UNE METHODE DE REGULARISATION POUR CALCULER LES CHARGES LIMITES D'UNE STRUCTURE ELASTOPLASTIQUE

H. EL FEKIH [1] T. HADHRI [1, 2]

R.I. N° 275 *Janvier 1993*

[1] Laboratoire de Mathématiques Appliquées - Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis - 1002 Tunis - Tunisie.

[2] CMAP - Ecole Polytechnique - 91128 Palaiseau Cedex - France.

Résumé :

On présente dans cette étude une méthode de régularisation pour calculer les charges limites d'un solide élastoplastique régi par le modèle de Hencky en contraintes planes. Nous utilisons pour cela, de nouvelles caractérisations de ces charges limites, qui sont données par des problèmes de minimisation convexes (El Fekih et Hadhri [2]).

Abstract :

In this paper we present a regularization method to compute the limit loads of an elastoplastic structure governed by a plane stresses Hencky model. We use a new caracterization of these limit loads which is given by a convex minimization problem
(El Fekih and Hadhri [2]).

1 . INTRODUCTION

Nous considérons un solide élastoplastique, homogène, isotrope, occupant un domaine borné de IR^3. Nous supposons que les chargements externes et le déplacement imposé induisent un état de contraintes planes. Ceci nous amène à considérer un domaine Ω borné de IR^2 avec un convexe d'élasticité K borné (Hadhri [4]), soumis à des efforts surfaciques λf, λ étant le paramètre de chargement, et à des efforts linéïques λF sur une partie de sa frontière. Sur l'autre partie de la frontière de Ω, le déplacement est imposé à u_o.

Nous rappelons dans la section 2, des résulats concernant les nouvelles caractérisations des charges limites $\underline{\lambda}$ et $\overline{\lambda}$, données par des problèmes de minimisation convexes (El Fekih et Hadhri [2]).

Nous donnons par la suite, dans la section 3, une méthode de régularisation pour calculer les deux charges limites $\underline{\lambda}$ et $\overline{\lambda}$. Cette méthode consiste, essentiellement, à remplacer la norme L^∞ qui intervient dans les expressions de $\underline{\lambda}$ et $\overline{\lambda}$, par la norme L^q et à faire tendre q vers l'infini.

2. CARACTERISATION DES CHARGES LIMITES

2.1 PRESENTATION DU PROBLEME

Nous considérons un solide élastoplastique, homogène, isotrope qui occupe un domaine Ω de IR^2, vérifiant :

(2.1) Ω est un borné régulier de IR^2.

Le solide est soumis à des forces surfaciques λf agissant sur Ω, et à des efforts linéïques λF sur une partie Γ_F de la frontière de Ω, où λ est un réel appelé paramètre de chargement. Sur l'autre partie Γ_U de la frontière, le déplacement est imposé.

Nous supposons que les deux parties Γ_U et Γ_F de la frontière de Ω, notée $\partial\Omega$, sont disjointes et que $\bar{\Gamma}_U \cup \bar{\Gamma}_F = \Gamma \equiv \partial\Omega$.

La loi de comportement que nous adoptons, est de type Hencky.

Nous désignons par σ le champ de contraintes, et par u le champ de déplacement. Le problème aux limites dont le couple (σ, u) est solution, est donné par les équations suivantes :

(2.2) $div\ \sigma + \lambda f = 0$ *dans* Ω

(2.3) $\sigma . \nu = \lambda F$ *sur* Γ_F

(2.4) $u = u_o$ *sur* Γ_U

(2.5) $\sigma(x) = P_K\left(A^{-1}\varepsilon(u(x))\right)$ *[dx] p.p.*

L'équation (2.5) qui relie le tenseur de contraintes σ au tenseur de déformations $\varepsilon(u)$ est la loi de comportement de Hencky.

Nous avons noté :

K : le convexe d'élasticité, vérifiant :

(2.6) K est un convexe fermé borné de IR^4_{sym}, contenant zéro dans son intérieur.

$$IR^4_{sym} = \{\tau = (\tau_{ij}) \in IR^4 ; \tau_{ij} = \tau_{ji}, \forall i,j \leq 2\}$$

ν : la normale unitaire à $\partial\Omega$, extérieure à Ω.

A : l'opérateur d'élasticité supposé vérifier les conditions classiques de coercivité

et de continuité.

