Estimation de la polarisation d'un faisceau d'électrons par intervalle de confiance asymptotique ou exact

Jean-Louis PHILOCHE* et Michel VIOT**

octobre 1993

Keywords and phrases : Poisson processes, exponential inequalities, asymptotic and exact confidence intervals.
AMS 1985 subject classification : 62F10 and 62F12

Résumé

On étudie le problème de l'estimation de la polarisation p d'un faisceau d'électrons. On commence par formuler un modèle probabiliste simple. Puis on établit plusieurs propriétés utiles de l'estimateur usuel $\hat{p}$; on obtient ensuite un premier intervalle de confiance asymptotique. A distance finie, on évalue numériquement le véritable niveau de cet intervalle, ainsi que de l'une de ces améliorations. Utilisant ensuite des inégalités exponentielles (Bernstein, Bennett, Chernoff et Hoeffding) on obtient plusieurs intervalles de confiance exacts, sous des a priori physiques réalistes ; on évalue également numériquement le niveau véritable du meilleur d'entre eux.

Abstract

We study the problem of estimating the polarization p of a particular beam of electrons. We begin by establishing a simple probabilistic model. Then several useful properties of the usual estimator $\hat{p}$ are derived and a first asymptotic confidence interval is obtained. Numerical evaluations of the real level of this interval at finite distances and of one of its improvements are given. Through exponential inequalities (Bernstein, Bennett, Chernoff and Hoeffding) several exact confidence intervals will be given under realistic physical assumptions. As above, the best confidence interval is numerically evaluated.

* *Département de Mathématique-Informatique, INA-PG,*
16 rue Claude Bernard, 75231 Paris cedex 05 (France).
** *ΛCentre de Mathématiques Appliquées et CNRS, Ecole Polytechnique,*
91128 Palaiseau cedex (France).

1 Introduction et modélisation

Selon la mécanique quantique, chaque électron possède un moment cinétique (et magnétique) interne, le spin, qui ne peut prendre que deux valeurs opposées, que nous noterons $+$ et $-$. Un faisceau d'électrons dans le vide est caractérisé par sa polarisation p, qui vaut $+1$ (ou -1) si tous les spins sont orientés dans la même direction, parallèlement (ou antiparallèlement) à une orientation de référence, et une valeur comprise entre -1 et $+1$ si l'orientation n'est que partielle.

L'intérêt des faisceaux d'électrons polarisés est qu'ils explorent la matière selon leur spin : en physique des collisions, par exemple, l'interaction entre électrons polarisés et deutérium a permis de tester le modèle fondamental de Weinberg et Salam sur les courants neutres, qui est une étape vers l'unification de toutes les forces agissant sur la matière ; les électrons polarisés sont aussi un outil privilégié pour l'étude des surfaces particulièrement les surfaces magnétiques.

Pratiquement, il s'agit donc de produire de tels faisceaux ; la mesure de leur polarisation est un préalable à toute expérience (Drouhin et Coll [1985], Kessler [1985], Flechter et Coll. [1986], Riechert et Coll. [1988], Hermann et Coll. [1992]). Pour être spécifiques, nous prendrons ici l'exemple d'électrons extraits d'un semi-conducteur par effet photoélectrique. La valeur de la polarisation du faisceau est déterminée par la nature (polarisation, longueur d'onde,...) de la lumière qui illumine le solide, et par les propriétés propres au solide émetteur : la mesure de la polarisation du faisceau renseigne ainsi sur les niveaux d'énergie du solide concerné.

Chaque mesure donnera une quantité "empirique" $\hat{p}$ estimant la polarisation "vraie" p du faisceau. Une question importante consiste à évaluer la précision avec laquelle $\hat{p}$ estime p.

La modélisation physique proposée est la suivante : comme indiqué plus haut chaque électron concerné ne peut présenter que l'un ou l'autre de deux états notés $+$ ou $-$. On fait ensuite l'hypothèse poissonienne la plus simple: à partir d'une date origine et jusqu'à la date T, *les flux des e^+ et des e^- suivent des processus de Poisson homogènes dont les intensités respectives sont notées λ^+ et λ^-. On postule de plus l'indépendance des deux processus.*

Le dispositif expérimental présente un axe de symétrie de part et d'autre duquel sont disposés deux compteurs A et B (des détecteurs de MOTT). On suppose *qu'un électron (+ ou −) a une probabilité* ε *d'être capté* (par A ou B); ε est un paramètre défini par la géométrie du système. Cette géométrie associée à la mécanique quantique, entraîne aussi que, *sachant qu'il est capté, un* e^+ *est capté par* A *avec la probabilité* $2/3$ (resp. par B avec la probabilité $1/3$). Les probabilités sont échangées pour un e^-.

La polarisation empirique $\hat{p}$ est définie par

$$\hat{p}(T) = \frac{N_A(T) - N_B(T)}{N_A(T) + N_B(T)} \tag{1.1}$$

où $N_A(T)$, $N_B(T)$ désignent les effectifs d'électrons captés, pendant la période en cause, par A et B.

On commencera par établir un premier résultat (simple mais important) qui complète la modélisation. (On utilise ci-dessous la notation $\mathcal{P}(\mu)$ pour désigner la loi de Poisson de paramètre μ) :

Proposition 1.1

$N_A(T)$ et $N_B(T)$ suivent indépendamment $\mathcal{P}\ (\mu_A T)$ et $\mathcal{P}\ (\mu_B T)$, où

$$\mu_A = \frac{\varepsilon}{3}\,(2\lambda^+ + \lambda^-) \text{ et } \mu_B = \frac{\varepsilon}{3}\,(\lambda^+ + 2\lambda^-) \tag{1.2}$$

Démonstration

Un e^+ est capté par A avec probabilité $2\varepsilon/3$, par B avec probabilité $\varepsilon/3$ et n'est pas capté (situation H) avec la probabilité $1-\varepsilon$. Pendant la durée T, les effectifs correspondants aux e^+ sont N_A^+, N_B^+, N_H^+ (en allégeant les notations du T). On a clairement :

$$\begin{aligned}
&P[N_A^+ = n_A^+\,,\ N_B^+ = n_B^+\,,\ N_H^+ = n_H^+] \\
&= P[N^+ = n^+]\, P[N_A^+ = n_A^+\,,\ N_B^+ = n_B^+\,,\ N_H^+ = n_H^+ \mid N^+ = n^+],
\end{aligned}$$

pour $n^+ = n_A^+ + n_B^+ + n_H^+$ et

$$P[N^+ = N_A^+ + N_B^+ + N_H^+ = n^+] = e^{-\lambda^+ T}\frac{(\lambda^+ T)^{n^+}}{(n^+)!}. \tag{1.3}$$

