\int_0^T \dot{\nu}(t+X)\cos(t+X)dt\right)^4 & <\infty \\
\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T^2}\mathbb{E}\sup_{X\leq M}\left(\int_0^T\int_0^s \nu(t+X)\cos(t+X)\dot{\nu}(s+X)\cos(s)dsdt\right)^2 & <\infty \\
\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T^2}\mathbb{E}\sup_{X\leq M}\left(\int_0^T\int_0^s \nu(t+X)\cos(t+X)\ddot{\nu}(s+X)\cos(s)dsdt\right)^2 & <\infty
\end{array}$$

Alors X_t^ϵ converge en loi vers la diffusion de générateur infinitésimal:

$$\begin{array}{rl}
\mathcal{L}f(x) = & \left(\frac{x^2}{2}\int_0^\infty \mathbb{E}\nu(0)\nu(u)\cos(u)du\right)\frac{d^2f}{dx^2} \\
& + \left(\frac{x^2}{2}\int_0^\infty \mathbb{E}\nu(0)\dot{\nu}(u)\cos(u)du + \frac{x}{2}\int_0^\infty \mathbb{E}\nu(0)\nu(u)\cos(u)du\right)\frac{df}{dx}
\end{array}$$

L'application à la théorie d'O'Doherty-Anstey se fait de la même manière: le passage à la dimension d ne pose pas de problème et le champ $G(t,X,\epsilon)$ n'intervient pas dans le calcul du générateur.

4.4.2 Equation de transport

Ce théorème s'applique directement au problème de la convergence en loi de la solution classique de l'EDP hyperbolique suivante:

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{\epsilon}v(x,\frac{t}{\epsilon^2}).\nabla_x u(x,t) \\
u(x,0) = u_0(x)
\end{array}\right.$$

u_0 est une fonction continue et $v(x,t)$ est un champ aléatoire vérifiant les hypothéses H_1 à H_5. La solution classique est $u(x,t) = u_0(\phi_t^{x,t})$ où $\phi_s^{x,t}$ est le processus solution du systéme différentiel:

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{d\phi_s^{x,t}}{ds} = \frac{1}{\epsilon}v(\phi_s^{x,t},\frac{s}{\epsilon^2}) \\
\phi_0^{x,t} = x
\end{array}\right.$$

Lorsque $\epsilon\to 0$, $\phi_s^{x,t}$ converge en loi vers une diffusion $Z_s^{x,t}$ et, comme u_0 est continue, la solution $u(x,t)$ converge aussi en loi vers $u_0(Z_t^{x,t})$. Pour avoir la convergence en loi du processus il faut a priori étudier la dépendance de la solution de l'équation des caractéristiques en fonction des conditions initiales et donc établir un théorème de convergence de flots stochastiques (cf Kunita[7]). Cependant, dans des cas simples, on peut conclure directement.

En particulier, sur $\mathbb{R}^2$, si $v(X,t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x,t) \end{bmatrix}$ alors $u\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},t\right)$ converge en loi vers $u_0\begin{pmatrix} x \\ y+\sqrt{\alpha(x)}B_t \end{pmatrix}$ où B_t est un brownien standard et où:

$$\alpha(x) = \int_0^\infty \lim_{T\to\infty}\int_0^T \mathbb{E}f(x,u+v)f(x,u)dudv$$

La loi limite est alors solution de l'équation au sens de Stratonovitch suivante:

$$du_t = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\alpha(x)} \end{bmatrix} . \nabla_X u(X,t) o dBt$$

Références

[1] M.Asch, W.Kohler, G.Papanicolaou, M.Postel et B.White *Frequency content of randomly scattered signals* SIAM review,Vol.33,No.4,pp.519-625(12/1991)

[2] S.Ethier et T.Kurtz *Markov Processes* Wiley (1986)

[3] I.Ibrahimov et Y.Rozanov *Processus aléatoires gaussiens* Ed.Mir(1974)

[4] A.Ivanov et N.Leonenko *Statistical analysis of random fields* Mathematics and its application,Kluwer,(1989)

[5] H.Kesten et G.Papanicolaou *A limit theorem for turbulent diffusion* Communication in mathematical physics 65,97-128,(1979)

[6] W.Kohler et G.Papanicolaou *Asymptotic Theory of Mixing Stochastic Ordinary Differential Equations* Comm.Pure.Applied. Math. Vol XXVII pp 641-668 (1974)

[7] H.Kunita *Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations* Cambridge University Press (1990)

[8] H.Kushner *Approximation and Weak Convergence Methods for Random Processes* M.I.T. press (1984)

[9] B.Lukacher et E.Merzbach *Asymptotic results for mixing random ordinary differential equations* à paraître

[10] G.Papanicolaou,D.Stroock et S.Varadhan *Martingale Approach to some Limit Theorems* Duke Turbulence Conference Duke.Univ.Math. Series III (1977)

[11] A.Skorokhod *Asymptotic Methods in the Theory of Stochastic Differential Equations* Translations of Mathematical Monographs,78, (1989)

[12] D.Stroock et S.Varadhan *Multidimensionnal Diffusion Processes* Springer-Verlag,233,(1979)