P_K : la projection sur K relativement au produit scalaire $<.\ ,\ .>_A$ défini par :

$$< \sigma\ ,\ \tau >_A = A\sigma\ .\ \tau\ = \sum_{i,j,k,h=1}^{2} A_{ijkh}\,\sigma_{ij}\,\tau_{kh}\ , \qquad \sigma,\ \tau \in IR^4_{sym}$$

$\varepsilon(u)$: le tenseur de déformations linéarisé défini par ses composantes :

$$\varepsilon_{ij}(u)\ = \frac{1}{2}\ \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\ +\ \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\ \right) \qquad ,\qquad 1 \le i, j \le 2.$$

Nous supposons que :

(2.7) $\qquad f \in \left(L^2(\Omega)\right)^2 \qquad , \qquad F \in \left(L^\infty(\Gamma)\right)^2$

(2.8) $\qquad u_o$ est la restriction à Γ_U de la trace sur Γ d'un élément de $\left(H^1(\Omega)\right)^2$ que nous notons aussi u_o .

Le problème des charges limites auquel on s'intéresse, peut être formulé de la façon suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \underline{\lambda} \ge 0 \text{ et } \overline{\lambda} > 0, \text{ tels que pour tous } \lambda \in]\underline{\lambda}, \overline{\lambda}[, \text{ il existe un} \\ \text{tenseur de contraintes } \sigma \text{ dans le convexe } K \text{ p.p. et vérifian} \\ \\ \text{équations (2.2) et (2.3) et pour } \lambda = \underline{\lambda} \text{ ou } \lambda = \overline{\lambda}, \text{ (2.2) et (2.3)} \\ \text{n'admettent aucune solution } \sigma \text{ dans } K \text{ p.p} \end{cases}$$

Plusieurs auteurs se sont intéressés à ce problème. Hadhri [4, 5] et Témam [6] ont montré que $\underline{\lambda}$ et $\overline{\lambda}$ sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de l'ensemble des réels λ pour lesquels l'énergie potentielle associée au système de Hencky (2.2), ..., (2.5) est minorée, ou de manière équivalente, le problème aux contraintes correspondant au système de Hencky admet une solution.

2.2 NOUVELLES CARACTERISATIONS DES CHARGES LIMITES

Utilisant les résultats de Hadhri [4] et Témam [6], nous avons explicité deux nouvelles expressions des charges limites (El Fekih et Hadhri [2]). Avant de rappeler ces nouvelles caractérisations, nous donnons quelques outils nécessaires.

Nous considérons le problème élastique en contraintes planes suivant :

$$(2.9)\qquad \begin{cases} \text{Trouver } (\sigma^e, u^e) \text{ tels que} & \\ div\,\sigma^e + f = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma^e . \nu = F & \text{sur } \Gamma_F \\ u^e = u_o & \text{sur } \Gamma_U \\ \sigma^e = A^{-1} \varepsilon^e(u^e) & (Loi\ de\ Hooke) \end{cases}$$

et nous supposons que :

(2.10) les données f , F et u_o vérifient (2.7) et (2.8) et sont telles que :

$$(2.11)\qquad \sigma^e \in L^\infty(\Omega\ ;\ IR^4_{sym})$$

Lorsque $f \in (L^p(\Omega))^2$, $F \in (W^{1-(1/p),p}(\Gamma))^2$, $p \in]2,\ +\infty[$, $\Gamma = \Gamma_F$ et $\int_\Omega f\,dx + \int_\Gamma F\,d\Gamma = 0$, on peut vérifier d'après Christiansen [1] que la condition (2.11) est satisfaite.

Nous utilisons les espaces de Hilbert suivants :

$$Y = \left\{ \eta \in L^2(\Omega; IR^4_{sym})\ ;\ div\,\eta \in (L^2(\Omega))^2 \right\}$$

muni de la norme :

$$\| \eta \|_Y = \| \eta \|_{L^2(\Omega\ ;\ IR^4_{sym})} + \| div\ \eta \|_{(L^2(\Omega))^2}$$

et

$$(2.12)\qquad V = \left\{ \eta \in Y\ ;\ div\,\eta = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \eta \cdot \nu = 0 \text{ sur } \Gamma_U \right\}.$$

muni de la norme induite par celle de Y :

(2.13) $\| \eta \|_V = \| \eta \|_Y = \| \eta \|_{L^2(\Omega ; IR^4_{sym})}$ pour $\eta \in V$

Nous donnons à présent les nouvelles caractérisations des charges limites $\underline{\lambda}$ *et* $\overline{\lambda}$:

Théorème 2.1 (El Fekih et Hadhri [2])

Sous les hypothèses (2.1), (2.6), (2.10) et (2.11), les charges limites $\underline{\lambda}$ *et* $\overline{\lambda}$ *sont données par :*

(2.14) $$\overline{\lambda} = \frac{1}{\inf_{\eta \in V_\infty} \| j_K(\sigma^e - \eta)(x) \|_{L^\infty(\Omega)}}$$

(2.15) $$\underline{\lambda} = \frac{-1}{\inf_{\eta \in V_\infty} \| j_K(\sigma^{-e} - \eta)(x) \|_{L^\infty(\Omega)}}$$

où nous avons noté :

(2.16) $$V_\infty = V \cap L^\infty(\Omega ; IR^4_{sym})$$

muni de la norme induite par celle de $L^\infty(\Omega ; IR^4_{sym})$

j_K *: la fonction jauge du convexe d'élasticité K*

σ^e *: la solution du problème élastique (2.9)*

σ^{-e} *: la solution du problème élastique (2.9) où les chargements externes*

f et F sont remplacés respectivement par -f et -F.