Quant à la probabilité conditionnelle précédente, elle s'obtient bien sûr avec la loi multinomiale :

$$\begin{aligned} P[N_A^+ = n_A^+ \,,\; N_B^+ = n_B^+ \,,\; N_H^+ = n_H^+ \;\mid\; N^+ = n^+] \\ = \frac{(n^+)!}{(n_A^+)!(n_B^+)!(n_H^+)!} \,(\varepsilon \frac{2}{3})^{n_A^+} \,(\varepsilon \frac{1}{3})^{n_B^+} \,(1-\varepsilon)^{n_H^+} \;; \end{aligned} \tag{1.4}$$

en regroupant (1.3) et (1.4) et en décomposant on obtient :

$$\begin{gathered} P[N_A^+ = n_A^+ \,,\; N_B^+ = n_B^+ \,,\; N_H^+ = n_H^+] \;= \\ e^{-\lambda^+ T\varepsilon \frac{2}{3}} \,\frac{(\lambda^+ T\varepsilon \frac{2}{3})^{n_A^+}}{(n_A^+)!} \;e^{-\lambda^+ \frac{T\varepsilon}{3}} \,\frac{(\lambda^+ T\varepsilon \frac{1}{3})^{n_B^+}}{(n_B^+)!} \;e^{-\lambda^+ T(1-\varepsilon)} \,\frac{(\lambda^+ T(1-\varepsilon))^{n_H^+}}{(n_H^+)!}. \end{gathered} \tag{1.5}$$

On en déduit que N_A^+ et N_B^+ suivent indépendamment les lois de Poisson avec les paramètres voulus. On arrive à une conclusion analogue pour le flux des e^- en ce qui concerne N_A^- et N_B^-; l'hypothèse d'indépendance entre les e^+ et les e^- donne le caractère poissonien et indépendant de N_A^+, N_B^+, N_A^-, N_B^-, d'où la proposition. □

Remarque

Le modèle proposé sera considéré comme *un modèle simplifié*. La situation physique est connue pour être plus complexe ; ceci se manifeste statistiquement principalement sur les lois de N_A et N_B qui ne sont qu'approximativement poissoniennes.

Il est temps d'introduire *la polarisation théorique* p à laquelle on s'intéresse:

$$p = \frac{\mu_A - \mu_B}{\mu_A + \mu_B} = \frac{\lambda^+ - \lambda^-}{3(\lambda^+ + \lambda^-)} \;. \tag{1.6}$$

Bien entendu cette écriture rend tout à fait naturelle l'estimateur usuel (déjà introduit) :

$$\hat{p} = \frac{N_A - N_B}{N_A + N_B}$$

(où T est implicite).

Nous achèverons cette première partie en donnant quelques ordres de grandeur correspondant au type d'expérience à laquelle nous nous référons :

La durée de chaque illumination est de 150s, le flux d'électrons arrachés est de l'ordre de 10^9/s. La probabilité ε qu'un électron arraché soit capté est de l'ordre de 10^{-6}. Sur les données concernées, les flux totaux $N_A + N_B$ étaient un peu inférieurs à 5×10^5 et les polarisations empiriques inférieures à 0.30.

2 Propriétés de l'espérance et la variance de la polarisation empirique

La loi de $\hat{p}$ paraissant inexploitable directement, on commencera par calculer $E\hat{p}$ et $V\hat{p}$. Toutefois nous ne souhaitons pas avoir des problèmes avec la nullité du dénominateur $N = N_A + N_B$ et ne trouvons pas judicieux, dans ce cas, de donner une valeur conventionnelle, mais artificielle, à $\hat{p}$. Aussi *nous placerons-nous dans la situation conditionnelle où* $N > 0$ (ce qui est d'ailleurs physiquement réaliste).

Dans toute la suite on notera

$$\mu = \mu_A + \mu_B, \text{ l'intensité du flux capté} \tag{2.1}$$

Proposition 2.1
Pour $-1 < p < 1$,

$$E\left(\hat{p} \mid N > 0\right) = p \tag{2.2}$$

$$V\left(\hat{p} \mid N > 0\right) = \left(1 - p^2\right) f\left(\mu T\right), \tag{2.3}$$

où

$$f(x) := \frac{g(x)}{e^x - 1}$$

pour $x > 0$, *avec*

$$g(x) := \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n n!} = \int_0^x \frac{e^t - 1}{t}\, dt. \tag{2.4}$$

Démonstration

N_A et N_B suivent indépendamment les lois de Poisson $\mathcal{P}(\mu_A T)$ et $\mathcal{P}(\mu_B T)$, donc N suit $\mathcal{P}(\mu T)$. Or il est classique que, *conditionnellement à* $[N = n]$, $(n > 0)$, N_A *suit la loi binomiale* $\mathcal{B}(n, \theta)$, où :

$$\theta = \frac{\mu_A}{\mu} = \frac{1+p}{2} \tag{2.5}$$

Ainsi $E\left(\hat{p} \mid N > 0\right) = \frac{1}{P(N>0)} \sum_{n \geq 1} E\left(\hat{p} \mid N = n\right) P[N = n] = p$, puisque $E\left(\hat{p} \mid N = n\right) = E\left(\frac{2N_A - n}{n} \mid N = n\right) = 2\theta - 1 = p, \quad (n > 0)$.