En outre les deux charges limites $\underline{\lambda}$ *et* $\overline{\lambda}$ *sont indépendantes du déplacement* u_o *imposé sur* Γ_U . n

3. CALCUL DES CHARGES LIMITES PAR UNE METHODE DE REGULARISATION

Dans la section précédente, nous avons donné deux expressions explicites des charges limites $\underline{\lambda}$ et $\overline{\lambda}$ d'une structure élastoplastique régie par le modèle de Hencky en contraintes planes.

Notons H la fonctionnelle convexe définie par :

$$H(\eta) = \| j_K(\sigma^e - \eta(\cdot)) \|_{L^\infty(\Omega)} \tag{3.1}$$

qui intervient dans l'expression (2.14) de la charge limite $\overline{\lambda}$.

La fonctionnelle H définie par (3.1) n'est pas différentiable. Ceci est dû à la présence de la norme $\| \ \|_{L^\infty}$ dans son expression. Or les algorithmes classiques d'optimisation nécessitent la régularité de la fonctionnelle à optimiser. C'est pour cette raison que nous proposons de régulariser la fonctionnelle H en remplaçant la norme L^∞ par la norme L^q , l'espace V_∞ par l'espace V_q qui sera défini par (3.4), et en faisant tendre q vers l'infini.

3.1 REGULARISATION DU PROBLEME

Nous définissons, pour $q \geq 2$, la fonctionnelle suivante, à valeurs dans IR_+ :

$$H_q(\eta) = \frac{1}{(mes(\Omega))^{1/q}} \| j_K(\sigma^e - \eta(\cdot)) \|_{L^q(\Omega)} \ , \quad \eta \in L^q(\Omega ; IR^4_{sym}) \tag{3.2}$$

où $mes(\Omega) = \int_\Omega dx$

Rappelons que l'on se place sous les hypothèses (2.1), (2.6), (2.10) et que la solution élastique σ^e du problème (2.9) vérifie :

$$\sigma^e \in L^\infty(\Omega ; IR^4_{sym}) \tag{3.3}$$

et par suite, grâce à (2.6), H_q est finie sur $L^q(\Omega ; IR^4_{sym})$.

Nous considérons, pour $q \geq 2$, l'espace de Banach V_q défini par :

$$V_q = V \cap L^q(\Omega ; IR^{4}_{sym}) \tag{3.4}$$

muni de la norme induite par celle de $L^q(\Omega ; IR^{4}_{sym})$:

$$\| \eta \|_{V_q} = \| \eta \|_{L^q(\Omega ; IR^{4}_{sym})} \tag{3.5}$$

$\| \eta \|_{L^q(\Omega ; IR^{4}_{sym})}$ étant la norme classique de $L^q(\Omega ; IR^{4}_{sym})$.

et la suite de problèmes de minimisation régularisés suivants :

$$\inf_{\eta \in V_q} H_q(\eta) \tag{3.6}$$

où H_q est la fonctionnelle définie par (3.2).

Avant de préciser le sens de la régularisation, qui sera donné au §3.3, nous donnons quelques résultats nécessaires à cette étude.

3.2 RESULTATS PRELIMINAIRES

Pour montrer l'existence de solutions des problèmes de minimisation (3.6), nous énonçons la

Proposition 3.1

Soit $q \geq 2$. Sous les hypothèses (2.1), (2.6) et (3.3), la fonctionnelle H_q est convexe et lipschitzienne, donc continue, sur $L^q(\Omega ; IR^{4}_{sym})$. De plus, elle vérifie :

$$\liminf_{\|\eta\|_{V_q} \to +\infty} H_q(\eta) = +\infty \tag{3.7}$$

Démonstration :

Soit $q \geq 2$.

i) La convexité de H_q découle de la convexité et la positivité de la fonction jauge j_K et de la convexité de la norme $\|\cdot\|_{L^q(\Omega)}$.

Montrons que H_q est lipschitzienne sur $L^q(\Omega ; IR^4_{sym})$:

Utilisant la sous additivité de j_K, et le fait que le convexe K contient l'origine dans son intérieur, on obtient :

$$(3.8) \qquad \forall\, \tau, \xi \in IR^4_{sym} \qquad |j_K(\tau) - j_K(\xi)| \leq \alpha \, |\tau - \xi|_{IR^4_{sym}} ,$$

où α est une constante positive, et $|\cdot|_{IR^4_{sym}}$ la norme de IR^4_{sym}.

Il s'en suit grâce à (3.2) et (3.5) que H_q est lipschitzienne et donc continue sur $L^q(\Omega ; IR^4_{sym})$.

ii) Soit η_n une suite d'éléments de V_q vérifiant :

$$(3.9) \qquad \|\eta_n\|_{V_q} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

et supposons que $\liminf_{n \to +\infty} H_q(\eta_n) \neq +\infty$. Il existe alors une constante $A > 0$ et une sous suite η_{n_k} de η_n telles que :

$$\frac{1}{(mes(\Omega))^{1/q}} \left\| j_K\left(\sigma^e - \eta_{n_k}\right) \right\|_{L^q(\Omega)} \leq A,$$

et par suite, puisque K est borné dans IR^4_{sym}, on a :

$$(3.10) \qquad \left\| \sigma^e - \eta_{n_k} \right\|_{L^q(\Omega ; IR^4_{sym})} \leq C \; (mes\,(\Omega))^{1/q}$$

où C est une constante positive.

On en déduit, grâce à (3.3) que :

$$\left\| \eta_{n_k} \right\|_{V_q} \leq C' \qquad \text{où } C' \text{ est une constante positive.}$$

Ce qui contredit (3.9). Ainsi $\liminf_{n \to +\infty} H_q(\eta_n) = +\infty$. n

Théorème 3.1

Soit $q \geq 2$. Sous les hypothèses (2.1), (2.6) et (3.3), le problème de minimisation :

$$(3.11) \qquad \inf_{\eta \in V_q} H_q(\eta) ,$$

admet au moins une solution. On notera $\bar{\eta}_q$ l'une des solutions.

Démonstration :

Soit η_n une suite minimisante pour le problème (3.11) :

$$\lim_{n \to +\infty} H_q(\eta_n) = \inf_{\eta \in V_q} H_q(\eta)$$

$H_q(\eta_n)$ étant borné dans IR_+, alors d'après la proposition 3.1, η_n est bornée dans V_q et par suite, d'après (3.5), elle est bornée dans $L^q(\Omega ; IR^4_{sym})$. Il existe alors une sous suite η_{n_k} de η_n faiblement convergente dans $L^q(\Omega ; IR^4_{sym})$:

$$(3.12) \qquad \eta_{n_k} \underset{n_k \to +\infty}{\rightharpoonup} \bar{\eta}_q \qquad \text{dans } L^q(\Omega ; IR^4_{sym}) \text{ faible.}$$

Par ailleurs, comme H_q est convexe et continue sur $L^q(\Omega ; IR^4_{sym})$, alors elle est faiblement s.c.i sur $L^q(\Omega ; IR^4_{sym})$, et par suite, grâce à (3.12), on obtient :

$$\liminf_{n_k \to +\infty} H_q(\eta_{n_k}) \geq H_q(\bar{\eta}_q) ,$$

Pour que $\bar{\eta}_q$ soit solution de (3.11), il reste à montrer que $\bar{\eta}_q \in V$, c'est à dire que :

$div\, \bar{\eta}_q = 0$ dans Ω et $\bar{\eta}_q . \nu = 0$ sur Γ_F.

Soit pour cela $\varphi \in (C^\infty_o(\Omega))^2$, en utilisant (3.12) et la définition de la dérivation au sens des distributions, on obtient :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\eta_{n_k})\,\varphi\,dx \xrightarrow[n_k \to +\infty]{} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\bar{\eta}_q)\,\varphi\,dx$$

et comme $div\ \eta_{n_k} = 0$ dans Ω, alors $div\,\bar{\eta}_q = 0$. Il en découle que $\bar{\eta}_q . \nu\,|_{\Gamma}$ existe dans $(H^{-1/2}(\Gamma))^2$.