Pour la variance, on calculera en premier lieu :

$$E\left(\hat{p}^2 \mid N = n\right) = E\left[\frac{(N_A - N_B)^2}{N^2} \mid N = n\right] = \frac{1}{n^2} E(n^2 - 4N_A N_B \mid N = n)$$

$$= 1 - \frac{4}{n^2} E[N_A(n - N_A) \mid N = n].$$

On explicite cette expression à l'aide de (2.5) et après quelques calculs simples, on obtient

$$E\left(\hat{p}^2 \mid N = n\right) = p^2 + \frac{1-p^2}{n}\,,\ (n \geq 1)\,.$$

Il ne reste plus qu'à intégrer cette expression pour obtenir successivement $E(\hat{p}^2 \mid N > 0)$ et

$$V(\hat{p} \mid N > 0) = \frac{(1-p^2)}{P[N > 0]} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} P[N = n] =$$

$$\frac{(1-p^2)}{(1-e^{-\mu T})} \sum_{n \geq 1} e^{-\mu T}\ \frac{(\mu T)^n}{n n!} = \frac{(1-p^2)}{e^{\mu T} - 1} \sum_{n \geq 1} \frac{(\mu T)^n}{n n!}.$$

Ceci n'est autre que (2.3) avec la première écriture de g. La seconde écriture s'obtient aussitôt en dérivant la série, d'où $g'(x) = \frac{1}{x}(e^x - 1)$. □

Remarque

Il peut être utile de savoir que la fonction $g(x)$ (et donc aussi $f(x)$) est reliée à la fonction connue $E_i(x)$, dite “exponentielle intégrale”. Parmi les nombreuses définitions de $E_i(x)$, voir Abramowitz et Stegun [1972], celle qui met le mieux les choses en lumière est

$$E_i(x) = \gamma + lnx + \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n n!}\ \ (x > 0), \tag{2.6}$$

où $\gamma = 0.5772\cdots$ est la constante d'Euler.

Il sera utile dans la suite d'établir quelques propriétés de la fonction $f(x)$ qui intervient dans la variance de $\hat{p}$:

Proposition 2.2
La fonction f est décroissante et convexe, de plus $lim f(x) = 0$, quand $x \to +\infty$.

Démonstration[1]
(i) $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{g(x)}{(1-e^{-x})(e^x-1)}$, donc pour établir $f'(x) \leq 0$, il suffit de montrer que $g(x) \geq \dfrac{(1-e^{-x})(e^x-1)}{x} := h(x)$; comme $g(0) = h(0) = 0$, il suffit d'établir $g'(x) \geq h'(x)$. Or :

$$h'(x) = \left(1 + \frac{u(x)}{x}\right) g'(x), \text{ avec } u(x) : (x+1)e^{-x} - 1\,;$$

et enfin $u(x) \leq 0$, car $u(0) = 0$ *et* $u'(x) = -xe^{-x} \leq 0$.

(ii) $f''(x) = -\dfrac{e^x - 1 + xe^x}{x^2(e^x-1)} + \dfrac{(e^x+1)g(x)}{(1-e^{-x})(e^x-1)^2}$, donc pour établir que $f''(x) \geq 0$, il suffit de montrer que

$$g(x) \geq \frac{(e^x - 1 + xe^x)(1-e^{-x})(e^x-1)}{x^2(e^x+1)} := k(x),$$

et comme $g(0) = k(0) = 0$, il suffit de montrer $g'(x) \geq k'(x)$; mais

$$k'(x) = \left(1 + \frac{(1-e^{-x})v(x)}{x^2(e^x+1)^2}\right) g'(x),$$

avec $v(x) = -2e^{-x} + 2 + x(3e^x + 1) + x^2e^x$. La propriété résulte alors de ce que $v(x) = \displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{-2^{(n+1)} + n(n+2)}{n!} x^n \leq 0$, puisque $2^{(n+1)} \geq n(n+2)$, (récurrence pour $n > 3$).

(iii) Quand x tend vers $+\infty$, le quotient $\dfrac{g(x)}{e^x - 1}$ prend une forme indéterminée, la règle classique de l'Hospital donne le résultat. □

Il est intéressant, pour x petit ou grand de disposer de développements de $f(x)$:

---

[1]essentiellement due à C. de Calan et P. Renouard.

Proposition 2.3

Quand $x \to 0, f(x)$ *admet le développement limité*

$$f(x) = 1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{72} + \frac{x^3}{288} + 0(x^4). \tag{2.7}$$

Quand $x \to +\infty, f(x)$ *admet le développement limité*

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{6}{x^4} + 0\left(\frac{1}{x^5}\right). \tag{2.8}$$

Démonstration

Il n'y a aucune difficulté à obtenir le développement (2.7) à partir des développements de $e^x - 1$ et de $g(x)$ au voisinage de l'origine.

Pour obtenir un développement asymptotique de $f(x)$, on remarque que

$$g(x) = g(1) - lnx + \int_1^x \frac{e^t}{t} dt,$$

pour $x > 1$;
suivant De Bruin [1981], on intègre par partie de façon réitérée, d'où

$$\int_1^x \frac{e^t}{t} dt = \left[e^t \left(\frac{1}{t} + \frac{1!}{t^2} + \frac{2!}{t^3} + \cdots + \frac{(n-1)!}{t^n} \right) \right]_1^x + n! \int_1^x \frac{e^t}{t^{n+1}} dt, \tag{2.9}$$

où la dernière intégrale est $0(x^{-n-1})$, si $x \to \infty$ et pour n fixé. Ce dernier point se vérifie en découpant l'intervalle d'intégration en $(1, x/2)$ et $(x/2, 1)$ et en procédant à des majorations manifestes.

De (2.9) on déduit, pour x tend vers $+\infty$, :

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \cdots + \frac{(n-1)!}{x^n} + 0\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \tag{2.10}$$

dont (2.8) est un cas particulier. □

L'évaluation (2.10) ne donnant pas de majoration formelle, nous achèverons cette partie en donnant une majoration explicite et simple :

Proposition 2.4

$$f(x) < \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}, \text{ pour } x > 0 \tag{2.11}$$

Démonstration

Il revient au même d'établir que :

$$h(x) := \frac{2(e^x - 1)}{x^2} + \frac{e^x - 1}{x} - g(x) > 0, \quad (x > 0).$$

or

$$\frac{2e^x - 1}{x^2} = \frac{2}{x} + 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{60} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{2x^n}{(n+2)!} \ ,$$

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!},$$

$$-g(x) = -x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{18} - \sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^n}{nn!}.$$

Ainsi

$$h(x) = \frac{P(x)}{x} + \sum_{n=4}^{\infty} a_n x^n,$$

avec

$$a_n = \frac{2}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{nn!} = \frac{n-2}{n(n+2)!} > 0 \quad (n \geq 4),$$

et

$$P(x) = 2 + 2x - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{360}.$$

$$P'(x) = 2 - \frac{x}{3} + \frac{x^3}{90} \text{ et } P''(x) = -\frac{1}{3} + \frac{x^2}{30}.$$

Sur $\mathbf{R}^+$, $P''(x)$ s'annule pour $x = \sqrt{10}$; on constate alors que $P'_{min} = P'\left(\sqrt{10}\right) > 0$, de sorte que $P' > 0$ sur $\mathbf{R}^+$ et que P, croissant, satisfait $P(x) > P(0) = 2 \ \ (x > 0)$. □

3 Etude asymptotique

Dans ce paragraphe nous allons étudier le comportement de $\hat{p}$ pour les grandes valeurs de T et obtenir une convergence gaussienne donnant accès à deux intervalles de confiance asymptotiques.

Une propriété classique du processus de Poisson est :

$$\frac{N_A}{T} \overset{p.s.}{\to} \mu_A \text{ et } \frac{N_B}{T} \overset{p.s.}{\to} \mu_B, \quad \text{quand } T \to \infty, \tag{3.1}$$

de sorte qu'avec (1.6)

$$\hat{p} = \frac{N_A - N_B}{N_A + N_B} \overset{p.s}{\to} p\,. \tag{3.2}$$

On peut aller plus loin :

Proposition 3.1[2]

$$\sqrt{T}(\hat{p} - p) \overset{L}{\to} G(\sigma^2) \tag{3.3}$$

quand $T \to \infty$, avec

$$\sigma^2 = \frac{4\mu_A\mu_B}{(\mu_A + \mu_B)^3} = \frac{4}{9\varepsilon}\frac{(2\lambda^+ + \lambda^-)(\lambda^+ + 2\lambda^-)}{(\lambda^+ + \lambda^-)^3}.$$

Démonstration

La convergence gaussienne du processus de Poisson donne $\sqrt{T}\left(\frac{N_A(T)}{T} - \mu_A\right) \overset{L}{\to} G(\mu_A)$ et l'analogue pour N_B. Donc le couple indépendant (N_A, N_B) satisfait

$$\sqrt{T}\begin{bmatrix} \frac{N_A(T)}{T} - \mu_A \\ \frac{N_B(T)}{T} - \mu_B \end{bmatrix} \overset{L}{\to} G_2(Q), \text{ quand } T \to \infty,$$

où la matrice Q vaut

$$\begin{bmatrix} \mu_A & 0 \\ 0 & \mu_B \end{bmatrix}.$$

[2]On désigne par $G(\sigma^2)$ (resp. $G_2(Q)$) la loi de Gauss centrée sur $\mathbf{R}$ de variance σ^2 (resp. sur $\mathbf{R}^2$ de matrice des covariance Q)

Si l'on introduit la fonction, définie dans $\mathbf{R}^2$, par $g(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$, on observe que $g(\mu_A,\mu_B)=p$, Cf. (1.6), et que $g\left(\dfrac{N_A(T)}{T},\dfrac{N_B(T)}{T}\right)=\hat{p}$. Or, par un théroème connu, voir, par exemple, Rao [1973], ou Serfling [1980], on sait que, pour $T\to\infty$,

$$\sqrt{T}\left[g\left(\frac{N_A(T)}{T},\frac{N_B(T)}{T}\right)-g(\mu_A,\mu_B)\xrightarrow{L}G\left[h(\mu_A,\mu_B)\right]\right],$$

où[3] $h(x,y)={}^t\mathrm{grad}g(x,y)Q\mathrm{grad}g(x,y)$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$.

Après quelques calculs élémentaires, on récupère bien comme variance de la gaussienne limite le σ^2 de (3.3). □

Il est souvent aussi intéressant d'utiliser les paramètres μ,p que μ_A,μ_B ; d'où, puisque

$$1-p^2=\frac{4\mu_A\mu_B}{\mu^2}\ :$$

$$(\mu T)^{1/2}(\hat{p}-p)\xrightarrow{L}G\left(1-p^2\right)\ ,\ (T\to+\infty)\,. \tag{3.4}$$

Corollaire 3.2
L'intervalle

$$\hat{p}\pm1.96\left(\frac{1-\hat{p}^2}{N}\right)^{1/2}, \tag{3.5}$$

qui s'écrit aussi :

$$\hat{p}\pm1.96\left(\frac{4N_AN_B}{N^3}\right)^{1/2}$$

est un intervalle de confiance pour p, au niveau asymptotique 0.95.

Démonstration
(3.4) équivaut à

$$\left(\frac{\mu T}{1-p^2}\right)^{1/2}(\hat{p}-p)\to G(1),\quad(T\to+\infty)\,.$$

Compte tenu de $\hat{p}\xrightarrow{p.s}p$ et de $\dfrac{N}{T}\xrightarrow{p.s}\mu$, on en tire :

[3]Un gradient est noté en colonne. ${}^tM$ désigne la transposée de M.

$$\left[\frac{N}{(1-\hat{p}^2)}\right]^{1/2}(\hat{p}-p)\xrightarrow{L} G(1), \quad (T\to+\infty)\,.$$

Il en résulte bien que, pour $T\to\infty$:

$$P\left\{p\in\hat{p}\pm 1.96\left[\frac{1-\hat{p}^2}{N}\right]^{1/2}\right\}\to 0.95.$$

La seconde écriture provient de ce que

$$1-\hat{p}^2=\frac{4N_AN_B}{N^2}.\ \square$$

Il est intéressant d'évaluer numériquement le niveau exact de l'intervalle (3.5) *pour des valeurs de μT assez basses* de façon à pouvoir, dans ce cas, comparer le niveau nominal et le niveau réel.

Pour cela on procède au calcul de la *probabilité de non recouvrement,* dans la situation $[N>0]$. Autrement dit, on somme les masses $\dfrac{e^{T\mu}(\mu_AT)^x(\mu_BT)^y}{x!\,y!}$ (convenablement divisées par $(1-e^{-T\mu})$), pour les (x,y) s'écartant de 12 écarts-types des moyennes (μ_AT,μ_BT) et qui satisfont :

$$\frac{x-y}{x+y}-1.96\left[\frac{4xy}{(x+y)^3}\right]^{1/2}>p,\ \text{ ou } p>\frac{x-y}{x+y}+1.96\left[\frac{4xy}{(x+y)^3}\right]^{1/2}.$$

Les résultats de cette confrontation sont donnés dans le *tableau 1 : Probabilité exacte* (α) *de non recouvrement pour l'intervalle* (3.5).