Soit $u \in (H^1(\Omega))^2$, vérifiant $u\,|_{\Gamma_U} = 0$. On a, d'après (3.12) :

$$\int_{\Omega} \eta_{n_k} . \nabla u\,dx \xrightarrow[n_k \to +\infty]{} \int_{\Omega} \bar{\eta}_q . \nabla u\,dx,$$

et par suite, utilisant deux fois une formule de Green et le fait que $div\,\bar{\eta}_q = 0$ dans Ω, on obtient :

$$\int_{\Gamma_F} \eta_{n_k} . \nu\,u\,d\Gamma \xrightarrow[n_k \to +\infty]{} \int_{\Gamma_F} \bar{\eta}_q . \nu\,u\,d\Gamma,$$

ce qui prouve que $\bar{\eta}_q . \nu = 0$ sur Γ_F, puisque $\eta_{n_k} . \nu = 0$ sur Γ_F et l'opérateur trace de $H^1(\Omega)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$ est surjectif. Ainsi $\bar{\eta}_q \in V$. n

3.3 RESULTATS DE CONVERGENCE

Considérons la suite réelle $(\bar{\lambda}_q)_{q \geq 2}$ définie par :

(3.13) $$\bar{\lambda}_q = \frac{1}{\inf\limits_{\eta \in V_q} H_q(\eta)} \quad q \geq 2$$

Nous allons montrer dans cette section la convergence de cette suite de réels $(\bar{\lambda}_q)_{q \geq 2}$ vers la charge limite $\bar{\lambda}$ donnée, d'après le théorème 2.1, par :

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\inf\limits_{\eta \in V_\infty} H(\eta)}$$

où H est la fonctionnelle convexe définie par (3.1), et V_∞ l'espace donné par (2.16).

Et nous montrons, en particulier, que la suite des solutions $(\eta_q^-)_{q \geq 2}$ des problèmes de minimisation (3.11) admet des sous-suites qui convergent, suivant une certaine topologie, qu'on précisera au théorème 3.2, vers une solution du problème :

$$(3.14) \qquad \inf_{\eta \in V_\infty} H(\eta)$$

Lemme 3.1

Sous les hypothèses (2.1), (2.6) et (3.3), la suite $(\lambda_q^-)_{q \geq 2}$ définie par (3.13) est décroissante, convergente, et sa limite, notée $\lambda^=$ vérifie :

$$(3.15) \qquad \lambda^- \leq \lambda^= = \lim_{q \to +\infty} \lambda_q^-$$

où λ^- est la charge limite donnée par (2.14).

Démonstration :

Partant de l'inégalité de Hölder on obtient :

$$(3.16) \qquad \| \ \|_{L^p(\Omega)} \leq (mes\ (\Omega))^{1/p - 1/q} \ \| \ \|_{L^q(\Omega)}, \qquad p \leq q$$

d'où l'on tire que :

$$(3.17) \qquad \begin{cases} \forall \eta \in V_{q+1} \quad H_q(\eta) \leq H_{q+1}(\eta) \\ \forall \eta \in V_\infty \qquad H_q(\eta) \leq H(\eta) \end{cases}$$

Utilisant (3.17) et le fait que $V_\infty \subset V_{q+1} \subset V_q$, il est facile de vérifier que :

$$0 < \lambda^- \leq \lambda_{q+1}^- \leq \lambda_q^-.$$

Il s'en suit que la suite λ_q^- est convergente, et que sa limite $\lambda^=$ est supérieure à λ^-.

n

Avant de montrer au théorème 3.2 que $\lambda^{=} = \lambda^{-}$, nous donnons la

Proposition 3.2

Sous les hypothèses (2.1), (2.6) et (3.3), la suite $(\eta_q^{-})_{q \geq 2}$ *des solutions* η_q^{-} *des problèmes de minimisation (3.11), données par le théorème 3.1 :*

$$H_q(\eta_q^{-}) = \inf_{\eta \in V_q} H_q(\eta), \quad q \geq 2 \tag{3.18}$$

vérifie :

$$\begin{cases} \exists R > 0 \text{ tel que } \forall q \geq 2, \text{ on a :} \\ \\ \left\| \eta_q^{-} \right\|_{L^q(\Omega ; \mathbb{R}^4_{sym})} \leq \rho_q \\ \\ \text{où } \rho_q = \dfrac{R\, mes(\Omega)^{1/q}}{\lambda_q^{-}} + \|\sigma\| \end{cases} \tag{3.19}$$

En outre, il existe un élément $\eta^{-} \in V_\infty$ *tel que pour tout n > 1,* η^{-} *est limite dans* $L^n(\Omega ; \mathbb{R}^4_{sym})$ *faible d'une sous suite* $(\eta_{q'}^{-})_{q' \geq n}$ *de la suite* $(\eta_q^{-})_{q \geq 2}$ *et :*

$$\left\| \eta^{-} \right\|_{L^\infty(\Omega ; \mathbb{R}^4_{sym})} \leq \rho . \tag{3.20}$$

où $\rho = \dfrac{R}{\lambda^{=}} + \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega ; \mathbb{R}^4_{sym})}$ *est la limite de* ρ_q ; $\lambda^{=}$ *étant donné par le lemme 3.1.*