Tableau 1

Probabilité α de non recouvrement de p, en fonction de p et μT, pour l'intervalle (3.5)

μT

p	20	30	50	100	1000
0	.071	.062	.059	.054	.050
0.4	.081	.069	.063	.056	.050
0.6	.097	.080	.069	.060	.051
0.8	.143	.112	.089	.071	.052
0.9	.370	.226	.102	.097	.054

Tableau 2

Probabilité α de non recouvrement de p, en fonction de p et μT, pour l'intervalle (3.7)

μT

p	20	30	50	100	1000
0	.052	.052	.049	.050	.050
0.4	.049	.050	.050	.050	.050
0.6	.045	.046	.048	.049	.050
0.8	.041	.041	.045	.048	.050
0.9	.043	.041	.039	.045	.050

On observe aussitôt que, dans le tableau 1, α est systématiquement trop élevée et qu'elle croît avec p, surtout pour les faibles valeurs de μT.

Pour essayer d'améliorer les choses, on peut voir si la procédure qui consiste à éviter de substituer $\hat{p}$ à p dans (3.4) donne des résultats (il est connu que cette manière de faire peut être efficace dans certains cas).

De (3.4) on déduit, (pour $t_\alpha = 1.96$) :

$$P\left\{\left(\frac{\mu T}{1-p^2}\right)(\hat{p}-p)^2 \leq t_\alpha^2\right\} \to 1-\alpha = 0.95\,;$$

l'intervalle de confiance se construit en résolvant en p :

$$(\mu T)(\hat{p}-p)^2 - (1-p^2)t_\alpha^2 \leq 0\,;$$

soit encore :

$$p^2\left(\mu T + t_\alpha^2\right) - 2p\hat{p}(\mu T) + (\mu T)\hat{p}^2 - t_\alpha^2 \leq 0.$$

Ce trinôme admet pour racines :

$$p = \frac{1}{\mu T + t_\alpha^2}\left\{\hat{p}\mu T \pm t_\alpha\left[\mu T(1-\hat{p}^2) + t_\alpha^2\right]^{1/2}\right\}. \tag{3.6}$$

Estimant enfin μT par $N = (N_A + N_B)$ on obtient un second intervalle de confiance :

$$p \in \frac{1}{N + t_\alpha^2}\left\{\hat{p}N \pm t_\alpha\left[N(1-\hat{p}^2) + t_\alpha^2\right]^{1/2}\right\}. \tag{3.7}$$

Correspondant à cet intervalle de confiance, on a donné dans le *Tableau 2* les valeurs numériques des probabilités de non recouvrement pour les mêmes valeurs de μT que pour le tableau 1.

On remarque que les valeurs obtenues sont tout à fait satisfaisantes puisqu'elles varient pratiquement entre 0.04 et 0.05.

4 Intervalles de confiance exacts

Les intervalles de confiance exacts que nous proposons de construire maintenant seront établis sous des "a priori physiques réalistes". Par là nous entendons *des a priori du type* $\mu T \geq C_0$, où C_0 est au choix de l'utilisateur.

Les raisons du choix de ce type d'a priori sont les suivantes : les paramètres p et μ ne jouent pas un rôle symétrique ; on cherche à estimer p tandis que μ, paramètre d'intensité du flux capté, est pratiquement déterminé par le flux connu des photons incidents. Un bon choix de C_0 constitue donc un type d'a priori satisfaisant pour le physicien.

Nous commencerons par construire un intervalle de confiance exact très simple puisqu'il est tiré de l'inégalité de Chebyshev.

Proposition 4.1

On suppose vérifié l'"a priori" $\mu T \geq C_0$*, alors, pour* $x \geq 0$*,*

$$P\left[|\hat{p} - p| \leq x | N > 0\right] \geq 1 - \frac{f(C_0)}{x^2}. \tag{4.1}$$

Démonstration

L'inégalité de Chebyshev donne :

$$P\left[|\hat{p} - p| \geq x | N > 0\right] \leq \frac{1}{x^2}(1 - p^2) f(\mu T) \leq \frac{1}{x^2} f(C_0),$$

en utilisant les propositions (2.1) et (2.2). □

La borne de confiance x_0 correspondant à (4.1) pour le niveau $0;95$ par excès est donnée à la ligne "Chebyshev" du *Tableau 3.*

Pour faire plus précis, il est naturel de passer par l'intermédiaire de majorations exactes de $P\left[\hat{p} - p \geq x | N > 0\right]$ et de $P\left[\hat{p} - p \leq -x | N > 0\right]$. On utilisera la même voie d'accès que pour la proposition 2.1, c'est-à-dire le fait que $\mathcal{L}(N_A | N = n) = \mathcal{B}(n, \theta)$, (Cf. (2.5)).

Proposition 4.2

Pour tout $x > 0$,

$$\left.\begin{array}{l} P\left[\hat{p}-p \geq x | N>0\right]= \\ \dfrac{1}{P\left[N>0\right]} \sum_{n \geq 1} P\left[N_A-n\theta \geq n\dfrac{x}{2} | N=n\right] P\left[N=n\right]. \end{array}\right\} \qquad (4.2)$$

Démonstration

$$P\left[\hat{p}-p \geq x | N>0\right]=\frac{1}{P\left[N>0\right]} \sum_{n \geq 1} P\left[\hat{p}-p \geq x | N=n\right] P\left[N=n\right]. \quad (4.3)$$

Or

$$\begin{aligned} & P\left[\hat{p}-p \geq x | N=n\right]=P\left[\frac{N_A-N_B}{n}-p \geq x | N=n\right] \\ & =P\left[\frac{2N_A-n}{n}-p \geq x | N=n\right] \\ & =P\left[N_A-n\theta \geq n\left(\frac{1}{2}-\theta\right)+n(p+x) | N=n\right] \\ & =P\left[N_A-n\theta \geq \frac{nx}{2} | N=n\right] \end{aligned}$$

d'où le résultat par report dans (4.3). □

Disposant de ce résultat, il ne reste plus qu'à trouver des majorations convenables de $P\left[S-n\theta \geq nt\right]$, où S suit $\mathcal{B}(n,\theta)$. (Ces majorations susceptibles d'être intégrées dans (4.2) sont appelées dans la littérature des "majorations exponentielles").

Un point partiel assez récent sur ce type d'inégalités est fait dans Shorack et Wellner [1986]. Les articles originaux sont naturellement précieux.

Dans Bennett [1962], plusieurs inégalités de ce type sont données majorant $P\left[S-ES \geq nt\right]$, où $S=X_1+\cdots+X_n$, avec les X_i indépendantes, non nécessairement de même loi, $ES=nm$ et $VS=n\sigma^2$. Deux de ces inégalités peuvent être insérées dans (4.2) : *l'inégalité de Bernstein :*

$$P\left[S-ES \geq nt\right] \leq \exp\left[\frac{-nt^2}{2\left(\sigma^2+\frac{bt}{3}\right)}\right], \qquad (4.4)$$

pour $|X_i-EX_i| \leq b$ et $t>0$; et l'inégalité appelée depuis *l'inégalité de Bennett*, Cf. Hoeffding [1963] :

$$P\left[S-ES\geq nt\right]\leq \exp\left(-\frac{nt}{b}\left[\left(1+\frac{\sigma^2}{bt}\right)ln\left(1+\frac{tb}{\sigma^2}\right)-1\right]\right), \qquad (4.5)$$

pour $X_i < b$ et $t > 0$.

Dans l'article cité de Hoeffding on trouve deux autres majorations de même nature. La première s'écrit :

$$P\left[S-ES\geq nt\right]\leq \left\{\left(\frac{m}{m+t}\right)^{m+t}\left(\frac{1-m}{1-m-t}\right)^{1-m-t}\right\}^n, \qquad (4.6)$$

pour $0 \leq X_i \leq 1$ et $0 < t < 1-m$.

La seconde, déjà établie pour le cas binomial dans Okamoto [1958], s'écrit

$$P\left[S-ES\geq nt\right]\leq e^{-2nt^2}, (0\leq X_i\leq 1) \text{ et } \ t>0. \qquad (4.7)$$

Nous ne donnerons pas les formes intégrées des inégalités (4.5) et (4.6) qui ne paraissent pas déboucher sur la construction d'un intervalle de confiance simple.

Nous nous bornerons à signaler que, dans le cas binomial, (4.6) coïncide avec *l'inégalité de Chernoff* (Chernoff [1952]).

Pour intégrer (4.4), on choisit $b = 1$ et on remarque pour $S \sim \mathcal{B}(n,\theta)$, avec $\theta = (1+p)/2$,

$$P\left[S-n\theta\geq\frac{nx}{2}\right]\leq \exp\left[\frac{-nx^2/2}{1-p^2+\frac{2x}{3}}\right].$$

Reportant dans (4.2), on en déduit :

$$P\left[\hat{p}-p\geq x|N>0\right]\leq\frac{1}{e^{\mu T}-1}\left\{\exp\left[\mu T\exp\left(\frac{-x^2/2}{1-p^2+2x/3}\right)\right]-1\right\}.$$

Semblablement, on obtient la même majoration pour $P\left[\hat{p}-p\leq -x|N>0\right]$, d'où la majoration bilatérale :

$$\left.\begin{array}{l} P\left[-x<\hat{p}-p<x|N>0\right] \\ \geq 1-\dfrac{2}{e^{\mu T}-1}\left\{\exp\left[\mu T\exp\left(\dfrac{-x^2/2}{1+2x/3}\right)\right]-1\right\}\end{array}\right\} \qquad (4.8)$$

Pour intégrer (4.7), on procède de la même façon, ce qui donne :

$$P\left[\hat{p}-p\geq x|N>0\right]\leq\frac{\exp\left[\mu Te^{-x^2/2}\right]-1}{e^{\mu T}-1}. \qquad (4.9)$$

On en déduit à nouveau une majoration bilatérale :

$$P\left[-x < \hat{p} - p < x | N > 0\right] \geq 1 - \frac{2}{e^{\mu T} - 1}\left[\exp\left(\mu T e^{-x^2/2}\right) - 1\right]. \tag{4.10}$$

Dès lors la question de la *construction d'un intervalle de confiance exact (par excès)* peut être réglée simultanément pour (4.8) et (4.10) :

Proposition 4.3

(i) *Pour $x > 0$, la fonction $F(\nu) = \dfrac{\exp(\nu e^{-x}) - 1}{e^{\nu} - 1}$ est strictement décroissante sur $\mathbf{R}^+$.*

(ii) *Soit $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ un seuil. Supposons admis l'a priori : $\mu T \geq C_0$. Soit x_0 tel que :*

$$\frac{\exp\left[C_0 \exp\left(\dfrac{-x_0^2/2}{1 + 2x_0/3}\right)\right] - 1}{e^{C_0} - 1} = \alpha/2 \tag{4.11}$$

Alors l'inégalité (4.8), *"Bernstein", entraîne*

$$P\left[-x_0 < \hat{p} - p < x_0 | N > 0\right] \geq 1 - \alpha. \tag{4.12}$$

(iii) *Semblablement, sous le même a priori, si x_0 satisfait :*

$$\frac{\exp\left(C_0 e^{-x_0^2/2}\right) - 1}{e^{C_0} - 1} = \alpha/2 \tag{4.13}$$

alors l'inégalité 4.9, *"Hoeffding", entraîne également* (4.12).

Démonstration

(i), comme e^{ν} est croissante, il suffit, pour montrer $F'(\nu) < 0$, d'établir $G'(y) < 0$, où $G(y) = \dfrac{y^a - 1}{y - 1}$, avec $0 < a = e^{-x} < 1$. Or le numérateur $N(y)$ de $G(y)$ vaut $N(y) = (a-1)\,y^a - a y^{a+1} + 1$. $N(y)$ s'annule pour $y = 1$ et satisfait $N(y) < 0$ pour $y > 1$, car alors $N'(y) = a\,(a-1)\left(y^{a-1} - y^{a-2}\right) < 0$.