Démonstration :

i) Nous rappelons le résultat suivant qui est un cas particulier d'un lemme donné dans Friaâ ([2], p. 130) :

Lemme 3.2 :

Soient deux suites $(h_q)_{q \geq 2}$ *et* $(\alpha_q)_{q \geq 2}$, *vérifiant* :

(1) $\forall\, q \geq 2, \quad \alpha_q \in IR \quad et \quad \alpha_q \to \alpha \quad quand\ q \to +\infty$

(2) $\forall\, q \geq 2, \ h_q \in L^q(\Omega\,;\, IR^{4}_{sym})$ *et* $\| h_q \|_{L^q(\Omega\,;\, IR^{4}_{sym})} \leq \alpha_q$.

Il existe alors $h \in L^\infty(\Omega\,;\, IR^{4}_{sym})$ *tel que* $\forall\, n > 1$, *h est limite dans* $L^n(\Omega\,;\, IR^{4}_{sym})$ *faible d'une sous suite* $(h_{q'})_{q' \geq n}$ *de la suite* $(h_q)_{q \geq 2}$, *de plus*

(3.21) $\qquad \| h \|_{L^\infty(\Omega\,;\, IR^{4}_{sym})} \leq \alpha$.

ii) On a pour tout $q \geq 2$, $\eta_q \in V_q$. Comme K est borné dans IR^{4}_{sym}, alors il existe un réel $R > 0$ tel que $K \subset B(0,R)$, où $B(0,R)$ est la boule dans IR^{4}_{sym} de centre 0 et de rayon R. Ainsi la jauge de K vérifie : $j_K(.) \geq \frac{1}{R} |.|_{IR^{4}_{sym}}$. Et par suite, grâce à (3.2) et (3.3), on obtient :

$$\| \eta_q \|_{L^q(\Omega\,;\, IR^{4}_{sym})} \leq R\,(mes(\Omega))^{1/q}\, H_q(\eta_q) + \| \sigma \|_{L^q(\Omega\,;\, IR^{4}_{sym})}$$

Il s'en suit, grâce à (3.13) et (3.18), que :

$$\| \eta_q \|_{L^q(\Omega\,;\, IR^{4}_{sym})} \leq \rho_q$$

où : $\qquad \rho_q = \dfrac{R\,(mes(\Omega))^{1/q}}{\lambda_q} + \| \sigma \|_{L^q(\Omega\,;\, IR^{4}_{sym})}$

Ainsi (3.19) est vérifiée.
Par ailleurs, Comme Ω est borné, alors en vertu de (3.3) et du lemme 3.1, la suite ρ_q est convergente. Sa limite, notée ρ, est donnée par :

(3.22) $\qquad \rho = \lim_{q \to +\infty} \rho_q = \dfrac{R}{\lambda} + \| \sigma \|_{L^\infty(\Omega\,;\, IR^{4}_{sym})}$

iii) Grâce à la deuxième partie de la démonstration et au lemme 3.2, il existe un élément $\hat{\sigma}$ tel que, pour tout n > 1, on a :

(3.23) $\quad \sigma_{q'} \xrightarrow[q' \to +\infty]{} \hat{\sigma}$ *dans* $L^n(\Omega ; IR^4_{sym})$ *faible* .

où :

(3.24) $\quad (\sigma_{q'})_{q' \geq n}$ est une sous suite de la suite $(\sigma_q)_{q \geq 2}$.

De plus :

(3.25) $\quad \hat{\sigma} \in L^\infty(\Omega ; IR^4_{sym})$

et

(3.26) $\quad \left|\left| \hat{\sigma} \right|\right|_{L^\infty(\Omega ; IR^4_{sym})} \leq \rho$

iv) Montrons enfin que $\hat{\sigma} \in V_\infty$. On sait déjà que $\hat{\sigma} \in L^\infty(\Omega ; IR^4_{sym})$. Il reste donc à montrer que $\hat{\sigma} \in V$, c'est à dire que : $div \hat{\sigma} = 0$ dans Ω et $\hat{\sigma} . \nu = 0$ sur Γ_F .

Soit $\varphi \in (C^\infty_o(\Omega))^2$, utilisant la définition de la dérivation au sens des distributions, on obtient d'après (3.23) :

$$\int_\Omega div(\sigma_{q'}) \varphi \, dx \xrightarrow[q' \to +\infty]{} \int_\Omega div(\hat{\sigma}) \varphi \, dx$$

et comme $div \, \sigma_{q'} = 0$ dans Ω, alors $div \hat{\sigma} = 0$. Il en découle que $\hat{\sigma} . \nu |_\Gamma$ existe dans $(H^{-1/2}(\Gamma))^2$.