(ii) et (iii) prenant $x = \dfrac{x_0^2/2}{1 + 2x_0/3}$ avec x_0 satisfaisant (4.11), ou bien prenant $x = x_0^2/2$ avec x_0 satisfaisant (4.13), il résulte de (i) que

$$\frac{\exp\left(\mu T e^{-x}\right)-1}{e^{\mu T}} \leq \alpha/2,$$

pour $\mu T \geq C_0$; la propriété (4.12) en résulte dans chaque cas. $\square$

Le *tableau 3* donne les *bornes de confiance* x_0 *associées aux intervalles* successifs que nous avons mis en évidence : “Chebyshev” (4.1), “Bernstein” (4.8) et “Hoeffding” (4.10). On observe que le troisième intervalle est le meilleur.

Remarque

On peut trouver dans Kambo-Kotz [1966] une amélioration simple de l'inégalité d'Okamoto-Hoeffding :
si $S \sim \mathcal{B}(n,\theta)$ et pour $t \geq 0$,

$$P\left[S - n\theta \geq nt\right] \leq \exp\left(-2nt^2 - \frac{4}{3}nt^4\right) \tag{4.14}$$

on peut, à l'aide de cette inégalité, obtenir l'analogue de (4.8) et (4.9) et ajouter, si on le désire, un paragraphe (iv) à la proposition 4.3. Nous ne l'avons pas fait considérant que le gain obtenu serait vraisemblablement minime par rapport à la référence “Hoeffding” qui, de surcroît, a le mérite d'avoir une expression plus légère.

Le *tableau 4 : Probabilité* α *de non recouvrement pour l'intervalle “Hoeffding”*, donne la probabilité calculée numériquement (comme pour les tableaux 1 et 2) de ne pas recouvrir p en fonction de $C_0 = \mu T$ et de p.

Tableau 3

Borne de confiance x_0 *telle que* $(\hat{p} - x_0, \hat{p} + x_0)$ *soit un intervalle de confiance par excès au niveau* 0.95

C_0

borne	30	50	100
“Chebyshev”	.831	.639	.449
“Bernstein”	.607	.446	.300
“Hoeffding”	.512	.391	.274

Tableau 4

Probabilité α de non recouvrement de p en fonction de p et $C_0 = \mu T$ pour l'intervalle (4.12)

p \ C_0	20	30	50	100	∞
.0	.0058	.0064	.0062	.0066	.0066
.4	.0023	.0031	.0032	.0030	.0030
.6	.0016	.0012	.0010	.0008	.0007

On constate tout d'abord que pour une valeur donnée de p les valeurs de α se stabilisent quand $C_0 \to \infty$. Les valeurs limites décroissent d'ailleurs avec p.

Proposition 4.4

Soit $\alpha > 0$ *et* $\mu T = C_0$ *, soit* x_0 *satisfaisant* (4.13), *alors quand* $C_0 \to \infty$ *:*

$$P\left[|\hat{p} - p| > x_0\right] \to 2\left\{1 - G\left(\left[\frac{-2ln\,(\alpha/2)}{1-p^2}\right]^{1/2}\right)\right\} . \tag{4.15}$$

(On a aussi noté $G(t)$ la fonction de répartition de la gaussienne standard).

Démonstration

A partir du premier membre de (4.13), en multipliant haut et bas par e^{-C_0} et en faisant $C_0 \to \infty$, on obtient $C_0\left(e^{-x_0^2/2} - 1\right) \to ln\,(\alpha/2)$. Il en résulte clairement que $x_0 \to 0$; on en tire aussi $-C_0\dfrac{x_0^2}{2} \to ln\,(\alpha/2)$; d'où l'équivalence

$$x_0 \sim \left[-\frac{2}{C_0} ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^{1/2} ,$$

quand $C_0 \to +\infty$.

Utilisant la convergence (3.4), pour $C_0 = \mu T \to +\infty$, on obtient un équivalent de $P\left[-x_0 < \hat{p} - p < x_0\right]$, à savoir

$$P\left\{-\left[\frac{-2ln\,(\alpha/2)}{\mu T}\right]^{1/2} < \hat{p} - p < \left[\frac{-2ln\,(\alpha/2)}{\mu T}\right]^{1/2}\right\}$$
$$= P\left\{-\left[\frac{-2ln\,(\alpha/2)}{1-p^2}\right]^{1/2} < \frac{\sqrt{\mu T}\,(\hat{p} - p)}{\sqrt{1-p^2}} < \left[\frac{-2ln\,(\alpha/2)}{1-p^2}\right]^{1/2}\right\} ,$$

qui tend vers $2G\left(\left[\frac{-2ln\,(\alpha/2)}{1-p^2}\right]^{1/2}\right)-1$, d'où le résultat. $\square$

La relation (4.15) est à l'origine de la colonne $C_0=\infty$ du tableau 4. Cette relation permet, pour une valeur fixée de C_0, de comprendre la décroissance de α avec p.

On constate en examinant le tableau 4 que les α sont au moins divisés par 10 par rapport à ceux des tableaux 1 et 2. Naturellement ces α (trop) faibles sont accompagnés par une largeur de l'intervalle (trop) grande. Nous n'avons pas mis en évidence de raisons spécifiques pour expliquer ce phénomène. Toutefois, trois raisons générales semblent devoir être évoquées :

- Un premier point apparaît aussitôt : toute majoration ayant un caractère général doit nécessairement être un peu excessive. D'autant plus que pour pouvoir être intégrée dans (4.2) il convient de se limiter à des majorations d'un type particulier (les majorations exponentielles).

- Un second point (bien perçu par Bennett) est que nos inégalités bilatérales sont construites à partir d'inégalités unilatérales qui doivent être valables quelle que soit la dissymétrie de la distribution étudiée. C'est un autre facteur qui oblige à se protéger plus qu'on ne le souhaiterait.

- Enfin, il ne faut pas oublier que les comparaisons avec les intervalles asymptotiques sont quelque peu "truquées" : ces intervalles sont bien assujettis à une condition de niveau à l'infini, mais pas du tout à distance finie (leur α peut alors tout à fait dépasser 0.05), ce qui leur permet d'être plus étroits pour le "même" seuil.

5 En guise de conclusion : quelques points physiques supplémentaires

5.1 Fragmentation de la durée d'observation

Dans la pratique expérimentale la durée totale T $(T=150s)$ est découpée en K $(K=15)$ durées élémentaires égales (de $10s$ chacune). Ainsi $T=\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_k$ avec $\tau_k=T/K$. Pendant chacune de ces durées on procède à une mesure élémentaire $N_A(\tau_k)$ et $N_B(\tau_k)$. Avec nos hypothèses, pour tous les $x_1, \cdots, x_K$; $y_1, \cdots, y_K$ entiers (positifs ou nuls) :

$$\left.\begin{array}{l} P\left[N_A\left(\tau_k\right) = x_k, N_B(\tau_k) = y_k \;;\;\; 1 \leq k \leq K\right] \\ = \prod_{k=1}^{K} \left\{ \exp\left[-\mu_A T/K - \mu_B T/K\right] \frac{\left[\mu_A T/K\right]^{x_k}}{(x_k)!} \frac{\left[\mu_B T/K\right]^{y_k}}{(y_k)!} \right. . \end{array}\right\} \tag{5.1}$$

Le critère de factorisation montre que le couple

$$N_A(T) = \sum_{k=1}^{K} N_A(\tau_k) \quad et \quad N_B(T) = \sum_{k=1}^{K} N_B(\tau_k)$$

constitue un *couple exhaustif pour* μ_A *et* μ_B : pour les problèmes d'induction en cause il n'y aura pas lieu de descendre au niveau de chacune des mesures élémentaires et il suffira de travailler avec les totaux $N_A(T)$ et $N_B(T)$. En particulier le physicien ne gagne rien à observer K polarisations élémentaires et à s'efforcer d'en faire une synthèse performante ...

Remarque

Un point de vocabulaire doit être éclairé : nous avons systématiquement utilisé le terme "polarisation" là où les physiciens utilisent celui d' "asymétrie". La distinction est secondaire pour notre propos, car, dans une même expérience ces deux notions sont égales à un facteur près.

5.2 Calcul de la variance asymptotique

L'expression (3.5) est très voisine de celle donnée par Kessler, obtenue en utilisant une technique efficace et rapide appelée par les physiciens "la propagation des erreurs", voir, par exemple, B.R. Martin [1971]. Cette approche commode nous paraît toutefois moins précise que celle que nous avons développée ici où la présence d'une modélisation probabiliste explicite permet d'exploiter la convergence gaussienne et d'atteindre de véritables intervalles de confiance (asymptotiques) qui sont absents chez Kessler et que la pratique des physiciens semble ignorer.

Nous pensons que l'intervalle (3.7) est une nouveauté susceptible d'être utilisée avec profit dans des expériences mettant en cause des flux nettement plus faibles que ceux qui nous ont donné nos ordres de grandeur.

5.3 Précision de l'intervalle de confiance

Pour situer les choses en ordre de grandeur, nous nous placerons dans la situation ou $N_A \neq N_B$ (cas où la polarisation est faible). On constate que la largeur de l'intervalle (3.5) est sensiblement $\left(\frac{8}{N_A}\right)^{1/2} \neq \frac{3}{\sqrt{N_A}}$. Pour des données où $N_A + N_B$ est de l'ordre de 5×10^5, cette largeur vaut sensiblement 0.005.

Pour avoir le premier chiffre significatif, c'est-à-dire une précision de 0.1, il convient que $\frac{3}{\sqrt{N_A}} = 0.1$, ce qui exige $N_A \geq 900$, soit sensiblement $N_A + N_B$ de l'ordre de 2000. Pour une précision de 0.01, le même raisonnement montre que $N_A + N_B$ doit être de l'ordre de 20 000.

Naturellement, ces chiffres correspondent à une situation peu favorable où l'on cherche une bonne précision alors que p est faible.

5.4 Utilisation des intervalles de confiance exacts

Les intervalles de confiance donnés dans la proposition (4.3) sont sûrement nouveaux pour les physiciens. Leur construction permet, a priori, de les utiliser pour des flux de particules très sensiblement inférieurs à ceux de l'intervalle (3.7). Or, de tels flux faibles existent selon ce qui nous a été indiqué. Toutefois, en l'état actuel, (Cf. commentaire du tableau 4), ces intervalles exacts sont trop "frileux" ; ceci fait que nous ne pouvons les conseiller que subsidiairement.

Remerciements

Nous remercions Claudine Hermann, Henri-Jean Drouhin et Georges Lampel, dont les questions ont suscité ce travail, ainsi que Jean-Jacques Daudin pour son aide précieuse dans la partie numérique.

References

[1] Abramowitz, M. and Stegun, I. (1972).*Handbook of Mathematical functions,* Dover Publications, New York.

[2] Bennett, G. (1962). "Probability inequalities for the sum of independent random variables", J. Am. Stat. Assoc., 57, 33-45.

[3] Chernoff, H. (1952). "A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations", Ann. Math. Stat., 23, 493-507.

[4] De Bruijn, N.G. (1981).*Asymptotic Methods in Analysis,* Dover publications, New York.

[5] Drouhin, H.J. Hermann, C. Lampel G. (1985) Phys. Rev. B31, 38-72.

[6] Flechter, G.D. Gay, T.J. Lubell, M.S. (1986) Phys. Rev. A34, 9-11.

[7] Hermann, C. Drouhin, H.J. Lampel, G. Lassailly, Y. Paget, O. Peretti, J. Houdré, R. Ciccacci, F. Riechert, H. (1992) *Spectroscopy of Nonequilibrium Electrons and Phonons,* Shank, C.V. and Zarkharchenya, B.P. ed., Elsevier Sc. Publishers.

[8] Hoeffding, W. (1963). "Probability inequalities for sums of bounded random variables", J. Am. Stat. Assoc., 58, 13-30.

[9] Kambo, N.S. and Kotz, S. (1966) "On exponential bounds for binomial probabilities", Ann. Inst. Stat. Math., 18, 277-87.

[10] Kessler, J. (1985). *Polarized electrons,* Springer Verlag, Berlin.

[11] Martin, B.R. (1971) *Statistics for Physicists,* Academic Press, New York.

[12] Okamoto, M. (1958) "Some inequalities relating to the partial sum of binomial probabilities", Ann. Inst. Stat. Math., 10, 29-35.

[13] Rao, C.R. (1973). *Linear Statistical Inference and its applications,* Wiley, New York.

[14] Riechert, H. Drouhin, H.J. Hermann, C. (1988) Phys. Rev. B38, 41-36.

[15] Serfling, R. (1980). *Approximation Theorems of Mathematical Statistics,* Wiley, New York.

[16] Shorack, G.R. and Wellner, J.A. (1986). *Empirical Processes with applications to Statistics,* Wiley, New York.