Soit $u \in (H^1(\Omega))^2$, vérifiant $u |_{\Gamma_U} = 0$. On a, d'après (3.23) :

$$\int_\Omega \sigma_{q'} . \nabla u \, dx \xrightarrow[q' \to +\infty]{} \int_\Omega \hat{\sigma} . \nabla u \, dx ,$$

et par suite, utilisant deux fois une formule de Green et le fait que $div \, \sigma_{q'} = 0$ dans Ω, on obtient :

$$\int_{\Gamma_F} \eta_{q'} \cdot \nu \, u \, d\Gamma \xrightarrow[q' \to +\infty]{} \int_{\Gamma_F} \eta \cdot \nu \, u \, d\Gamma,$$

ce qui prouve que $\eta \cdot \nu = 0$ sur Γ_F, puisque $\eta_{q'} \cdot \nu = 0$ sur Γ_F. Ainsi $\eta \in V_\infty$.

n

Théorème 3.2

Sous les hypothèses (2.1), (2.6) et (3.3), on a les résultats suivants :

i) Soient λ la charge limite donnée par (2.14) et λ_q la suite de réels définie
par (3.13), alors on a :

$$\lambda = \lim_{q \to +\infty} \lambda_q$$

ii) En outre, l'élément $\eta \in V_\infty$ *défini à la proposition 3.2, est une solution du problème de minimisation (3.14), c'est à dire que :*

$$H(\eta) = \inf_{\eta \in V_\infty} H(\eta) \tag{3.27}$$

Démonstration :

i) On sait déjà, d'après le lemme 3.1, que :

$$\lambda \le \lambda^{=} = \lim_{q \to +\infty} \lambda_q .$$

Montrons que $\lambda \ge \lambda^{=}$. Soit $(\eta_q)_{q \ge 2}$ la suite de solutions des problèmes de minimisation (3.11), données par le théorème 3.1 :

$$H_q(\eta_q) = \inf_{\eta \in V_q} H_q(\eta) = \frac{1}{\lambda_q} \tag{3.28}$$

Alors, d'après la proposition 3.2, il existe $\eta \in V_\infty$, tel que pour tout n > 1, il existe une sous suite $(\eta_{q'})_{q' \ge n}$ de $(\eta_q)_{q \ge 2}$ faiblement convergente vers η dans $L^n(\Omega ; IR^4_{sym})$. Et par suite, sous l'hypothèse (3.3), on obtient :

(3.29) $\sigma^e(\eta_{q'}) \xrightarrow[q' \to +\infty]{} \sigma^e(\eta)$ *dans* $L^n(\Omega ; IR^4_{sym})$ *faible.*

Par ailleurs, d'après (3.8), la fonctionnelle convexe :

$$\begin{aligned} L^n(\Omega ; IR^4_{sym}) &\to IR_+ \\ \tau &\to \| j_K(\tau(.)) \|_{L^n(\Omega)} \end{aligned}$$

est continue, et par suite, elle est faiblement s.c.i. Il s'en suit, en utilisant (3.29), que :

(3.30) $$\liminf_{q' \to +\infty} \| j_K(\sigma^e(\eta_{q'})(.)) \|_{L^n(\Omega)} \geq \| j_K(\sigma^e(\eta)(.)) \|_{L^n(\Omega)}$$

En outre, grâce à (3.17), et puisque $q' \geq n$, on obtient en utilisant (3.2), (3.13) et (3.30) :

(3.31) $$(mes\ (\Omega))^{1/n} \liminf_{q' \to +\infty} \frac{1}{\lambda_{q'}} \geq \| j_K(\sigma^e(\eta)(.)) \|_{L^n(\Omega)} .$$

Utilisant le lemme 3.1, on obtient pour tout $n > 1$:

$$(mes\ (\Omega))^{1/n} \frac{1}{\lambda^=} \geq \| j_K(\sigma^e(\eta)(.)) \|_{L^n(\Omega)} .$$

Faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient, d'après (2.1), (2.6), (3.1), (3.3), (3.25) et le théorème 2.1 :

(3.32) $$\frac{1}{\lambda^=} \geq \| j_K(\sigma^e(\eta)(.)) \|_{L^\infty(\Omega)} = H(\eta) \geq \frac{1}{\lambda^-}$$

Ainsi $\lambda^- \geq \lambda^=$. Finalement $\lambda^- = \lambda^=$.

ii) Il découle de (3.32) et de l'égalité de $\bar{\lambda}$ et $\bar{\bar{\lambda}}$ que $H(\bar{\eta}) = \frac{1}{\bar{\lambda}}$. D'après la proposition 3.2, $\bar{\eta} \in V_\infty$. Ainsi grâce à (3.1) et au théorème 2.1, $\bar{\eta}$ est solution de (3.14). n

Les mêmes développements détaillés ci-dessus (§3.1, §3.2 et §3.3) permettent aussi de prouver le résultat suivant, concernant la charge limite $\underline{\lambda}$, donnée
au théorème 2.1 par (2.15).

Proposition 3.3

Soit $(\underline{\lambda}_q)_{q\geq 2}$ *la suite réelle définie par :*

$$(3.33) \qquad \underline{\lambda}_q = \frac{-1}{\underset{\eta \in V_q}{Inf} \left\{ mes(\Omega)^{-1} \|\eta\|_{L^q(\Omega)} \left(\|\sigma^{-e} - \eta\|_{L^q(\Omega)} \right) \right\}}$$

où σ^{-e} *est la solution du problème élastique (2.9), en remplaçant les chargements externes f et F par -f et -F respectivement.*

Alors sous les hypothèses (2.1), (2.6) et (3.3), la suite $(\underline{\lambda}_q)_{q\geq 2}$ *est convergente, et sa limite est donnée par :*

$$\lim_{q \to +\infty} \underline{\lambda}_q = \lambda$$

où la charge limite $\underline{\lambda}$ *est donnée par (2.15).* n

4. CONCLUSION

La nouvelle caractérisation de la charge limite $\bar{\lambda}$ (respectivement $\underline{\lambda}$) , donnée
par (2.14) (respectivement (2.15)) au théorème 2.1, consiste à résoudre un problème de minimisation convexe. Le fait que la fonctionnelle à minimiser ne soit pas différentiable (ceci est dû à la présence de la norme L^∞ dans son expression) nous a amené à la régulariser en remplaçant la norme L^∞ par la norme L^q, qui est numériquement plus facile à calculer, différentiable, sauf en zéro, et admet des dérivées directionnelles en tout point.

La fonctionnelle H_q donnée par (3.2) est plus régulière que la fonctionnelle H donnée par (3.1) qui intervient dans l'expression de $\bar{\lambda}$, bien que sa régularité dépende de celle de la fonction jauge du convexe d'élasticité K.

En particulier, dans le cas où le convexe K est le convexe de Von-Misès, la fonctionnelle H_q est différentiable en tout point de V_q défini par (3.4) et (2.12), puisque $\sigma^e - \eta \neq 0$ pour $\eta \in V_q$, car d'après (2.9) $\sigma^e \notin V_q$ dès que le chargement
$(f, F) \neq (0, 0)$.

Ainsi le calcul de la charge limite $\bar{\lambda}$ (respectivement $\underline{\lambda}$) se ramène à calculer la limite de la suite de réels $(\bar{\lambda}_q)_{q \geq 2}$ définie par (3.13) (respectivement $(\underline{\lambda}_q)_{q \geq 2}$ définie par (3.33)), où chaque terme $\bar{\lambda}_q$ (respectivement $\underline{\lambda}_q$) est donné par un problème de minimisation convexe.

Un algorithme numérique pour calculer $\bar{\lambda}$ (respectivement $\underline{\lambda}$), en utilisant l'approximation $\bar{\lambda}_q \approx \bar{\lambda}$ (respectivement $\underline{\lambda}_q \approx \underline{\lambda}$) pour q assez grand, fait l'objet d'un travail en cours.

RÉFÉRENCES

[1] CHRISTIANSEN E. - *On the collapse solution in limit analysis*. Arch. Rational Mech. Anal., vol. 91, n° 2, pp. 119-135, 1986

[2] EL FEKIH H. , HADHRI T. - *Sur la détermination de la charge limite d'une structure élastoplastique en contraintes planes*. R.I., CMAP, Ecole Polytechnique, Palaiseau, Octobre 1992.

[3] FRIAA A. - *La loi de Norton-Hoff généralisée en plasticité et viscoplasticité*. Thèse de Doctorat d'Etat, Paris 6,1979.

[4] HADHRI T. - *Présentation et analyse mathématique et numérique de quelques modèles pour des structures élastoplastiques homogènes ou hétérogènes*. Thèse de Doctorat d'Etat, Paris 6, 1986.

[5] HADHRI T. - *Convex function of a measure and application to a problem of nonhomogeneous elastoplastic material*. R.I. n° 140, CMAP, Ecole Polytechnique, 1986.

[6] TEMAM R. - *Problèmes mathématiques en plasticité*. Ed. Gauthier-Villars, Paris 1983.